

DOI:10.16356/j.1005-2615.2015.01.014

## 预防性维修下主部件具有优先权的 冷贮备系统的最优更换策略

吴清太 周春俊 陈朝霞

(南京农业大学理学院,南京,210095)

**摘要:**针对一类具有预防维修的冷贮备可修系统,研究了一个基于主部件的预防维修时间间隔  $T$  和失效次数  $N$  的二元维修策略问题。假设主要部件同时具有优先使用权和优先修理权,主部件每隔一段时间  $T$  进行一次预防性修理,预防修理是修复如新的,而主部件经过失效修理后一序列的相继工作时间和失效后的相继修理时间分别构成两个扩展的泊松过程。从属部件能修复如新,附属部件的工作时间和修理时间均服从指数分布。利用更新报酬理论,得出了该模型在系统长期运行下单位时间内平均损失的具体表达式,并对该模型进行了数值模拟。

**关键词:**冷贮备系统;优先权;扩展泊松过程;更换策略

中图分类号:O211

文献标志码:A

文章编号:1005-2615(2015)01-0096-08

## Repair-Replacement Policy Optimization of Cold Standby System with Priority and Preventive Repair for Main Component

Wu Qingtai, Zhou Chunjun, Chen Zhaoxia

(College of Science, Nanjing Agricultural University, Nanjing, 210095, China)

**Abstract:** A cold standby repairable system with preventive repair is studied. The system consists of two dissimilar components. Component 1 is the main component with use and repair priorities, while component 2 is the supplementary component. Assuming the failure repair of the main component follows an extended Poisson process, preventive repair for the main component is performed every time interval  $T$  and is "as good as new". The successive working time and the repair time of the main component after failure form two extended Poisson processes. While the repair for component 2 is also "as good as new". The working time and the repair time of component 2 are both exponentially distributed. By the renewal reward theory, the explicit expression of the expected cost rate is derived. Finally, an example is given to illustrate the theoretical results for the proposed model.

**Key words:** cold standby systems; priority; extended Poisson processes; replacement policies

对于一些风险级别很高的系统,如电力生产系统、电力输送系统、民航飞机、航天器控制、医疗设备、武器装备、核能和核子系统,避免它们在运行操作过程中发生故障显然非常重要,因为因系统故

障所造成的危害和损失将是巨大的,有时甚至是难以挽回的。通常,对这些系统,相关工作人员会配置一些备用的部件,在系统的主要部件发生故障时,启用这些备用部件,以保证系统的正常运转,增

**基金项目:**国家自然科学基金(71173109)资助项目;中央高校基本科研业务费专项资金(KYZ201424)资助项目;南京农业大学理学院教师能力提升计划(201404)资助项目。

**收稿日期:**2013-04-15;**修订日期:**2014-10-08

**通信作者:**陈朝霞,女,副教授,E-mail:chenzhaoxia@njau.edu.cn。

强系统的抗风险能力,降低危害并减少损失。一般将备用部件在不工作时的状态称为贮备状态,称这样的系统为贮备系统。贮备系统的作用是为了保证系统在发生紧急事件时仍然能够正常工作,以减少因停工所带来的重大损失,即为了提高系统的可靠度或可用度,提高系统的经济效益,贮备冗余常作为一种有效的设计技术用于许多领域。贮备系统分为冷贮备系统和温贮备系统:冷贮备系统是指贮备部件在贮备期间不发生失效;温贮备系统是指贮备部件在贮备期内可能会因为老化问题或受环境影响而失效。

