

DOI:10.16356/j.1005-2615.2015.03.002

## 双平行线阵中基于 Euler 变换传播算子的 二维 DOA 估计算法

张小飞<sup>1,2</sup> 张立岑<sup>2</sup> 孙华普<sup>2</sup> 蒋 驰<sup>2</sup> 陈学强<sup>2</sup>

(1. 南京航空航天大学江苏省物联网与控制技术重点实验室, 南京, 210016;

2. 南京航空航天大学电子信息工程学院, 南京, 210016)

**摘要:**考虑双平行线阵中非圆信号二维波达方向 (Direction of arrival, DOA) 估计问题, 提出了一种基于 Euler 变换传播算子 (Propagator method, PM) 的二维 DOA 估计算法。该算法利用非圆信号的特性, 扩展了接收数据矩阵, 使得角度估计性能优于二维 PM 算法。同时采用 Euler 变换把非圆 PM 算法中的复数运算转换为实数运算, 降低计算复杂度, 角度估计性能逼近非圆 PM 算法。该算法可以实现二维角度的自动配对, 与传统 PM 算法相比, 可同时估计出更多的信源。该算法的优越性均可在文中得到验证。

**关键词:**双平行线阵; 波达方向估计; Euler 变换; 传播算子方法

中图分类号: TN92

文献标志码: A

文章编号: 1005-2615(2015)03-0324-08

## Two-Dimensional DOA Estimation Algorithm for Two Parallel Linear Arrays via Euler Transformation and Propagator Method

Zhang Xiaofei<sup>1,2</sup>, Zhang Licen<sup>2</sup>, Sun Hua pu<sup>2</sup>, Jiang Chi<sup>2</sup>, Chen Xueqiang<sup>2</sup>

(1. Jiangsu Key Laboratory of Internet of Things and Control Technologies, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China; 2. College of Electronic and Information Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China)

**Abstract:** The problem of two-dimensional (2-D) direction of arrival (DOA) estimation is discussed for two parallel linear arrays, and an algorithm using Euler transformation and propagator method (PM) is proposed. The algorithm uses the characteristics of noncircular signals to expand the received data matrix, and it has better DOA estimation performance than the 2-D propagator method (PM). At the same time, the algorithm, which uses the Euler transformation to convert complex arithmetic of noncircular-PM to real arithmetic, reduces computational complexity, and its estimation performance is close to noncircular-PM algorithm performance. The proposed algorithm can obtain automatically-paired 2-D DOA estimation. Compared with conventional 2-D PM, it can estimate more sources. Simulation results verify the usefulness of the proposed algorithm.

**Key words:** two parallel linear arrays; direction of arrival (DOA) estimation; Euler transformation; propagator method (PM)

**基金项目:**国家自然科学基金(61371169)资助项目;江苏高校优势学科建设工程资助项目。

**收稿日期:**2015-03-02; **修订日期:**2015-04-30

**作者简介:**张小飞,男,教授,博士生导师,长期从事移动通信技术、通信信号处理等方向的研究,先后主持国家自然科学基金等项目 20 余项,获得省部级科技进步奖 2 项,2010 年获青年教师奖、2012 年青蓝工程中青年学术带头人;20 多个国际会议的 TPC 成员、国内外 10 余种学术刊物的编委;在 IEEE、IET 等刊物上发表论文 100 多篇,其中 SCI 论文 60 余篇,学术论文入选为 2009 年中国百篇最具影响国际学术论文,入选 ESI 数据库高被引论文;出版著作 6 部。

**通信作者:**张小飞, E-mail: zhangxiaofei@nuaa.edu.cn.

随着阵列信号处理的飞速发展,波达方向(Direction of arrival, DOA)估计作为其关键技术已经被深入应用到通信、雷达、声纳和医学等军用和民用领域<sup>[1-5]</sup>。近来,随着二维参数估计的兴起,二维 DOA 估计的研究与应用在阵列信号处理中成为了研究的热点<sup>[6-12]</sup>。二维 DOA 估计算法包括二维多重信号分类(Multiple signal classification, MUSIC)算法<sup>[6]</sup>、二维借助于旋转不变技术的信号参数估计(Estimation of signal parameters via rotational invariance technique, ESPRIT)算法<sup>[7]</sup>、最大似然法<sup>[8]</sup>、平行因子技术<sup>[9]</sup>、高阶累积量法<sup>[10]</sup>、传播算子(Propagator method, PM)<sup>[11]</sup>等。

在阵列信号处理领域中,非圆信号已经获得了极大的关注<sup>[12-13]</sup>。非圆信号是指在星座图中振幅只有同相分量而正交分量为零的信号,诸如二进制相移键控(Binary phase shift keying, BPSK)和调幅(Amplitude modulation, AM)信号等<sup>[14]</sup>。当信源发出非圆信号时,通过利用非圆特性,可以有效地将接收的数据矩阵维数加倍,从而在提高参数估计性能的同时还能估计出更多的信号源。因此,非圆信号的非圆特性已被广泛用于提高 DOA 估计性能<sup>[15-21]</sup>。文献[17]提出一种非圆 MUSIC 算法实现 DOA 估计。该算法利用信源的的非圆特性,能估计出比传感器的数量更多的信源。文献[15]提出了一种用 ESPRIT 实现非圆信号的定位算法,该算法无需谱峰搜索,复杂度较低。文献[20]则对非圆信号 DOA 估计提出了一种非圆 PM 算法,该算法比 PM 算法<sup>[11]</sup>有更好的性能。

