

DOI:10.16356/j.1005-2615.2015.01.021

基于三维非结构网格的连续伴随优化方法

徐兆可 夏健 高宜胜

(南京航空航天大学航空宇航学院,南京,210016)

摘要:基于非结构网格,采用 Euler 方程、连续伴随方法以及自由形面变形技术(Free-form deformation, FFD)结合序列二次规划(Sequential quadratic programming, SQP)优化算法,开发出了三维飞行器的气动外形优化代码。应用 Fortran 90 语言,动态存储数组和指针,节省了内存。采用 Roe 形式的二阶迎风格式和 LU-SGS 隐式时间离散格式求解连续伴随方程,同时采用一种新的参数化坐标求解方法,使得 FFD 技术更加鲁棒。和有限差分方法求得的梯度进行比较,验证了连续伴随方法所求梯度的正确性,实现了 ONERA M6 机翼的减阻优化,证明本文开发的优化代码能够实现三维气动外形的减阻优化。

关键词:非结构网格;连续伴随方法;Euler 方程;Roe 格式;LU-SGS 隐式格式

中图分类号:V211.3 **文献标志码:**A **文章编号:**1005-2615(2015)01-0145-08

Continuous Adjoint Approach to Aerodynamic Optimization on 3D Unstructured Grids

Xu Zhaoke, Xia Jian, Gao Yisheng

(College of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China)

Abstract: Based on unstructured grids, codes for 3D aerodynamic shape optimization are developed using Euler equations' solution, continuous adjoint method, free-form deformation (FFD) strategy, and sequential quadratic programming (SQP) optimization method. Fortran 90 is used for the dynamic storage of arrays and pointers and for saving memory. Second-order Roe-type upwind scheme and LU-SGS scheme are used to solve the continuous adjoint equations, and a new approach to computing parametric coordinates is adopted so that FFD can be robust. The gradients of the adjoint method are compared with those of the finite difference. The designed system is successfully applied to ONERA M6 wing transonic shape optimization with the purpose of reducing drag, and the result shows that the system is reliable and efficient for reducing drag design.

Key words: unstructured grids; continuous adjoint approach; Euler equations; Roe scheme; LU-SGS implicit scheme

早期气动外形设计的主要方法是利用风洞进行实验,但实验方法的缺点是成本高和周期长。随着计算机性能和计算流体力学(Computational fluid dynamics, CFD)技术的飞速发展,结合 CFD 技术和优化理论的气动外形设计技术越来越受到重视。气动优化方法分为全局优化方法和基于梯

度的优化方法。全局优化方法如基因算法和高效全局优化(Efficient global optimization, EGO)算法等,已具有较广泛的应用^[1-2]。传统基于梯度的优化设计方法是有限差分法,但其计算量随着设计变量个数的增加而增加,从而导致该方法在设计中难以广泛应用。1988 年 Jameson 首先提出最优控

收稿日期:2014-09-23;修订日期:2014-10-21

通信作者:夏健,男,教授,博士生导师,E-mail:jxia@nuaa.edu.cn。

制的方法对跨声速的气动外形进行优化设计^[3],此方法也叫连续伴随方法。Anderson 等把连续伴随方法推广到了二维非结构网格上,并研究了网格疏密对梯度计算的影响^[4]。Baysal 等利用流动控制方程的离散格式推导伴随方程,建立了离散伴随方法^[5-6]。随后离散伴随方法在非结构网格上也得到了长足发展^[7-8]。离散伴随方法能够得到更为精确的梯度,但是方程推导相对复杂,编程实现也较为繁琐。而连续伴随方法直接从控制方程推导,思路清晰,同时可采用与控制方程类似的数值求解方法,使得连续伴随方法求解程序相对简单。对于连续伴随方法的研究,美国斯坦福大学 Francisco 等应用 C++ 语言开发出了 SU2^[9] 优化程序。

国内对于伴随优化方法的研究主要集中于结构网格。离散伴随方法方面:刘学强^[10-11]和吴文华等^[12-13]开展了离散伴随优化方法的研究,成功对翼身融合体的外形进行了优化设计;左英桃^[14-16]采用 LU-SGS 隐式时间离散求解伴随方程,实现了二维翼型和三维机翼在无粘和有粘状态下的优化。连续伴随方程方面:唐智礼^[17-19]对连续伴随方法进行了较深入研究,实现了应用 Euler 方程对翼型进行反设计和有约束的气动优化,并结合伴随方法和对策理论完成了多目标优化设计;黄勇^[20]和周铸^[21]实现了翼型在无粘和有粘状态下的优化;熊俊涛^[22]等采用了多重加速技术,完成了跨声速机翼的连续伴随优化。

当外形较为复杂时,非结构网格比结构网格更易于生成。国内关于非结构网格离散伴随方法的研究也有所发展,关键^[23]和高宜胜^[24]实现了翼型的二维离散伴随优化设计,李彬^[25-26]实现了三维机翼和翼身融合体的离散优化设计,并加入了并行和多重网格提高设计效率。但是在三维非结构网格连续伴随优化中,采用二阶迎风格式空间离散和 LU-SGS 时间离散求解连续伴随方程,目前国内还没有相关内容的文献公开发表。