在可修系统的研究中,目前大多数文献考虑的系统都是假定部件故障后能够修复如新,修理规则是先失效先修理,在这些假设下,得到了该类系统的一些可靠性指标和这类系统的维修替换策略<sup>[1-4]</sup>。此外,考虑到若要部件具有更高的可靠性或可用度,则相应部件的成本就会更高,为了充分地考虑系统的可靠性和可用度与系统的经济效益,人们在采用在贮备可修系统时,通常采用可靠性高的部件作为主部件,而可靠性略低的部件作为从属部件。主部件具有优先使用权或修理权的维修模型也已经被广泛研究。例如,Nakagawa 和 Osa-ki<sup>[5]</sup>假设具有优先权的部件的工作寿命和修理时间为一般分布,而不具有优先权的部件的工作寿命和修理时间为指数分布,且部件的修理是完美的。在这些假定下,利用马尔科夫更新过程理论,他们得到了系统的一些重要的可靠性指标。在实践中,人们发现这类假设通常与实际情况不相符合。事实上,系统由于自身的磨损或老化,使得系统的工作时间在每次故障修理后会变得越来越短,而修理时间则会变得越来越长。出于经济效益的考虑,人们最终会在系统故障达到一定次数时对系统进行更新。Barlow 和 Hunter<sup>[6]</sup>首先提出了最小维修模型,在小修模型中,系统失效经修理后不改变系统的年龄。其后,Barlow 和 Proschan<sup>[7]</sup>引入了不完美维修模型,他们假设修理工以概率  $p$  对系统进行完美维修,以概率  $1-p$  对系统进行最小维修。对于退化可修系统,假设部件经修理后相继的工作时间随机单调递减,而相应的相继修理时间随机单调递增更为合理,因此,Lam Yeh<sup>[8-9]</sup>首次引入了几何过程修理模型来描绘退化可修系统。许多学者利用几何过程对可修系统的更换策略进行了研究,如,贾积身等针对两个相同部件组成的冷贮备可修系统,研究了基于部件 1 的失效次数和部件 1 的总使用时间  $T$  的二维更换策略<sup>[10]</sup>。考虑到几何过程不能描绘系统的失效率曲线为浴盆曲线这一特点,吴少敏等<sup>[11]</sup>提出了一类新的随机过程——广义泊

松过程,并得出了在这类过程下的一些可靠性指标。吴清太<sup>[12]</sup>研究了由外部原因,如冲击,和内部原因引起的两不同部件的冷贮备可修系统的可靠性问题,在外部的冲击流为泊松流,部件的内部寿命和修理时间形成扩展的泊松过程的假定下,给出了该系统的系统可靠度、系统首次故障前平均时间、系统稳态可用度和系统稳态故障频度等可靠性指标,并研究了基于部件 1 的系统最优更换策略  $(T, N)^*$ ,其中  $T$  为部件的总使用时间, $N$  为部件 1 的失效次数。

在以往研究可修系统的过程中,通常都只是考虑故障发生后怎么去修理,即对系统故障进行事后维修。但在实践中,完全实行事后维修,有时又难以保证系统安全性和可靠性。因此,为了减少系统的运行成本,提高系统的可靠性或可用度,很多学者提出在系统故障期之前对设备进行预防维护,即采取预防性维修策略,以降低设备故障对生产的影响。预防性维修是根据设备故障维修数据和零部件磨损规律,在设备仍能正常工作的情况下,采取的使设备保持特定状态的所有活动,是防止设备故障发生的有效手段。预防性维修的目的是通过避免磨损、腐蚀、疲劳和其他一些现象所造成的影响而增加系统的可靠度<sup>[13]</sup>。预防性维修可以及早发现和排除设备故障隐患,减少故障和事故,减少系统损失,提高生产效益。王冠军等<sup>[14]</sup>对带有预防性维修的冷贮备可修系统模型提出了一个二元策略维修模型,通过推导,得出了系统经长期运行后平均损失的具体表达式。吴少敏<sup>[15]</sup>通过对比现有的各类预防性模型,完整地综述了这一维修策略。

本文研究了一个主部件具有优先使用权和优先修理权的冷贮备可修系统,在长期运行下单位时间内的平均成本最小的情况下,关于主部件的预防维修时间间隔  $T$  和失效次数  $N$  的二元维修的最优策略  $(T, N)$  问题。在假设主部件失效修理后一序列的相继工作时间和失效后的相继修理时间分别构成两个扩展的泊松过程,利用更新报酬理论,得出了该模型在系统长期运行下单位时间内平均损失的具体表达式,并对该模型进行了数值模拟。

## 1 模型假定

为方便引用,首先给出文献<sup>[11]</sup>提出的广义泊松过程,定义如下:

**定义** 对于非负独立随机变量序列  $\xi_n, n=1, 2, \dots$ ,如果对任意的  $\alpha+\beta=1, \alpha, \beta \geq 0, \alpha \geq 1$  和  $0 < b \leq 1, \xi_n$  的分布函数为  $G((\alpha a^{n-1} + \beta b^{n-1})t)$ ,且  $G(t)$  是一个指数分布函数,若令  $S_0=0, S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ ,对

$\forall t \geq 0$ , 记  $N(t) = \sup\{n: S_n \leq t\}$ , 则  $\{N(t), t \geq 0\}$  是一个计数过程, 则称  $\{\zeta_n, n \geq 1\}$  是一个广义的泊松过程, 其中  $\alpha, \beta, a$  和  $b$  为这个过程的参数。

由定义可知:

(1) 当  $a=b=1$ , 广义的泊松过程就是时齐泊松过程;

(2) 当  $\alpha a^{n-1} \neq 0$  且  $\beta b^{n-1} = 0$  (或  $\alpha a^{n-1} = 0$  且  $\beta b^{n-1} \neq 0$ ),  $\{\zeta_n, n \geq 1\}$  形成一个几何过程;

(3) 当  $\alpha a^{n-1} \neq 0$  且  $b=1$ , 该过程能模拟浴盆型曲线中早期失效到偶然失效期的故障模式;

(4) 当  $a=1, b < 1$  且  $\beta b^{n-1} \neq 1$ , 该过程能模拟浴盆型曲线中偶然失效期到磨损失效期的故障模式;

(5) 若  $\alpha a^{n-1} \neq 0, a > 1, 0 < b < 1$  且  $\beta b^{n-1} \neq 0$ , 该过程能模拟故障模式更为复杂的系统;

(6) 若  $\xi_1$  的故障率强度为  $\lambda$ , 则  $\zeta_n$  的故障率强度为  $h_n = (\alpha a^{n-1} + \beta b^{n-1})\lambda$ , 进一步, 若  $E(\zeta_1) = \lambda^{-1}$ , 则  $E(\zeta_n) = ((\alpha a^{n-1} + \beta b^{n-1})\lambda)^{-1}$ 。

假设本文研究的是在预防维修下具有优先权的冷贮备可修系统, 关于这个系统作如下的假定:

**假设 1** 系统由两个不同型部件和一个修理工组成。  $t=0$  时刻, 系统的两个部件是新的, 主部件(部件 1)工作, 从属部件(部件 2)处于冷贮备状态。

**假设 2** 假设主部件(部件 1)在修理后不能修复如新, 对该部件进行维修时有两种方式: 预防性维修(部件故障前的维修)和事后维修(部件故障后的维修), 且主部件(部件 1)的一系列工作时间和相继的修理时间均构成广义的泊松过程; 从属部件(部件 2)能够修复如新, 对它的故障进行维修时只有事后维修一种方式, 且部件 2 的工作时间和修理时间均服从指数分布。

**假设 3** 假设主部件具有优先使用权, 即一旦主部件在进行完预防性维修或事后维修后, 就立即转入工作状态, 不论此时部件 2 是否工作; 同时, 还假定主部件具有优先修理权, 即一旦主部件失效或到了预防维修时间, 就立即对主部件进行修理或预防维修, 不论此时部件 2 是否处于修理状态。

**假设 4** 将部件  $i$  从第  $(n-1)$  次事后维修结束到部件  $i$  第  $n$  次事后维修结束这段时间区间称为部件  $i$  的第  $n$  个周期, 其中  $i=1, 2, n=1, 2, \dots$ , 并假设在每个周期内, 每隔时间间隔  $T$  对主部件进行一次预防性维修。

**假设 5** 记  $X_i^{(n)}$  为主部件在第  $n$  个周期内的第  $i$  次工作的时间;  $Y_n$  为主部件在第  $n$  个周期内进行事后维修的时间;  $Z_i^{(n)}$  表示主部件在第  $n$  个周期

内进行第  $i$  次预防性维修的时间;  $\xi_i^{(n)}$  表示部件 2 在第  $n$  个周期内的第  $i$  次工作的时间;  $\eta_i^{(n)}$  表示部件 2 在第  $n$  个周期内进行第  $i$  次事后维修的时间;  $K_n$  表示主部件在第  $n$  个周期内进行预防性维修的次数。并假设在同一个周期内,  $\{X_i^{(n)}, i=1, 2, \dots\}$  和  $\{Z_i^{(n)}, i=1, 2, \dots\}$  分别为独立同分布的随机变量。用  $G_n^{(1)}(t), F_n^{(1)}(t), H_n(t), G_n^{(2)}(t)$  和  $F_n^{(2)}(t)$  分别表示  $X_i^{(n)}, Y_n, Z_i^{(n)}, \xi_i^{(n)}$  和  $\eta_i^{(n)}$  的分布函数, 这些分布函数分别表示如下

$$G_n^{(1)}(t) = G((\alpha_1 a_1^{n-1} + \beta_1 b_1^{n-1})t) = 1 - \exp(-(\alpha_1 a_1^{n-1} + \beta_1 b_1^{n-1})\lambda_1 t) \quad (1)$$

$$F_n^{(1)}(t) = F((\alpha_2 a_2^{n-1} + \beta_2 b_2^{n-1})t) = 1 - \exp(-(\alpha_2 a_2^{n-1} + \beta_2 b_2^{n-1})\lambda_2 t) \quad (2)$$