由于上述诸多算法均是在复数域中进行运算,计算较为复杂,文献[22, 23]利用 Unitary 变换将复数运算转换为实数运算分别提出了实值 MUSIC 和实值 ESPRIT 算法。文献[24]提出了一种非圆信号的实值 ESPRIT 算法,该算法利用欧拉变换将所有的复数运算转换到实数域,既扩展了数据维数以便同时估计更多的信源,又可以大大减少算法的运算量。

鉴于此,本文结合非圆信号的二维 PM 算法以及欧拉变换,提出了在双平行线阵中一种基于 Euler 变换 PM 的二维 DOA 估计算法。该算法采用 Euler 变换把二维 PM 算法中的复数运算转换为实数运算,相比二维 PM 算法,复杂度大大降低,角度估计性能优于 PM 算法。同时采用 Euler 变换把非圆 PM 算法中的复数运算转换为实数运算,降低计

算复杂度,角度估计性能逼近非圆 PM 算法的性能。该算法可以实现二维角度的自动配对,与传统 PM 算法相比,可同时估计出更多的信源。

文中用到的符号和算子说明如下: $[\cdot]^T$  表示转置; $[\cdot]^H$  表示共轭转置; $\text{diag}(\cdot)$  为对角化算子; $\text{angle}(\cdot)$  表示取相角; $\hat{x}$  表示对精确值  $x$  的估计; $E\{\cdot\}$  表示取期望; $\|\cdot\|_F$  表示 F 范数; $\otimes, \circ$  和  $\oplus$  分别表示 Kronecker 积、Khatri-Rao 积和 Hadamard 积;小写粗体表示向量,大写粗体表示矩阵。

## 1 数据模型

图 1 是一个有  $2M$  个阵元的双平行线阵,其中相邻阵元间距为  $d$ 。考虑到远场信号,信源足够远,信号到达阵列时可以认为是平行波。假设噪声与信号独立,且是加性独立同分布的高斯过程。假设有  $K$  个非相干信源,第  $k$  个信源对应的仰角和方位角分别表示为  $\theta_k$  和  $\phi_k$ 。

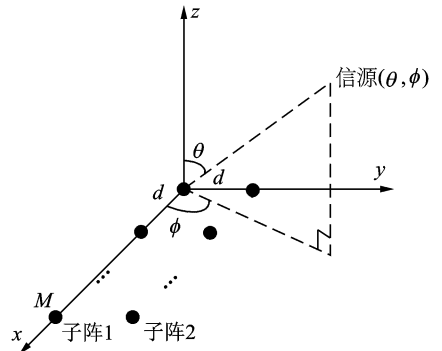


图 1 双平行线阵的阵元结构

Fig. 1 Structure of the two parallel linear arrays

双平行线阵的两个子阵的输出为<sup>[1]</sup>

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}_1(t) \quad (1)$$

$$\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{A}\Phi_Y\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}_2(t) \quad (2)$$

式中: $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_K] \in \mathbb{C}^{M \times K}$ ;  $\mathbf{a}_k = [1, e^{-j\tau_{xk}}, \dots, e^{-j(m-1)\tau_{xk}}, \dots, e^{-j(M-1)\tau_{xk}}]^T$ ;  $\tau_{xk} = 2\pi d \cos\phi_k \sin\theta_k / \lambda$ ;  $m = 1, \dots, M$ ;  $\mathbf{n}_1(t)$  和  $\mathbf{n}_2(t)$  分别为各子阵的噪声; $\Phi_Y$  为对角矩阵

$$\Phi_Y = \begin{bmatrix} e^{-j\tau_{y1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{-j\tau_{yK}} \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中: $\tau_{yk} = 2\pi d \sin\phi_k \sin\theta_k / \lambda$ 。

根据最大非圆率信号的定义<sup>[12]</sup>,有

$$\mathbf{s}(t) = \Psi\mathbf{s}_0(t) \quad (4)$$

式中: $\mathbf{s}_0(t) \in \mathbb{R}^{K \times 1}$ ,

$$\Psi = \begin{bmatrix} e^{-j\phi_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{-j\phi_k} \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中:  $\phi_k$  为第  $k$  个信号的非圆相位。

## 2 Euler 变换

把复数运算转化为实数运算是 DOA 估计的一种常用方法。传统的实值 MUSIC 算法<sup>[22]</sup>, 实值 ESPRIT 算法<sup>[23]</sup> 都是根据 Unitary 变化提出的。本文将利用 Euler 公式<sup>[24]</sup>, 使用一种把复数转化