本文基于非结构网格,采用 Euler 方程、连续伴随方法以及 FFD 技术结合 SQP 优化算法,开发出了三维飞行器的气动外形优化代码。本文所开发代码使用 Fortran 90 语言,动态存储数组和指针,以便节省内存。对于连续伴随方程,运用 Roe 形式的二阶迎风格式和 LU-SGS 隐式时间离散格式进行求解,LU-SGS 格式易于开发,且计算效率高、占用内存小。同时在 FFD 变形技术中采用了一种新的求解参数化坐标的方法,使得 FFD 技术更加鲁棒。本文比较了连续伴随方法和有限差分

方法求得的梯度,实现了 ONERA M6 机翼的减阻优化。

1 连续伴随方法

气动外形优化中大多数目标函数可表示为流动变量的函数沿着物面边界的积分

$$J = \int_S f(V) dS \quad (1)$$

式中: V 表示流动变量; S 表示参考面积。

当物面发生变化时,目标函数的变化由两部分组成

$$\delta J = \int_{\partial S} f(V) dS + \int_S \frac{\partial f}{\partial V} \delta V dS \quad (2)$$

$$\int_{\partial S} f(V) dS = \int_S \frac{\partial f}{\partial V} (\delta \mathbf{x} \cdot \nabla V) dS + \int_S \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \cdot \delta \mathbf{n} dS + \int_S f \delta dS \quad (3)$$

式中 $\delta \mathbf{n}$ 为边界法矢的变分。

由于本文目标函数为阻力系数最小,约束条件为升力系数保持不变。取

$$f(V) = \mathbf{d} \cdot (P \mathbf{n}_s) \quad (4)$$

$$\mathbf{d} = \begin{cases} \frac{1}{C_\infty} (\cos \alpha \cos \beta, \sin \beta, \sin \alpha \cos \beta) & \text{阻力系数 (5)} \\ \frac{1}{C_\infty} (-\sin \beta, \cos \alpha, 0) & \text{升力系数 (6)} \end{cases}$$

式中: α 为攻角; β 为侧滑角; $C_\infty = \frac{1}{2} \mathbf{V}_\infty^2 \rho_\infty S$ 。

将式(3)代入式(2)最终可得

$$\delta J = \int_S \mathbf{d} \cdot \delta P \mathbf{n}_s dS + \int_S (\mathbf{d} \cdot \nabla P) \delta S dS \quad (7)$$

考虑定常无粘三维可压缩流动控制方程

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

式中: \mathbf{F} 为对流通量向量; F_x , F_y 和 F_z 分别表示通量向量 \mathbf{F} 在 x , y 和 z 方向的分量。

为了避免计算式(7)中的 δP ,引入伴随变量 $\Psi^T = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \Psi_5)$ 。首先对 Euler 方程进行线性化,然后对线性 Euler 方程和伴随变量 Ψ 求内积,对其在整个计算域积分,分部积分可得

$$-\int_\Omega (\nabla \Psi^T) \mathbf{A} \delta \mathbf{U} d\Omega + \int_S \Psi^T (\mathbf{n}_s \mathbf{A}) \delta \mathbf{U} dS + \int_{\Gamma_\infty} \Psi^T (\mathbf{n}_\infty \mathbf{A}) \delta \mathbf{U} dS = 0 \quad (9)$$

式中:雅可比矩阵 $\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}$; \mathbf{U} 为守恒变量。

由于连续伴随方程特征值和 Euler 方程特征值符号相反,则伴随方程的入流波对应 Euler 方程

的出流波,伴随方程的出流波对应 Euler 方程的入流波,有

$$\Psi^T(n_\infty \mathbf{A})\delta \mathbf{U} = (\Psi^T \mathbf{T})\mathbf{A}(\mathbf{T}^{-1})\delta \mathbf{U} \quad (10)$$

式中: \mathbf{A} 为雅可比矩阵 \mathbf{A} 的特征 a 值构成的对角阵; \mathbf{T} 为相应右特征向量。

对于外形优化,由于来流特征变量变分 $\delta \mathbf{W} = \mathbf{T}^{-1}\delta \mathbf{U} = 0$,通过选择合适的远场边界条件,可以消除式(9)中绕远场的积分;流场特征值大于0即对应伴随变量入流波时, $\Psi|_{a>0} = 0$;流场特征值小于0即对应伴随变量出流波时,边界处伴随变量由计算域内部点外插得到。

应用 Euler 方程无穿透物面边界条件,绕物面的积分可以分解为

$$\begin{aligned} & \int_S \Psi^T(n_s \mathbf{A})\delta \mathbf{U} dS = \\ & \int_S (\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{v})(\rho \Psi_1 + \rho(u \Psi_2 + v \Psi_3 + w \Psi_4) + \\ & \rho H \Psi_5) dS + \int_S (n_x \Psi_2 + n_y \Psi_3 + n_z \Psi_4) \delta P dS \end{aligned} \quad (11)$$