$$H_n(t) = H((\alpha_3 a_3^{n-1} + \beta_3 b_3^{n-1})t) = 1 - \exp(-(\alpha_3 a_3^{n-1} + \beta_3 b_3^{n-1})\lambda_3 t) \quad (3)$$

$$G_n^{(2)}(t) = 1 - \exp(-\mu t) \quad (4)$$

$$F_n^{(2)}(t) = 1 - \exp(-\nu t) \quad (5)$$

式中:  $t \geq 0, a_i \geq 1, 0 < b_i \leq 1, \alpha_i, \beta_i \geq 0, \alpha_i + \beta_i = 1, \mu > 0, \nu > 0; i=1, 2$ 。同时假设所有随机变量以及所涉及到的随机过程都相互独立。

**假设 6** 维修更换策略为一个二元维修更换策略  $(T, N)$ , 其中  $T$  是每次进行预防性维修的时间间隔, 当主部件每次工作时间长达到  $T$  而不发生故障, 就对其进行一次预防性维修;  $N$  是主部件在系统进行更换前总的故障次数。并假设每次用来更换系统的部件都是新的、同型号的, 且更换时间忽略不计。

**假设 7** 该模型在计算时所涉及到的费用为:  $c_1$ , 对主部件进行事后维修的费用率;  $c_2$ , 对部件 2 进行事后维修的费用率;  $c_3$ , 对主部件进行预防性维修的费用率;  $c_4$ , 更换系统的费用;  $c_5$ , 系统工作时单位时间内创造的收益。

## 2 更换策略 $(T, N)$ 下的平均损失

用  $T_1$  表示系统第一次更换的周期,  $T_n$  表示系统第  $(n-1)$  次更换结束到系统第  $n$  次更换结束的这段时间长  $(n=2, 3, \dots)$ , 那么  $\{T_n, n=1, 2, \dots\}$  就形成了一个更新过程, 本文称相邻两次更换的时间间隔为一个更新周期。由于主部件(部件 1)具有优先的使用和修理权, 所以主部件只有工作、事后修理和预防修理 3 种状态, 不存在贮备状态, 而从属部件(部件 2)有工作、贮备、修理和等待修理 4 种状态。因此, 本文所研究模型的一种可能的系统进程如图 1 所示。

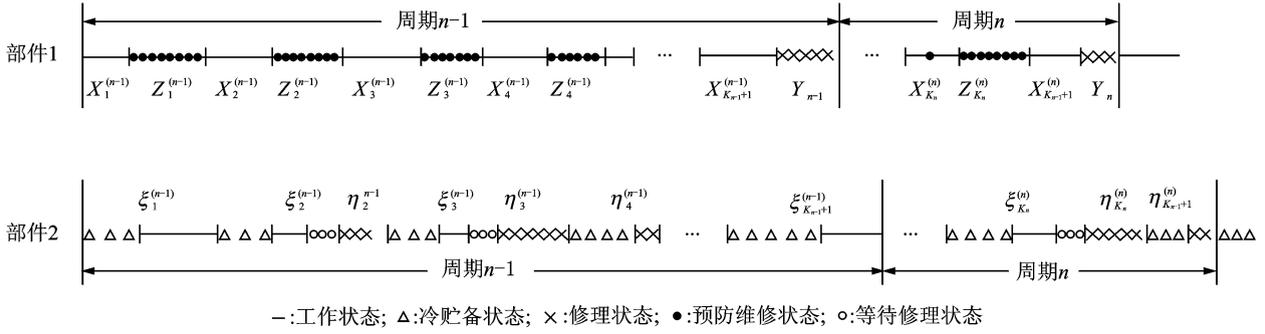


图 1 一类典型的进程模式图

Fig. 1 A typical course of system

用  $C(T, N)$  表示更换策略  $(T, N)$  下系统经长期运行单位时间的平均损失。因此,由更新报酬理论<sup>[16]</sup>可得

$$C(T, N) = \frac{\text{一个周期内的期望损失}}{\text{平均周期长}} \quad (6)$$

用  $W$  表示更换策略  $(T, N)$  一个更新周期的总的时间长。由于主部件具有优先使用权和优先修理权,因此主部件在一个更新周期内有工作、事后维修和预防性维修 3 种状态(见图 1)。由此可得的表达式如下

$$W = T \sum_{n=1}^N K_n + \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{K_n} Z_i^{(n)} + \sum_{n=1}^N X_{K_n+1}^{(n)} + \sum_{n=1}^{N-1} Y_n \quad (7)$$