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} \cos(\psi_1) & \cdots & \cos(\psi_K) \\ \cos[\tau_{x1} + \psi_1] & \cdots & \cos[\tau_{xK} + \psi_K] \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cos[(M-1)\tau_{x1} + \psi_1] & \cdots & \cos[(M-1)\tau_{xK} + \psi_K] \\ \cos[\tau_{y1} + \psi_1] & \cdots & \cos[\tau_{yK} + \psi_K] \\ \cos[\tau_{x1} + \tau_{y1} + \psi_1] & \cdots & \cos[\tau_{xK} + \tau_{yK} + \psi_K] \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cos[(M-1)(\tau_{x1} + \tau_{y1}) + \psi_1] & \cdots & \cos[(M-1)(\tau_{xK} + \tau_{yK}) + \psi_K] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} \sin(\psi_1) & \cdots & \sin(\psi_K) \\ \sin[\tau_{x1} + \psi_1] & \cdots & \sin[\tau_{xK} + \psi_K] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sin[(M-1)\tau_{x1} + \psi_1] & \cdots & \sin[(M-1)\tau_{xK} + \psi_K] \\ \sin[\tau_{y1} + \psi_1] & \cdots & \sin[\tau_{yK} + \psi_K] \\ \sin[\tau_{x1} + \tau_{y1} + \psi_1] & \cdots & \sin[\tau_{xK} + \tau_{yK} + \psi_K] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sin[(M-1)(\tau_{x1} + \tau_{y1}) + \psi_1] & \cdots & \sin[(M-1)(\tau_{xK} + \tau_{yK}) + \psi_K] \end{bmatrix}$$

当  $i \in [1, \dots, M]$ , 有

$$x_{c,i}(t) = \sum_{k=1}^K \cos[(i-1)\tau_{xk} + \psi_k] s_k(t) + n_{c,i}(t) \quad (9)$$

$$x_{s,i}(t) = \sum_{k=1}^K \sin[(i-1)\tau_{xk} + \psi_k] s_k(t) + n_{s,i}(t) \quad (10)$$

当  $i \in [M+1, \dots, 2M]$ , 有

$$x_{c,i}(t) = \sum_{k=1}^K \{\cos[(i-1)\tau_{xk} + \tau_{yk} + \psi_k] s_k(t)\} + n_{c,i}(t) \quad (11)$$

$$x_{s,i}(t) = \sum_{k=1}^K \{\sin[(i-1)\tau_{xk} + \tau_{yk} + \psi_k] s_k(t)\} + n_{s,i}(t) \quad (12)$$

定义

$$\mathbf{x}_r(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_c(t) \\ \mathbf{x}_s(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A}_r \mathbf{s}_0(t) + \mathbf{n}_r(t) \quad (13)$$

为实数的方法。

构造

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}\Phi_Y \end{bmatrix} \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (6)$$

式中:  $\mathbf{n}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1(t) \\ \mathbf{n}_2(t) \end{bmatrix}$ 。令

$$\mathbf{x}_c(t) = [\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^*(t)]/2 = \mathbf{A}_c \mathbf{s}_0(t) + \mathbf{n}_c(t) \quad (7)$$

$$\mathbf{x}_s(t) = [\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)]/2j = \mathbf{A}_s \mathbf{s}_0(t) + \mathbf{n}_s(t) \quad (8)$$

式中:  $\mathbf{n}_c(t) = \text{real}(\mathbf{n}(t))$ ;  $\mathbf{n}_s(t) = \text{imag}(\mathbf{n}(t))$ ;  $\mathbf{A}_c \in \mathbb{R}^{2M \times K}$ ;  $\mathbf{A}_s \in \mathbb{R}^{2M \times K}$ 。

$$\mathbf{A}_r = \begin{bmatrix} \cdots & \cos(\psi_K) \\ \cdots & \cos[\tau_{xK} + \psi_K] \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cos[(M-1)\tau_{xK} + \psi_K] \\ \cdots & \cos[\tau_{yK} + \psi_K] \\ \cdots & \cos[\tau_{xK} + \tau_{yK} + \psi_K] \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cos[(M-1)(\tau_{xK} + \tau_{yK}) + \psi_K] \\ \cdots & \sin(\psi_K) \\ \cdots & \sin[\tau_{xK} + \psi_K] \\ \cdots & \vdots \\ \cdots & \sin[(M-1)\tau_{xK} + \psi_K] \\ \cdots & \sin[\tau_{yK} + \psi_K] \\ \cdots & \sin[\tau_{xK} + \tau_{yK} + \psi_K] \\ \cdots & \vdots \\ \cdots & \sin[(M-1)(\tau_{xK} + \tau_{yK}) + \psi_K] \end{bmatrix}$$

式中:  $\mathbf{A}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c \\ \mathbf{A}_s \end{bmatrix}$ ;  $\mathbf{n}_r(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_c(t) \\ \mathbf{n}_s(t) \end{bmatrix}$ ;  $\mathbf{A}_r \in \mathbb{R}^{4M \times K}$ ;  $\mathbf{n}_r(t) \in \mathbb{R}^{4M \times 1}$ 。