把线性化的 Euler 方程物面边界条件 $\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{v} = -(\delta S \partial_n \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_S - \delta n_S \cdot \mathbf{v}_S$ 代入式(11),最终可得到

$$\begin{aligned} & \int_S \Psi^T(n_s \mathbf{A})\delta \mathbf{U} dS = - \int_S ((\partial_n \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_S) \xi + \\ & \nabla_S(\mathbf{v} \xi)) \delta S dS + \int_S (n_x \Psi_2 + n_y \Psi_3 + n_z \Psi_4) \delta P dS \end{aligned} \quad (12)$$

式中 $\xi = \rho \Psi_1 + \rho(u \Psi_2 + v \Psi_3 + w \Psi_4) + \rho H \Psi_5$ 。

将式(12)代入式(9),并用式(7)减去式(9)得到目标函数的变分形式为

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_\Omega (\nabla \Psi^T) \mathbf{A} \delta \mathbf{U} d\Omega + \\ & \int_S (\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}_S - (n_x \Psi_2 + n_y \Psi_3 + n_z \Psi_4)) \delta P dS + \\ & \int_S (\mathbf{d} \cdot \nabla P + (\partial_n \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_S) \xi + \nabla_S(\mathbf{v} \xi)) \delta S dS \end{aligned} \quad (13)$$

为消除式(13)中的 $\delta \mathbf{U}$ 和 $\delta \mathbf{P}$,令 $((\nabla \Psi^T) \mathbf{A})^T$ 和 $\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}_S - (n_x \Psi_2 + n_y \Psi_3 + n_z \Psi_4)$ 分别为零。则得到伴随方程

$$\mathbf{A}^T(\nabla \Psi) = ((\nabla \Psi^T) \mathbf{A})^T = 0 \quad (14)$$

以及物面边界条件

$$\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}_S = (n_x \Psi_2 + n_y \Psi_3 + n_z \Psi_4) \quad (15)$$

则最终目标函数变分为

$$\delta J = \int_S (\mathbf{d} \cdot \nabla P + (\partial_n \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_S) \xi + \nabla_S(\mathbf{v} \xi)) \delta S dS \quad (16)$$

由于式(16)包含有压强梯度和伴随变量,则需要先计算流场控制方程得到流动变量,然后计算伴随方程得到伴随变量,即可求得相应目标函数的几何敏感度。

2 方程求解

流动控制方程和连续伴随方程空间离散方法均采用二阶 Roe 格式,时间离散均采用 LU-SGS 格式。

2.1 流动控制方程

三维无粘可压缩流动控制方程积分形式

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega \mathbf{U} d\Omega + \int_S \mathbf{F} dS = 0 \quad (17)$$

式中: \mathbf{U} 为守恒变量; \mathbf{F} 为对流量。

空间离散采用 Roe 格式为

$$\mathbf{F}_{1/2}^{\text{Roe}} = \frac{1}{2} [\mathbf{F}(\mathbf{U}_R) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_L) - |\mathbf{A}_{\text{Roe}}|_{1/2} (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)] \quad (18)$$

式中: $\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R$ 为控制体边界两侧的守恒变量,可通过线性重构进行求解,采用 Venkatakrishnan 限制器。

时间离散采用 LU-SGS 方法,非结构网格需要通过一定的网格排序方法来确定上下三角矩阵。网格排序可以通过分层和染色两步来进行,具体过程见文献[27]。LU-SGS 方法需要通过前扫和后扫两个过程来实现。

2.2 伴随方程

2.2.1 空间离散

本文采用有限体积方法求解连续伴随方程,伴随方程的积分形式为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega \Psi d\Omega - (\mathbf{A}_x^T \int_\Omega \frac{\partial \Psi}{\partial x} d\Omega + \mathbf{A}_y^T \int_\Omega \frac{\partial \Psi}{\partial y} d\Omega + \\ & \mathbf{A}_z^T \int_\Omega \frac{\partial \Psi}{\partial z} d\Omega) = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

式中 $\mathbf{A}_x, \mathbf{A}_y, \mathbf{A}_z$ 分别为雅可比矩阵 \mathbf{A} 在 x, y 和 z 方向的分量。

应用高斯定理,式(19)变换为

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega \Psi d\Omega - \int_S (\mathbf{A}^T \Psi) dS = 0 \quad (20)$$

对于某一控制体 i ,将伴随方程离散后得到

$$\Omega_i \frac{\Delta \Psi_i}{\Delta t} = \sum_{j \in N_i} \mathbf{Y}_{ij} n_{ij} \Delta S_{ij} = \mathbf{R}_i \quad (21)$$

式中: Ω_i 表示第 i 个控制体的体积; N_i 表示 i 点的相邻点的集合; \mathbf{Y}_{ij} 表示伴随变量对应的通量; \mathbf{R}_i 定义为控制体 i 的残值。

本文伴随方程的空间离散采用 Roe 形式的离散格式

$$\begin{aligned} Y_{ij} &= \frac{1}{2} [A_i^T(\Psi_i + \Psi_j) + (\frac{\partial \Theta}{\partial U_L})^T(\Psi_R - \Psi_L)] \\ Y_{ji} &= \frac{1}{2} [A_j^T(\Psi_i + \Psi_j) + (\frac{\partial \Theta}{\partial U_R})^T(\Psi_R - \Psi_L)] \end{aligned} \quad (22)$$