式中: $K_n$  为对主部件在第  $n$  个周期内进行预防维修的次数;第一项和第三项表示主部件在一个更新周期内的总的工作时间;第二项表示总的预防性维修时间,用  $V_p$  来表示;第四项表示主部件在一个更新周期内总的事后维修时间,用  $V_1$  来表示,则

$$V_p = \sum_{n=1}^N \sum_{i=0}^{K_n} Z_i^{(n)} \quad (8)$$

$$V_1 = \sum_{n=1}^{N-1} Y_n \quad (9)$$

若令

$$p_n = P\{X_i^{(n)} \leq T\} = 1 - \exp(-(\alpha_1 a_1^{n-1} + \beta_1 b_1^{n-1})\lambda_1 T) \quad (10)$$

式中  $n=1, 2, \dots$ , 那么  $K_n$  的概率分布为

$$P\{K_n = k\} = P\{X_1^{(n)} > T, X_2^{(n)} > T, \dots, X_k^{(n)} > T, X_{k+1}^{(n)} < T\} = (1 - p_n)^k p_n \quad (11)$$

由此可得

$$E(T \sum_{n=1}^N K_n) = T \sum_{n=1}^N E(K_n) = T \sum_{n=1}^N \sum_{k=0}^{\infty} k(1 - p_n)^k p_n = T \sum_{n=1}^N \frac{1 - p_n}{p_n} \quad (12)$$

$$E(V_p) = E(\sum_{n=1}^N \sum_{i=0}^{K_n} Z_i^{(n)}) = \sum_{n=1}^N E(\sum_{i=0}^{K_n} Z_i^{(n)}) =$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{1 - p_n}{p_n (\alpha_3 a_3^{n-1} + \beta_3 b_3^{n-1}) \lambda_3} \quad (13)$$

若用  $G_n(t)$  表示主部件在第  $n$  个周期内最后一次预防维修后的工作时间的分布,那么由前面的假设可得

$$G_n(t) = P\{X_{K_n+1}^{(n)} \leq t \mid X_{K_n+1}^{(n)} \leq T\} = \begin{cases} \frac{G_n^{(1)}(t)}{G_n^{(1)}(T)} & 0 < t < T \\ 1 & t \geq T \end{cases} \quad (14)$$

从而有

$$E(\sum_{n=1}^N X_{K_n+1}^{(n)}) = \sum_{n=1}^N E(X_{K_n+1}^{(n)}) = \sum_{n=1}^N \left( T - \frac{T + \frac{\exp(-(\alpha_1 a_1^{n-1} + \beta_1 b_1^{n-1})\lambda_1 T) - 1}{(\alpha_1 a_1^{n-1} + \beta_1 b_1^{n-1})\lambda_1}}{1 - \exp(-(\alpha_1 a_1^{n-1} + \beta_1 b_1^{n-1})\lambda_1 T)} \right) \quad (15)$$

又由假设 5 可知

$$E(V_1) = E(\sum_{n=1}^{N-1} Y_n) = \sum_{n=1}^{N-1} E(Y_n) = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{(\alpha_2 a_2^{n-1} + \beta_2 b_2^{n-1})\lambda_2} \quad (16)$$

所以,将式(10~14)代入到对  $W$  的平均值的计算中可得

$$E[W] = E(T \sum_{n=1}^N K_n) + E(V_p) + E(\sum_{n=1}^N X_{K_n+1}^{(n)}) + E[V_1] = T \sum_{n=1}^N \frac{1 - p_n}{p_n} + \sum_{n=1}^N \frac{1 - p_n}{p_n (\alpha_3 a_3^{n-1} + \beta_3 b_3^{n-1}) \lambda_3} + \sum_{n=1}^N \left( T - \frac{T + \frac{\exp(-(\alpha_1 a_1^{n-1} + \beta_1 b_1^{n-1})\lambda_1 T) - 1}{(\alpha_1 a_1^{n-1} + \beta_1 b_1^{n-1})\lambda_1}}{1 - \exp(-(\alpha_1 a_1^{n-1} + \beta_1 b_1^{n-1})\lambda_1 T)} \right) + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{(\alpha_2 a_2^{n-1} + \beta_2 b_2^{n-1})\lambda_2} \quad (17)$$