## 3 基于 Euler 变换 PM 的二维 DOA 估计算法

定义

$$\mathbf{J}_1 = [\mathbf{I}_M \quad \mathbf{I}_M \quad \mathbf{0}_M \quad \mathbf{0}_M] \quad (14)$$

$$\mathbf{J}_2 = [\mathbf{0}_M \quad \mathbf{0}_M \quad -\mathbf{I}_M \quad \mathbf{I}_M] \quad (15)$$

式中:  $\mathbf{I}_M$  为  $M \times M$  的单位矩阵;  $\mathbf{0}_M$  为  $M \times M$  的零矩阵;  $\mathbf{J}_1 \in \mathbb{R}^{M \times 4M}$ ;  $\mathbf{J}_2 \in \mathbb{R}^{M \times 4M}$ 。则

$$\mathbf{J}_1 \mathbf{A}_r \mathbf{G} = \mathbf{J}_2 \mathbf{A}_r \quad (16)$$

其中

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \tan\left(\frac{\tau_{y1}}{2}\right) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tan\left(\frac{\tau_{yK}}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_1 \mathbf{A}_r = \begin{bmatrix} 2\cos\left(\frac{\tau_{y1}+2\psi_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\tau_{y1}}{2}\right) & \cdots & 2\cos\left(\frac{\tau_{yK}+2\psi_K}{2}\right)\cos\left(\frac{\tau_{yK}}{2}\right) \\ 2\cos\left(\frac{2\tau_{x1}+\tau_{y1}+2\psi_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\tau_{y1}}{2}\right) & \cdots & 2\cos\left(\frac{2\tau_{xK}+\tau_{yK}+2\psi_K}{2}\right)\cos\left(\frac{\tau_{yK}}{2}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2\cos\left(\frac{2(M-1)\tau_{x1}+\tau_{y1}+2\psi_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\tau_{y1}}{2}\right) & \cdots & 2\cos\left(\frac{2(M-1)\tau_{xK}+\tau_{yK}+2\psi_K}{2}\right)\cos\left(\frac{\tau_{yK}}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_2 \mathbf{A}_r = \begin{bmatrix} 2\cos\left(\frac{\tau_{y1}+2\psi_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\tau_{y1}}{2}\right) & \cdots & 2\cos\left(\frac{\tau_{yK}+2\psi_K}{2}\right)\sin\left(\frac{\tau_{yK}}{2}\right) \\ 2\cos\left(\frac{2\tau_{x1}+\tau_{y1}+2\psi_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\tau_{y1}}{2}\right) & \cdots & 2\cos\left(\frac{2\tau_{xK}+\tau_{yK}+2\psi_K}{2}\right)\sin\left(\frac{\tau_{yK}}{2}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2\cos\left(\frac{2(M-1)\tau_{x1}+\tau_{y1}+2\psi_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\tau_{y1}}{2}\right) & \cdots & 2\cos\left(\frac{2(M-1)\tau_{xK}+\tau_{yK}+2\psi_K}{2}\right)\sin\left(\frac{\tau_{yK}}{2}\right) \end{bmatrix}$$

采样数据的协方差矩阵为  $\hat{\mathbf{R}}_r =$  式中:  $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \in \mathbb{R}^{(M-1) \times M}$ .

$\frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{x}_r(t_l) \mathbf{x}_r^H(t_l)$ , 其中  $L$  为快拍数。对其进行分块, 有

$$\hat{\mathbf{R}}_r = [\mathbf{R}_1 \quad \mathbf{R}_2] \quad (17)$$

式中:  $\mathbf{R}_1 \in \mathbb{R}^{4M \times K}$ ;  $\mathbf{R}_2 \in \mathbb{R}^{4M \times (4M-K)}$ 。在无噪声的情况下, 有  $\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_1 \mathbf{P}$ ,  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{K \times (4M-K)}$  为传播算子。实际上, 噪声是始终存在的, 并且传播算子矩阵可由  $J_{\text{csm}}(\mathbf{P}) = \|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 \mathbf{P}\|_{\text{F}}^2$  的最小化问题得到。通过式(18)进行估计  $\mathbf{P}$ , 有

$$\hat{\mathbf{P}} = (\mathbf{R}_1^H \mathbf{R}_1)^{-1} \mathbf{R}_1^H \mathbf{R}_2 \quad (18)$$

令

$$\mathbf{P}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{P}^H \end{bmatrix} \quad (19)$$

存在一个  $K \times K$  的非奇异矩阵  $\mathbf{T}$ , 使得

$$\mathbf{A}_r \mathbf{T} = \mathbf{P}_c \quad (20)$$

由式(16)可得

$$\mathbf{J}_1 \mathbf{P}_c \mathbf{T}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{T} = \mathbf{J}_2 \mathbf{P}_c \quad (21)$$

定义

$$\mathbf{P}_1 = (\mathbf{J}_1 \mathbf{P}_c)^+ \mathbf{J}_2 \mathbf{P}_c \quad (22)$$