式中 $\Theta = |A_{Roe}|(U_R - U_L)$, 本文采用的是 Θ 的近似线性化

$$\frac{\partial \Theta}{\partial U_R} \approx |A_{Roe}| \quad (23)$$

在很稀疏的网格上, 近似线性化计算得到的梯度和有限差分得到的梯度相差较大, 但随着网格的加密, 该误差逐渐减小。通过下文连续伴随方法和有限差分方法所计算的梯度对比, 以及 ONERA M6 机翼减阻优化的实现, 说明本文的近似线性化是可行的。

左右状态伴随变量 Ψ_L 和 Ψ_R 表达式为

$$\begin{aligned} \Psi_L &= \Psi_i + \frac{1}{2} \lambda_i^* (\nabla \Psi_i \cdot r_{ij}) \\ \Psi_R &= \Psi_j - \frac{1}{2} \lambda_j^* (\nabla \Psi_j \cdot r_{ij}) \end{aligned} \quad (24)$$

式中: λ^* 表示限制器; $\nabla \Psi$ 表示相应控制体伴随变量的梯度。

本文伴随变量梯度的计算采用格林-高斯法

$$\nabla \Psi_i \approx \frac{1}{\Omega} \sum_{j \in N_i} \frac{1}{2} (\Psi_i + \Psi_j) n_{ij} \Delta S_{ij} \quad (25)$$

限制器采用 Venkatakrishnan 限制器, 其表达式为

$$\lambda_i^* = \begin{cases} \frac{1}{\Delta_2} \left[\frac{(\Delta_{1,\max}^2 + \epsilon^2) \Delta_2 + 2\Delta_2^2 \Delta_{1,\max}}{\Delta_{1,\max}^2 + 2\Delta_2^2 + \Delta_{1,\max} \Delta_2 + \epsilon^2} \right] & \Delta_2 > 0 \\ \frac{1}{\Delta_2} \left[\frac{(\Delta_{1,\min}^2 + \epsilon^2) \Delta_2 + 2\Delta_2^2 \Delta_{1,\min}}{\Delta_{1,\min}^2 + 2\Delta_2^2 + \Delta_{1,\min} \Delta_2 + \epsilon^2} \right] & \Delta_2 < 0 \\ 1 & \Delta_2 = 0 \end{cases} \quad (26)$$

$$\Delta_{1,\max} = \max(\Psi_i, \max_j \Psi_j) - \Psi_j$$

$$\Delta_{1,\min} = \min(\Psi_i, \min_j \Psi_j) - \Psi_j$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{2} (\nabla \Psi_i \cdot r_{ij})$$

式中参数 $\epsilon^2 = (K\Delta h)^3$, 取 $K=5.0$, Δh 取值为控制体体积的立方根。

2.2.2 时间离散

本文开发了连续伴随方程的 LU-SGS 隐式时间离散格式。在本文的算例中, 连续伴随方程求解中 CFL 数可取为 1.0×10^6 , 大大提高了连续伴随方程的求解效率。将伴随方程离散为

$$\Omega_i \frac{\Delta \Psi_i^n}{\Delta t_i} = R_i^{n+1} \quad (27)$$

式中 $\Delta \Psi^n = \Delta \Psi^{n+1} - \Psi^n$ 。

对式(27)的右端项泰勒展开并整理得

$$\left(\frac{\Omega}{\Delta t} I - \frac{\partial R}{\partial \Psi} \right) \Delta \Psi_i^n = R^n \quad (28)$$

本文采用 Steger-Warming 通量向量分裂格式来处理式(28)中伴随方程的雅可比矩阵 $\frac{\partial R}{\partial \Psi}$ 。由于伴随方程雅可比矩阵只与流场解相关, 而和伴随变量无关, 故有

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \Psi} \Delta \Psi_i^n &= \sum_{j \in N_i} [(A^+ \Delta S)_{ij} \Delta \Psi_{L,ij}^n + \\ & (A^- \Delta S)_{ij} \Delta \Psi_{R,ij}^n] \end{aligned} \quad (29)$$

LU-SGS 中将隐式算子分解为 3 部分

$$(D + L)D^{-1}(D + U)\Delta \Psi^n = R^n \quad (30)$$

最终整理得到非结构网格下连续伴随方程的 LU-SGS 方法为:

向前扫

$$\Delta \Psi^* = D^{-1} \left(R - \frac{1}{2} \sum_{j \in L(i)} \Delta S (\tilde{A} \Delta \Psi^* - \gamma_{ij} \Delta \Psi^*) \right) \quad (31)$$

向后扫

$$\Delta \Psi = \Delta \Psi^* - \frac{1}{2} D^{-1} \left(\sum_{j \in U(i)} \Delta S (\tilde{A} \Delta \Psi - \gamma_{ij} \Delta \Psi) \right) \quad (32)$$

式中谱半径 γ 定义为 $\gamma_{ij} = |\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{n}_{ij}| + c_{ij}$ 。