若用  $\Phi_n(t)$ ,  $\Psi_n(t)$ ,  $Q_n(t)$  和  $R_n(t)$  分别表示  $Z_i^{(n)} - \xi_i^{(n)}$ ,  $\eta_{i-1}^{(n)} - X_i^{(n)}$ ,  $Y_n - \xi_{K_n+1}^{(n)}$  和  $\eta_{K_n}^{(n)} - X_{K_n+1}^{(n)}$  的分布函数,由假设 5 以及卷积的定义,可得

$$\Phi_n(t) = P\{Z_i^{(n)} - \xi_i^{(n)} \leq t\} = H_n(t) * [1 - G_n^{(2)}(-t)] \quad (18)$$

$$\Psi_n(t) = P\{\eta_{i-1}^{(n)} - X_i^{(n)} \leq t\} = F_n^{(2)}(t) * [1 - G_n^{(1)}(-t)] \quad (19)$$

$$Q_n(t) = P\{Y_n - \xi_{K_n+1}^{(n)} \leq t\} = F_n^{(1)}(t) * [1 - G_n^{(2)}(-t)] \quad (20)$$

$$R_n(t) = P\{\eta_{K_n}^{(n)} - X_{K_n+1}^{(n)} \leq t\} = F_n^{(2)}(t) * [1 - G_n(-t)] \quad (21)$$

用  $V_2$  表示部件 2 在一个更新周期内的总的修理时间,那么由进程图 1 可得

$$V_2 = \sum_{n=1}^N \sum_{i=0}^{K_n} \eta_i^{(n)} (\chi_{\{Z_i^{(n)} - \xi_i^{(n)} > 0\}} + \chi_{\{\eta_{i-1}^{(n-1)} - X_i^{(n)} > 0\}}) + \sum_{n=1}^{N-1} \eta_{K_n+1}^{(n)} (X_{\{Y_n - \xi_{K_n+1}^{(n)} > 0\}} + \chi_{\{\eta_{K_n}^{(n)} - X_{K_n+1}^{(n)} > 0\}}) \quad (22)$$

式中  $X$  为示性函数,即

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & \text{事件 } A \text{ 发生} \\ 0 & \text{事件 } A \text{ 不发生} \end{cases}$$

则由前面的定义以及式(16~19),可得变量  $V_2$  的平均值计算如下

$$E\left(\sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{K_n} \min(Z_i^{(n)}, \xi_i^{(n)})\right) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^k \int_0^{\infty} (1 - H_n(t))(1 - G_n^{(2)}(t)) dt P\{K_n = k\} \quad (27)$$

$$E\left(\sum_{n=1}^N \min(Y_n, \xi_{K_n+1}^{(n)})\right) = \sum_{n=1}^N E(\min(Y_n, \xi_{K_n+1}^{(n)})) = \sum_{n=1}^N \int_0^{\infty} (1 - F_n^{(1)}(t))(1 - G_n^{(2)}(t)) dt \quad (28)$$

从而可得一个更新周期内的平均总工作时间为

$$\begin{aligned} E(U) &= E\left(T \sum_{n=1}^N K_n\right) + E\left(\sum_{n=1}^N X_{K_n+1}^{(n)}\right) + \\ &E\left(\sum_{n=1}^N \sum_{i=0}^{K_n} \min(Z_i^{(n)}, \xi_i^{(n)})\right) + E\left(\sum_{n=1}^N \min(Y_n, \xi_{K_n+1}^{(n)})\right) = \\ &\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{((\alpha_2 a_2^{n-1} + \beta_2 b_2^{n-1})\lambda_2)} + T \sum_{n=1}^N \frac{\exp(-(\alpha_1 a_1^{n-1} + \beta_1 b_1^{n-1})\lambda_1 T)}{1 - \exp(-(\alpha_1 a_1^{n-1} + \beta_1 b_1^{n-1})\lambda_1 T)} + \\ &\sum_{n=1}^N \frac{\exp(-(\alpha_3 a_3^{n-1} + \beta_3 b_3^{n-1})\lambda_3)}{((\alpha_3 a_3^{n-1} + \beta_3 b_3^{n-1})\lambda_3)(1 - \exp(-(\alpha_1 a_1^{n-1} + \beta_1 b_1^{n-1})\lambda_1 T))} + \\ &\sum_{n=1}^N \left(T - \frac{\exp(-(\alpha_1 a_1^{n-1} + \beta_1 b_1^{n-1})\lambda_1 T) - 1}{(\alpha_1 a_1^{n-1} + \beta_1 b_1^{n-1})\lambda_1}\right) \end{aligned} \quad (29)$$