可得

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{T} \quad (23)$$

对  $\mathbf{P}_1$  进行特征分解后, 得到

$$\gamma_k = \tan\left(\frac{\tau_{yK}}{2}\right) \quad (24)$$

式中:  $\gamma_k$  为  $\mathbf{G}$  的第  $k$  个对角元素。

类似地, 定义

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

构造矩阵

$$\mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \mathbf{T}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{T}_1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\mathbf{J}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{T}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{T}_2 \\ \mathbf{T}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (28)$$

式中:  $\mathbf{J}_3, \mathbf{J}_4 \in \mathbb{R}^{(4M-4) \times 4M}$ 。

可得

$$\mathbf{J}_3 \mathbf{A}_r \mathbf{D} = \mathbf{J}_4 \mathbf{A}_r \quad (29)$$

其中

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \tan\left(\frac{\tau_{x1}}{2}\right) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & & \tan\left(\frac{\tau_{xK}}{2}\right) \end{bmatrix}$$

由上述过程可得

$$\mathbf{J}_3 \mathbf{P}_c \mathbf{T}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{T} = \mathbf{J}_4 \mathbf{P}_c \quad (30)$$

定义

$$\mathbf{P}_2 = (\mathbf{J}_3 \mathbf{P}_c)^+ \mathbf{J}_4 \mathbf{P}_c \quad (31)$$

可得

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{T} \quad (32)$$

对  $\mathbf{P}_2$  进行特征分解后, 得到

$$\rho_k = \tan\left(\frac{\tau_{xk}}{2}\right) \quad (33)$$

式中:  $\rho_k$  为  $\mathbf{D}$  的第  $k$  个对角元素。

定义  $\eta_k = \sin\phi_k \sin\theta_k$ ,  $\mu_k = \cos\phi_k \sin\theta_k$ , 进一步推导可得

$$\hat{\eta}_k = \lambda \cdot \arctan(\gamma_k) / \pi d \quad (34)$$

$$\hat{\mu}_k = \lambda \cdot \arctan(\rho_k) / \pi d \quad (35)$$

因此可得仰角和方位角的估计为

$$\hat{\theta}_k = \arcsin \sqrt{\hat{\eta}_k^2 + \hat{\mu}_k^2} \quad (36)$$

$$\hat{\phi}_k = \arctan(\hat{\eta}_k / \hat{\mu}_k) \quad (37)$$

至此,将 Euler 变换 PM 算法的主要步骤总结如下。

**步骤 1** 构造  $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix}, \mathbf{x}_c(t), \mathbf{x}_s(t), \mathbf{x}_r(t)$ , 计算  $\hat{\mathbf{R}}_r; O(M^2 L)$ 。

**步骤 2** 对  $\hat{\mathbf{R}}_r$  进行分块得到传播算子  $\mathbf{P}$ , 进而构造  $\mathbf{P}_c$ , 并且构造  $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \mathbf{J}_3, \mathbf{J}_4; O(4M^2 K + MK^2)$ 。

**步骤 3** 计算矩阵  $\mathbf{P}_1$  和  $\mathbf{P}_2$ , 并分别进行特征分解;  $O(4(M-1)K^2 + K^3)$ 。

**步骤 4** 估计仰角和方位角。

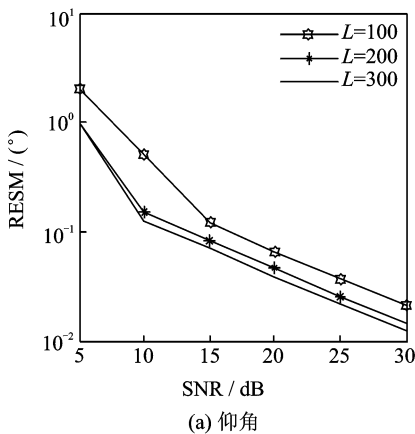
根据以上步骤分析,该算法的主要计算复杂度为  $O(4(M-1)K^2 + K^3 + M^2 L + 4M^2 K + MK^2)$ 。而非圆 PM 算法复杂度为  $O(16(M-1)K^2 + 4K^3 + 4M^2 L + 16M^2 K + 4MK^2)$ , 二维 PM 算法的复杂度为  $O(12(M-1)K^2 + 4K^3 + 4M^2 L + 4M^2 K + 2MK^2)$ 。因此,本文算法的计算复杂度低于非圆 PM 算法。

该算法的 3 个优点:(1)可以实现自动配对的二维角度估计;(2)采用实数运算,避免了复数运算的巨大计算量;(3)角度估计性能优于二维 PM 算法,逼近非圆 PM 算法。

推导了双平行线阵下角度估计的克拉美罗界(Cramer-Rao bound, CRB)<sup>[25]</sup>

$$\text{CRB} = \frac{\sigma^2}{2L} \{ \text{Re} [ (\mathbf{D}^H \mathbf{\Pi}_A^\dagger \mathbf{D}) \oplus \mathbf{P}^T ] \}^{-1} \quad (38)$$