由于伴随方程的雅可比矩阵 $\tilde{A} = -A^T$ 仅与流动变量有关, 所以在其 LU-SGS 求解中, 可直接采用流场中得到的雅可比矩阵进行计算。对于伴随方程的 LU-SGS 格式, 非结构网格同样需要通过一定的网格排序方法来确定上下三角矩阵。

3 设计变量及自由形面变形技术

本文采用自由形面变形技术 (Free-form deformation, FFD) 来实现飞行器外形的变化。调整 FFD 控制点的坐标, 通过映射关系获得变形后的物面网格点, 再应用动网格技术得到新的空间网格。采用贝塞尔控制体对飞行器整体或局部进行参数化

$$X(u, v, w) = \sum_{i,j,k=0}^{l,m,n} P_{i,j,k} B_i^l(u) B_j^m(v) B_k^n(w) \quad (33)$$

式中: X 为物面点的笛卡尔坐标, u, v 和 w 表示物面点的参数化坐标且 $u, v, w \in [0, 1]$; B^i 为 i 阶 Bernstein 多项式; $P_{i,j,k}$ 为控制点。

通过式(33)可以求得物面网格点的参数化坐标, 在整个变形过程中参数化坐标保持不变。本文在计算物面点的参数化坐标时, 采用了一种新的等参逆变换迭代解法^[28], 不仅克服了三维问题中线

性迭代格式因初值不同而不能保证收敛的缺陷,而且也避免了求解高次方程,只需进行简单的迭代就可以方便求出参数坐标。

物面变形后,采用弹簧动网格方法得到余下网格点

$$\left(\sum_{j \in N_i} k_{ij}\right) X_i = \sum_{j \in N_i} (k_{ij} X_j) \quad (34)$$

式中: $k_{ij} = \frac{1}{l_{ij}}$ 表示相应边的刚度系数, l_{ij} 表示相应边的长度; X_i 表示*i*点未知的位移; X_j 表示已知的*j*点的位移; N_i 表示*i*点所有的相邻点。该方程组用雅可比迭代求解,即可得到所有点的新坐标。

本文 FFD 控制体共有 60 个控制点,由于无粘情况下减阻即为削弱激波,且激波处于上翼面,因此选用控制体上表面的 25 个控制点坐标为设计变量。图 1 为初始的 FFD 控制体和 ONERA M6 机翼网格,图 2 为优化后的 FFD 控制体和机翼网格。

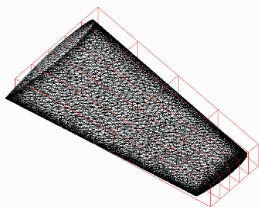


图 1 初始 FFD 控制点示意图

Fig. 1 Original sketch of FFD control points

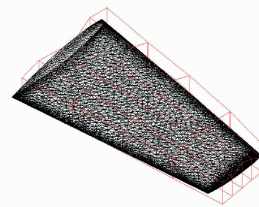


图 2 最终 FFD 控制点示意图

Fig. 2 New sketch of FFD control points

4 梯度比较与计算效率测试

本文选取其中 5 个设计变量的梯度进行比较,1~5 分别为 FFD 控制体上表面从翼根到翼梢的控制点。比较结果如表 1,可见本文伴随方法所得的梯度和有限差分方法吻合较好,可以用于优化计算中。

每次优化迭代中,连续伴随方法仅需要分别对流动控制方程以及目标函数和约束函数的伴随方程各计算一次,而有限差分方法需要分别求得初始和各设计变量扰动后的流动状态,才能得到所有关于设计变量的梯度。表 2 对连续伴随方法和有限差分方法梯度计算效率进行定量对比分析。本测试计算在 HP-Z620(2.8 Hz)工作站上进行,各方

程均计算 3 000 步,网格及计算状态见下文算例。由表 2 可知单次优化迭代中,由于连续伴随方法梯度计算和设计变量数目无关,且每次迭代相当于 3 倍流场的计算量,计算效率远高于有限差分方法。

表 1 阻力敏感导数比较

控制点	有限差分法	连续伴随法	$\Delta/\%$
1	3.450 2×10 ⁻³	3.498 2×10 ⁻³	1.39
2	6.648 5×10 ⁻³	6.350 1×10 ⁻³	-4.49
3	4.141 4×10 ⁻³	4.209 5×10 ⁻³	1.64
4	4.483 8×10 ⁻³	4.225 8×10 ⁻³	-5.75
5	-9.859 3×10 ⁻⁴	-9.814 1×10 ⁻⁴	-0.46

表 2 计算效率定量测试

方法	流动控制方程	伴随方程 (目标函数)	伴随方程 (约束函数)	连续伴随法	有限差分法
时间/s	6 155	6 314	6 465	6 155+ 6 314+ 6 465	≈26 * 6 155
时间比	1.00	1.03	1.05	3.08	≈26

注:时间比是与计算流动控制方程所需时间的比值。

5 计算结果

优化方法采用序列二次规划(Sequential quadratic programming, SQP)算法, SQP 方法可用于计算无约束和有约束、线性和非线性优化问题。计算状态是来流马赫数 $Ma = 0.839 5$, 攻角 $\alpha = 3.06^\circ$, 无侧滑。本文网格点 31 万个,通过求解 Euler 方程得到升力和阻力系数分别为 $C_L = 0.290 3$, $C_D = 0.014 2$ 。图 3 为 ONERA M6 机翼压强云图。