由更新报酬理论<sup>[16]</sup>可得该模型中长期运行单位时间内的平均损失  $C(T, N)$  为

$$C(T, N) = \frac{c_1 E[V_1] + c_2 E[V_2] + c_3 E[V_p] + c_4 - c_5 E[U]}{E[W]} \quad (30)$$

将式(13,16,17,23,29)代入式(30)中可得

$$C(T, N) = \frac{c_1 M_1 + c_2 \frac{1}{\nu} [M_2 + \sum_{n=1}^{N-1} (M_3 - M_4 M_5)] + c_3 M_6 + c_4 - c_5 [M_7 + M_8 + M_9 + M_{10}]}{M_1 + M_6 + M_7 + M_8} \quad (31)$$

式中

$$\begin{aligned} E(V_2) &= \sum_{n=1}^N \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^k E(\eta_i^{(n)} (\chi_{\{Z_i^{(n)} - \xi_i^{(n)} > 0\}} + \\ &\chi_{\{\eta_{i-1}^{(n-1)} - X_i^{(n)} > 0\}})) P\{K_n = k\} + \\ &\sum_{n=1}^{N-1} E(\eta_{K_n+1}^{(n)} (\chi_{\{Y_n - \xi_{K_n+1}^{(n)} > 0\}} + \chi_{\{\eta_{K_n}^{(n)} - X_{K_n+1}^{(n)} > 0\}})) = \\ &\frac{1 - p_n}{\nu p_n} \sum_{n=1}^N [2 - \Phi_n(0) - \Psi_n(0)] + \\ &\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{\nu} [2 - Q_n(0) - R_n(0)] \end{aligned} \quad (23)$$

用  $U$  表示系统在一个更新周期内总的工作时间,则有

$$U = T \sum_{n=1}^N K_n + \sum_{n=1}^N X_{K_n+1}^{(n)} + \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{K_n} \min(Z_i^{(n)}, \xi_i^{(n)}) + \sum_{n=1}^{N-1} \min(Y_n, \xi_{K_n+1}^{(n)}) \quad (24)$$

由于

$$P\{\min(Z_i^{(n)}, \xi_i^{(n)}) > t\} = P\{Z_i^{(n)} > t, \xi_i^{(n)} > t\} = (1 - H_n(t))(1 - G_n^{(2)}(t)) \quad (25)$$

$$P\{\min(Y_n, \xi_{K_n+1}^{(n)}) > t\} = P\{Y_n > t, \xi_{K_n+1}^{(n)} > t\} = (1 - F_n^{(1)}(t))(1 - G_n^{(2)}(t)) \quad (26)$$

所以有

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{(\alpha_2 a_2^{n-1} + \beta_2 b_2^{n-1})\lambda_2} \\
 M_2 &= \sum_{n=1}^N \left( 2 - \frac{(\alpha_3 a_3^{n-1} + \beta_3 b_3^{n-1})\lambda_3}{\mu + (\alpha_3 a_3^{n-1} + \beta_3 b_3^{n-1})\lambda_3} - \frac{\nu}{\nu + (\alpha_1 a_1^{n-1} + \beta_1 b_1^{n-1})\lambda_1} \right) \frac{\exp(-(\alpha_1 a_1^{n-1} + \beta_1 b_1^{n-1})\lambda_1 T)}{1 - \exp(-(\alpha_1 a_1^{n-1} + \beta_1 b_1^{n-1})\lambda_1 T)} \\
 M_3 &= 2 - \frac{(\alpha_2 a_2^{n-1} + \beta_2 b_2^{n-1})\lambda_2}{\mu + (\alpha_2 a_2^{n-1} + \beta_2 b_2^{n-1})\lambda_2} \\
 M_4 &= \frac{(\alpha_1 a_1^{n-1} + \beta_1 b_1^{n-1})\lambda_1 \nu}{(1 - \exp(-(\alpha_1 a_1^{n-1} + \beta_1 b_1^{n-1})\lambda_1 T))(\nu + (\alpha_1 a_1^{n-1} + \beta_1 b_1^{n-1})\lambda_1)} \\
 M_5 &= \frac{1}{(\alpha_1 a_1^{n-1} + \beta_1 b_1^{n-1})\lambda_1} + \frac{1}{\nu \exp((\nu + (\alpha_1 a_1^{n-1} + \beta_1 b_1^{n-1})\lambda_1) T)} \\
 M_6 &= \sum_{n=1}^N \frac{\exp(-(\alpha_1 a_1^{n-1} + \beta_1 b_1^{n-1})\lambda_1 T)}{(\alpha_3 a_3^{n-1} + \beta_3 b_3^{n-1})\lambda_3 (1 - \exp(1 - (\alpha_1 a_1^{n-1} + \beta_1 b_1^{n-1})\lambda_1 T))} \\
 M_7 &= T \sum_{n=1}^N \frac{\exp(-(\alpha_1 a_1^{n-1} + \beta_1 b_1^{n-1})\lambda_1 T)}{1 - \exp(-(\alpha_1 a_1^{n-1} + \beta_1 b_1^{n-1})\lambda_1 T)} \\
 M_8 &= \sum_{n=1}^N \left( T - \frac{T + \frac{\exp(-(\alpha_1 a_1^{n-1} + \beta_1 b_1^{n-1})\lambda_1 T) - 1}{(\alpha_1 a_1^{n-1} + \beta_1 b_1^{n-1})\lambda_1}}{1 - \exp(-(\alpha_1 a_1^{n-1} + \beta_1 b_1^{n-1})\lambda_1 T)} \right) \\
 M_9 &= \sum_{n=1}^N \frac{\exp(-(\alpha_1 a_1^{n-1} + \beta_1 b_1^{n-1})\lambda_1 T)}{(\mu + (\alpha_3 a_3^{n-1} + \beta_3 b_3^{n-1})\lambda_3)(1 - \exp(-(\alpha_1 a_1^{n-1} + \beta_1 b_1^{n-1})\lambda_1 T))} \\
 M_{10} &= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{\mu + (\alpha_2 a_2^{n-1} + \beta_2 b_2^{n-1})\lambda_2}
 \end{aligned}$$