式中:  $\oplus$  表示 Hadamard 积;  $\mathbf{\Pi}_A^\dagger = \mathbf{I}_{4M} - \mathbf{A}_r (\mathbf{A}_r^H \mathbf{A}_r)^{-1} \mathbf{A}_r^H$ ;  $\mathbf{P} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{s}(t_l) \mathbf{s}^H(t_l)$ ;  $\mathbf{D} = [\partial \mathbf{a}_{r1} / \partial \phi_1, \dots, \partial \mathbf{a}_{rK} / \partial \phi_K, \partial \mathbf{a}_{r1} / \partial \theta_1, \dots, \partial \mathbf{a}_{rK} / \partial \theta_K]$ ;  $\mathbf{a}_{rk}$  为  $\mathbf{A}_r$  的第  $k$  列。



## 4 仿真结果

对欧拉变换 PM 算法作仿真以便清晰地反映出算法的性能。定义角度的求根均方误差(Root mean square error, RMSE)

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{TK} \sum_{m=1}^T \sum_{k=1}^K (\omega_{km} - \omega_k)^2} \quad (39)$$

式中:  $T$  为仿真次数;  $\omega_{km}$  为在第  $m$  次仿真中,第  $k$  个信源仰角(或方位角)的估计值;  $K$  为信源个数;  $\omega_k$  为仰角(或方位角)的精确值。

图 2 显示了该算法分别在 SNR=20 dB 情况下的仿真结果,其中  $M=12$ , 仰角和方位角分别为  $(10^\circ, 20^\circ, 30^\circ)$  和  $(15^\circ, 30^\circ, 50^\circ)$ 。可以看出,该算法可以有效地估计出仰角和方位角。

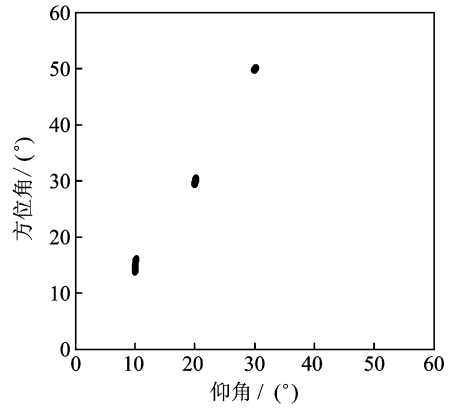


图 2 SNR 为 20 dB 情况下该算法估计二维 DOA 的散布图 ( $L=200, M=12, K=3$ )

Fig. 2 2D DOA estimation performance with SNR = 20 dB ( $L=200, M=12, K=3$ )

图 3 针对不同快拍数下的角度估计性能作仿真。由于快拍数的增加使得采样数据增加,从而得

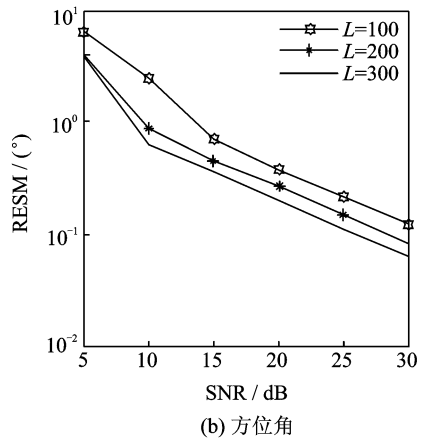


图 3 不同  $L$  下的角度估计性能 ( $M=12, K=3$ )

Fig. 3 Angle estimation performance with different  $L$  ( $M=12, K=3$ )

到更加精确的协方差矩阵,因此得到的角度估计性能越好。

图 4 仿真出不同阵元数下的角度估计性能。从图 4 可见,算法的性能随阵元数的增加而提高。原因是阵元数的增加使得分集增益增加。

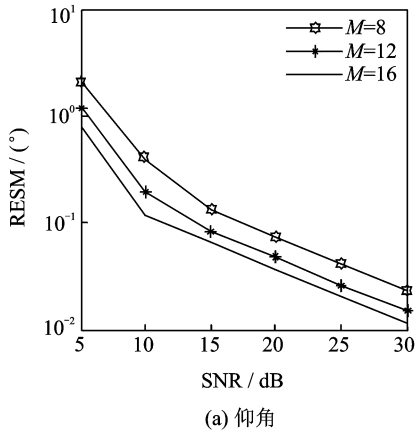


图 5, 6 分别在 2 个和 3 个信源条件下对比了本文提出的 Euler 变换 PM 算法、非圆 PM 算法和二维 PM 算法估计二维 DOA 的性能。显然,本文算法性能高于二维 PM 算法,并且非常逼近非圆 PM 算法。

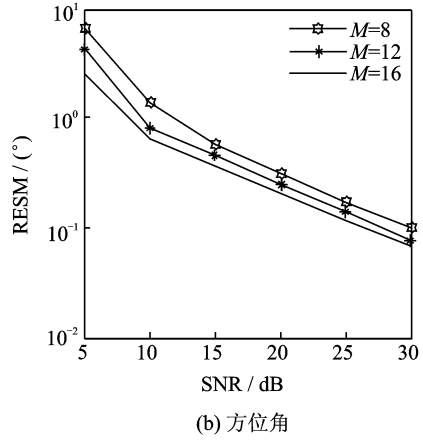


图 4 不同  $M$  下的角度估计性能 ( $L=200, K=3$ )