机翼的无约束减阻优化中,升力系数会随着阻力系数同时降低,可见无约束的减阻优化并不能应用于工程实际,因此减阻优化问题常常需要加入保持升力系数不变的约束条件。本文 ONERA M6 机翼的减阻优化问题,目标函数是阻力系数最小,约束条件是保持升力系数不变。图 4 表示优化后最终机翼的压强云图,从该图可以看出最初的激波已经弱化。图 5 为优化过程中升力系数和阻力系数变化曲线,阻力系数由 0.014 17 下降为 0.010 59;升力系数最终为 0.29,接近于最初的升力系数 0.290 3。由图 5 可知,只需 20 次优化迭代升阻力系数基本达到收敛,可见本文的优化方法具有较高的计算效率。表 3 给出了优化前后升力阻力和升阻比的变化大小。图 6 为优化前后机翼展向 30%和 70%处截面形状对比,30%处截面略有变化,而 70%处截面相当于减小了当地攻角,从而

引起阻力的减小,机翼整体相当于发生了扭转。图 7 是相应截面的压强系数分布,可看出激波已经被极大削弱。

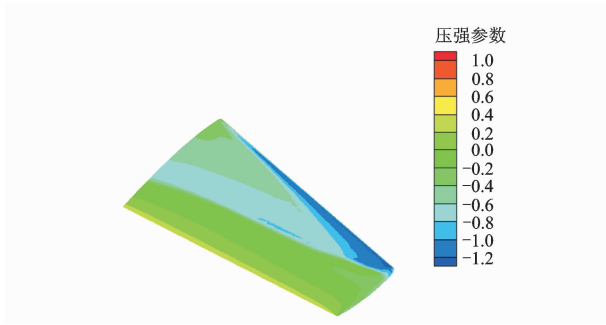


图 3 ONERA M6 机翼压强云图

Fig. 3 Pressure counters of ONERA M6 wing

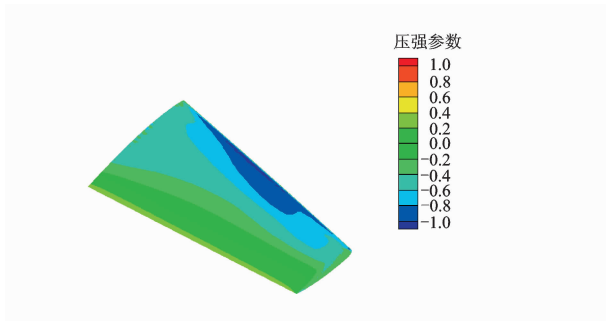


图 4 优化后机翼压强云图

Fig. 4 Pressure counters of final wing

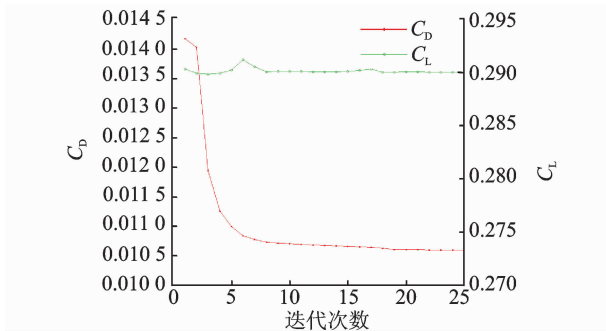


图 5 优化过程中阻力和升力系数变化曲线

Fig. 5 Convergence curves of C_L and C_D

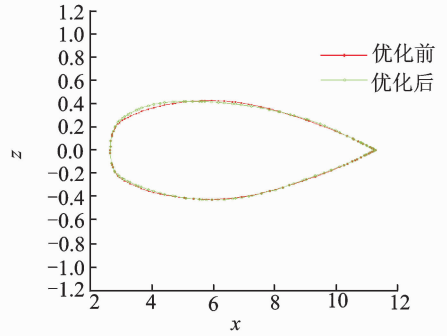
表 3 优化结果

Tab. 3 Optimization results

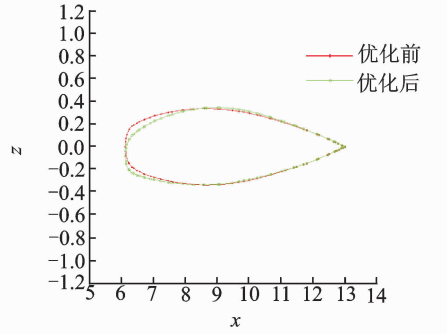
参数	优化前	优化后	$\Delta / \%$
C_L	0.290 3	0.290 0	-0.10
C_D	0.014 17	0.010 59	-25.26
K	20.49	27.38	33.63