Fig. 4 Angle estimation performance with different  $M$  ( $L=200, K=3$ )

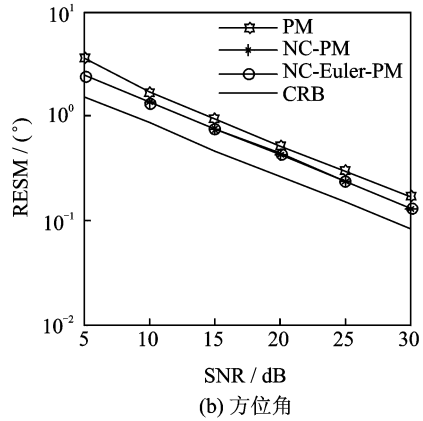
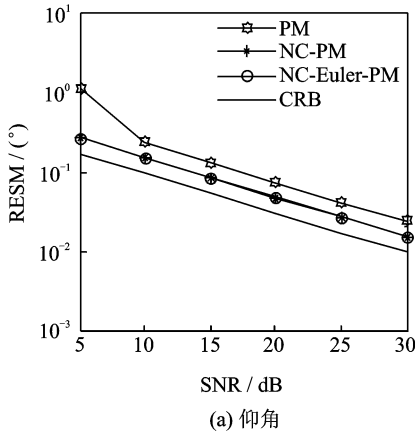


图 5 不同算法下的角度估计性能 ( $L=100, M=8, K=2$ )

Fig. 5 Angle estimation performance comparison ( $L=100, M=8, K=2$ )

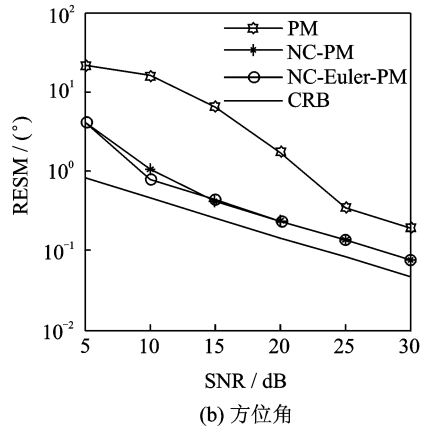
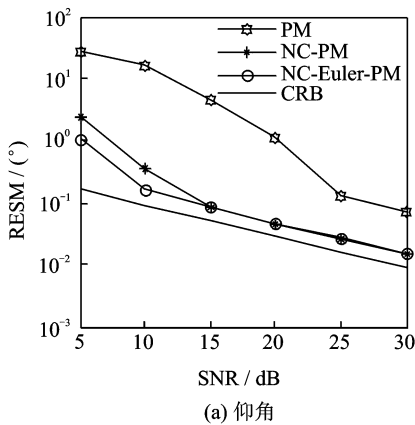


图 6 不同算法下的角度估计性能 ( $L=200, M=12, K=3$ )

Fig. 6 Angle estimation performance comparison ( $L=200, M=12, K=3$ )

## 5 结束语

本文提出了在双平行线阵中一种基于 Euler 变换 PM 的二维 DOA 估计算法。该算法采用非圆信号的特性,扩展了接收数据矩阵,使得角度估计性能优于二维 PM 算法。同时采用 Euler 变换把非圆 PM 算法中的复数运算转换为实数运算,降低计算复杂度,角度估计性能逼近非圆 PM 算法的性能。该算法可以实现二维角度的自动配对,与传统 PM 算法相比,可同时估计出更多的信源。因此,该算法更加高效,适用范围也更加广泛。

### 参考文献:

- [1] 张小飞,汪飞,陈伟华. 阵列信号处理的理论与应用[M]. 2 版. 北京:国防工业出版社,2013.  
Zhang Xiaofei, Wang fei, Chen Weihua. The theory and application of array signal processing[M]. 2 Ed. Beijing: National Defence Industry Press, 2013.
- [2] Kim J M, Lee O K, Ye J C. Compressive MUSIC: revisiting the link between compressive sensing and array signal processing[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2012,58(1):278-301.
- [3] 张小飞,张立岑,陈未央,等. MIMO 阵列中基于 PM 和降维变换的高效 DOA 估计算法[J]. 数据采集与处理, 2014,29(3):372-377.  
Zhang Xiaofei, Zhang Licen, Chen Weiyang, et al. Computationally efficient DOA estimation for MIMO array using propagator method and the reduced-dimension transformation[J]. Journal of Data Acquisition and Processing, 2014,29(3):372-377.
- [4] 邹月娴,郭轶凡,郑炜乔. 基于 AVS 和稀疏表示的鲁棒语音者声源 DOA 估计方法[J]. 数据采集与处理, 2015,30(2):299-306.  
Zou Yuexian, Guo Yifan, Zhen Weiqiao. Robust speaker DOA estimation based on AVS and sparse representation[J]. Journal of Data Acquisition and Processing, 2015,30(2):299-306.
- [5] 郭业才,宋宫琨琨,吴礼福,等. 基于圆形麦克风阵列的声源定位改进算法[J]. 数据采集与处理,2015,30(2):344-349.  
Guo Yecai, Song Gongkunkun, Wu Lifu, et al. Improved algorithm of sound source localization using circular microphone array[J]. Journal of Data Acquisition and Processing, 2015,30(2):344-349.
- [6] 薛晓峰,王永良,张永顺,等. 二维 MUSIC 算法分维