6 结束语

本文开发了基于非结构网格,采用连续伴随方法,结合三维 Euler 方程和 FFD 网格变形技术的基于梯度的优化方法,研究了连续伴随方程的推导



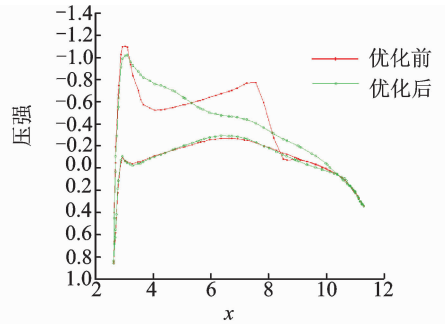
(a) $\eta=30\%$



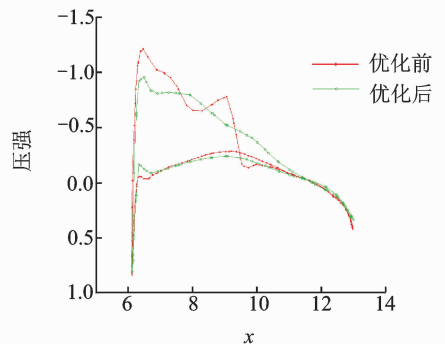
(b) $\eta=70\%$

图 6 优化前后不同截面几何形状比较

Fig. 6 Comparison of section shapes of original and final wings



(a) $\eta=30\%$



(b) $\eta=70\%$

图 7 优化前后不同截面压强分布比较

Fig. 7 Comparison of section pressure distributions of original and final wings

过程和离散求解方法,并采用二阶 Roe 格式和 LU-SGS 离散格式求解连续伴随方程。将本文连续伴随方法计算梯度和差分方法的梯度进行比较,

验证本方法求解梯度的正确性。最后通过对 ONERA M6 机翼的减阻优化,表明了本文开发的优化代码能够很好地实现对三维外形的优化减阻的目标。下一步将实现该套代码的并行化,以提高计算效率,同时研究 N-S 连续伴随方程的求解。

参考文献:

- [1] 汪光文,周正贵,胡骏. 多层设计参数的叶型气动优化[J]. 南京航空航天大学学报,2009,41(1):11-15.
Wang Guangwen, Zhou Zhenggui, Hu Jun. Aerodynamic shape optimization using multilevel parameterization algorithm[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2009,41(1):11-15.
- [2] 邓枫,覃宁,伍贻兆. 基于并行 EGO 算法的激波控制鼓包减阻优化[J]. 南京航空航天大学学报,2013,45(4):485-490.
Deng Feng, Qin Ning, Wu Yizhao. Shock control bump optimization for drag reduction using parallel efficient global optimization algorithm[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2013,45(4):485-490.
- [3] Jameson A. Aerodynamic design via control theory [J]. Journal of Scientific Computing, 1988, 3: 233-260.
- [4] Anderson W K, Venkatakrishnan V. Aerodynamic design optimization on unstructured grids with a continuous adjoint formulation[R]. AIAA-1997-0643, 1997.
- [5] Baysal O, Eleshaky M E. Aerodynamic sensitivity analysis methods for the compressible Euler equations[J]. Journal of Fluids Engineering, 1991, 113(4): 681-688.
- [6] Burgreen G W, Baysal O. Three-dimensional aerodynamic shape optimization of wings using sensitivity analysis[R]. AIAA -1994-0094, 1994.
- [7] Mavriplis D J. Formulation and multigrid solution of the discrete adjoint for optimization problems on unstructured meshes[R]. AIAA-2005-319, 2005.
- [8] Mavriplis D J. A discrete adjoint-based approach for optimization problems on three-dimensional unstructured meshes[R]. AIAA-2006-50, 2006.
- [9] Palacios F, Colonno M R, Aranake A C, et al. Stanford University Unstructured (SU2): An open-source integrated computational environment for multi-physics simulation and design [R]. AIAA-2013-0287, 2013.
- [10] 刘学强,覃宁. 基于伴随算子的跨音速机翼优化设计[C]//大型客机与高精度计算方法学术研讨会. 上海:上海飞机设计研究院,2010:256-265.
- Liu Xueqiang, Qin Ning. Design of transonic wing based on adjoint method[C]//Computational Technologies for Commercial Aircraft and High Resolution. Shanghai: Shanghai Aircraft Design and Research Institute, 2010:256-265.
- [11] 杨洋,欧阳绍修,刘学强,等. 基于伴随算子的跨声速机翼气动优化设计[J]. 南京航空航天大学学报,2013,45(3):347-352.
Yang Yang, Ouyang Shaoxiu, Liu Xueqiang, et al. Aerodynamic optimization of transonic wing using discrete adjoint operator[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2013,45(3): 347-352.
- [12] 吴文华,范召林,覃宁. 基于伴随算子的大飞机布局多参数高精度优化[C]//大型客机与高精度计算方法学术研讨会. 上海:上海飞机设计研究院,2010:309-317.
Wu Wenhua, Fan Zhaolin, Qin Ning. Adjoint operator method based aerodynamics optimization of airliner[C]//Computational Technologies for Commercial Aircraft and High Resolution. Shanghai: Shanghai Aircraft Design and Research Institute, 2010: 309-317.
- [13] 马晓永,范召林,吴文华,等. 基于 NURBS 方法的机翼气动外形优化[J]. 航空学报,2011, 32(9): 1616-1621.
Ma Xiaoyong, Fan Zhaolin, Wu Wenhua, et al. Aerodynamic shape optimization for wing based on NURBS[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2011, 32(9):1616-1621.
- [14] 左英桃,高正红,夏露. 基于 Euler 方程和离散共轭方法的气动外形优化设计[J]. 应用力学学报,2009,26(1):22-26.
Zuo Yingtao, Gao Zhenghong, Xia Lu. Aerodynamic design based on Euler equations and discrete adjoint approach[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2009, 26(1):22-26.
- [15] 左英桃,高正红,詹浩. 基于 N-S 方程和离散共轭方法的气动设计方法研究[J]. 空气动力学学报,2009, 27(1):67-72.
Zuo Yingtao, Gao Zhenghong, Zhan Hao. Aerodynamic design method based on N-S equations and discrete adjoint approach[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2009, 27(1):67-72.
- [16] 左英桃,高正红,何俊. 基于 N-S 方程和离散共轭方法的气动外形设计[J]. 空气动力学学报,2010,28(5):509-512.
Zuo Yingtao, Gao Zhenghong, He Jun. Aerodynamic design method based on N-S equations and discrete

- adjoint approach [J]. *Acta Aerodynamica Sinica*, 2010, 28(5):509-512.
- [17] 唐智礼, 黄明恪. 基于控制理论的 Euler 方程翼型减阻优化设计[J]. *空气动力学学报*, 2001, 19(3):262-270.
Tang Zhili, Huang Mingke. Control theory based airfoil design using Euler equations[J]. *Acta Aerodynamica Sinica*, 2001, 19(3):262-270.
- [18] 唐智礼. 约束最优控制理论及其在气动优化中的应用[J]. *力学学报*, 2007, 39(2):273-277.
Tang Zhili. Constrained optimum control theory : Application to aerodynamic design[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2007, 39(2):273-277.
- [19] Tang Zhili, Dong Jun. Couplings in multi-criterion aerodynamic optimization problems using adjoint methods and game strategies[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2009, 22(1):1-8.
- [20] 黄勇, 陈作斌, 刘刚. 基于伴随方程的翼型数值优化设计方法研究[J]. *空气动力学学报*, 1999, 17(4):413-433.
Huang Yong, Chen Zuobin, Liu Gang. An investigation of aerodynamic optimization design for airfoil based on adjoint formulation[J]. *Acta Aerodynamica Sinica*, 1999, 17(4):413-433.
- [21] 周铸, 陈作斌. 基于 N-S 方程的翼型气动优化设计[J]. *空气动力学学报*, 2002, 20(2):141-149.
Zhou Zhu, Chen Zuobin. Aerodynamic design method based on N-S equations and discrete adjoint approach[J]. *Acta Aerodynamica Sinica*, 2002, 20(2):141-149.
- [22] 熊俊涛, 乔志德, 杨旭东, 等. 基于黏性伴随方法的跨声速机翼气动优化设计[J]. *航空学报*, 2007, 28(2):281-285.
Xiong Juntao, Qiao Zhide, Yang Xudong, et al. Optimum aerodynamic design of transonic wing based on viscous adjoint method[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2007, 28(2):281-285.
- [23] 关键. 基于伴随方程的二维翼型气动外形优化设计[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2011.
Guan Jian. Aerodynamic shape optimization for 2D airfoil based on adjoint equations[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2011.
- [24] 高宜生, 伍贻兆, 夏健. 基于非结构网格离散型伴随方法的翼型优化[J]. *空气动力学学报*, 2013, 31(2):244-265.
Gao Yisheng, Wu Yizhao, Xia Jian. A discrete adjoint-based approach for airfoil optimization on unstructured meshes [J]. *Acta Aerodynamica Sinica*, 2014, 35(3):674-686.
- [25] 李彬, 邓有奇, 唐静, 等. 基于三维非结构混合网格的离散伴随优化方法[J]. *航空学报*, 2014, 35(3):674-686.
Li Bin, Deng Youqi, Tang Jing, et al. Discrete adjoint method for 3D unstructured grid [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2014, 35(3):674-686.
- [26] 李彬, 唐静, 邓有奇, 等. 并行的多重网格方法在离散伴随优化中的应用[J]. *航空学报*, 2014, 35(8):2091-2101.
Li Bin, Tang Jing, Deng Youqi, et al. A parallel multigrid algorithm for discrete adjoint method [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2014, 35(8):2091-2101.
- [27] Sharov D, Nakahashi K. Reordering of 3-D hybrid unstructured grids for vectorized LU-SGS navier-stokes calculations[R]. AIAA-1997-2102, 1997.
- [28] 李春光, 郑宏, 葛修, 等. 六面体单元等参逆变换的一种迭代解法[J]. *岩土力学*, 2004, 25(7):1050-1052.
Li Chunguang, Zheng Hong, Ge Xiu, et al. An iterative algorithm of inverse isoparametric mapping for hexahedral elements [J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2004, 25(7):1050-1052.