处理及其阵列结构的研究[J]. 空军工程大学学报:自然科学版,2008,9(5):33-37.

Xue Xiaofeng, Wang Yongliang, Zhang Yongshun, et al. A study of decoupling 2D-MUSIC algorithm and array structure[J]. Journal of Air Force Engineering University: Natural Science Edition, 2008,9(5):33-37.

- [7] Zhang Xiaofei, Gao Xin, Chen Weiyang. Improved blind 2D-direction of arrival estimation with L-shaped array using shift invariance property[J]. Journal of Electromagnetic Waves and Applications, 2009, 23(5/6):593-606.
- [8] 陈相国,宋爱民,刘剑. 基于非圆信号波达方向估计的最大似然算法[J]. 现代雷达,2011,33(1):51-54.  
Chen Xiangguo, Song aimin, Liu Jian. Maximum likelihood algorithm for direction-of-arrival estimation of noncircular signals[J]. Modern Radar, 2011,33(1):51-54.
- [9] Zhang Xiaofei, Li Jianfeng, Xu Lingyun. Novel two-dimensional DOA estimation with L-shaped array [J]. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2011,2011(1):1-7.
- [10] 王静. 基于高阶累积量与稀疏约束的 DOA 估计方法[D]. 成都:电子科技大学, 2013.  
Wang Jing. A method of DOA estimation based on high order cumulants and restraints of sparsity[D]. Chengdu: University of Electronic Science and Technology, 2013.
- [11] Marcos S, Marsal A, Benidir M. The propagator method for source bearing estimation[J]. Signal Processing, 1995,42(2):121-138.
- [12] Picinbono B. On circularity[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994(42):3473-3482.
- [13] Lacoume J L. Complex random variables and signals [J]. Traitement du Signal, 1998(15):535-544.
- [14] Delmas J P, Abeida H. Cramer-rao bounds of DOA estimates for BPSK and QPSK modulated signals[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(1):117-126.
- [15] Zoubir A, Charg'e P, Wang Y. Non circular sources localization with ESPRIT[C]//Proc European Conference on Wireless Technology (ECWT 2003). Munich, Germany: [s. n. ], 2003:1-4.
- [16] Haardt M, Römer F. Enhancements of unitary ESPRIT for noncircular sources [C]//Proceedings of 29th IEEE International Conference on Acoustics,

- Speech, and Signal Processing. Montreal, Quebec, Canada: [s. n. ], 2004: II-101-II-104.
- [17] Abeida H, Delmas J P. MUSIC-like estimation of direction of arrival for noncircular sources[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54 (7): 2678-2690.
- [18] Chargé P, Wang Y D, Saillard J. A noncircular sources direction finding method using polynomial rooting[J]. Signal Processing, 2001, 81 (8): 1765-1770.
- [19] Steinwandt J, Roemer F, Haardt M. Performance analysis of ESPRIT-type algorithms for noncircular sources[C]//2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). [S. l. ]: IEEE, 2013:3986-3990.
- [20] 孙心宇,周建江. 非圆传播算子 DOA 估计算法[J]. 数据采集与处理, 2013, 28(3): 313-318.  
Sun Xinyu, Zhou Jianjiang. PM method for noncircular signals[J]. Journal of Data Acquisition and Processing, 2013, 28(3): 313-318.
- [21] Zhang Xiaofei, Cao Renzheng, Zhou Ming. Noncircular-PARAFAC for 2D-DOA estimation of noncircular signals in arbitrarily spaced acoustic vector-sensor array subjected to unknown locations[J]. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2013, 2013 (1): 1-10.
- [22] Huarng K, Yeh C. A unitary transformation method for angle-of-arrival estimation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1991(4): 975-977.
- [23] Haardt M, Nossek J A. Unitary ESPRIT: How to obtain increased estimation accuracy with a reduced computational burden[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1995, 43(5): 1232-1242.
- [24] 郑春弟,冯大政,周祎,等. 基于非圆信号的实值 ESPRIT 算法[J]. 电子与信息学报, 2008, 30(1): 130-133.  
Zhen Chundi, Fen Dazheng, Zhou Yi, et al. A real-value algorithm of ESPRIT via exploitation of noncircular sources property [J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2008, 30(1): 130-133.
- [25] Stoica P, Nehorai A. Performance study of conditional and unconditional direction-of-arrival estimation[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1990, 38(10): 1783-1795.