本文研究的  $C(T, N)$  是一个关于变量  $T$  和  $N$  的二元函数。建立这个模型的目的是为了找出一个最优的二元维修策略  $(T^*, N^*)$ , 使得系统经长期运行后单位时间内的平均损失达到最小。但是, 从上面  $C(T, N)$  的表达式可以看到, 该表达式是比较复杂的, 导致很难从理论上找出  $(T^*, N^*)$ 。

### 3 数值算例

#### 3.1 理论结果验证

本节首先给出一个数值算例证明模型的理论

结果。假设  $a_1 = 1.05, a_2 = 1.1, a_3 = 6, b_1 = 0.9, b_2 = 0.1, b_3 = 0.9, \alpha_1 = 0.1, \alpha_2 = 0.9, \alpha_3 = 0.4, \beta_1 = 0.9, \beta_2 = 0.1, \beta_3 = 0.6, \lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = 0.05, \lambda_3 = 0.0001, \nu = 0.2, \nu = 0.05, c_1 = 20, c_2 = 12, c_3 = 10, c_4 = 900, c_5 = 200$ , 并将这些参数的值代入到式 (31) 中, 通过计算, 可以得到相应于故障次数  $N$  和预防维修时间间隔  $T$  变化的平均损失的模拟值, 部分模拟数值如表 1 所示。同时, 本文给出了系统长期运行的平均损失关于  $T$  和  $N$  的变化关系图, 如图 2 所示。

表 1 平均成本率的部分数值结果  
Tab. 1 Results of expected cost rate  $C(T, N)$

N	T						
	40	50	60	70	80	90	100
20	-80.681 5	-82.369 1	-81.214 0	-78.475 8	-74.814 2	-70.595 3	-66.032 6
22	-80.808 4	-82.490 4	-81.329 3	-78.584 9	-74.917 0	-70.691 6	-66.122 3
24	-80.854 9	-82.534 8	-81.371 5	-78.624 8	-74.954 3	-70.726 4	-66.154 5
26	-80.871 0	-82.550 2	-81.386 1	-78.638 5	-74.967 1	-70.738 1	-66.165 2
28	-80.875 8	-82.554 9	-81.390 5	-78.642 5	-74.970 8	-70.741 5	-66.168 2
30	-80.876 8	-82.555 9	-81.391 4	-78.643 3	-74.971 4	-70.741 9	-66.168 5
32	-80.876 5	-82.555 5	-81.391 1	-78.643 0	-74.971 0	-70.741 5	-66.168 0
34	-80.875 9	-82.555 0	-81.390 6	-78.642 5	-74.970 5	-70.741 0	-66.167 4
36	-80.875 4	-82.554 5	-81.390 1	-78.642 0	-74.970 0	-70.740 5	-66.166 9
38	-80.875 0	-82.554 1	-81.389 8	-78.641 6	-74.969 7	-70.740 1	-66.166 6
40	-80.874 7	-82.553 8	-81.389 5	-78.641 4	-74.969 4	-70.739 9	-66.166 3

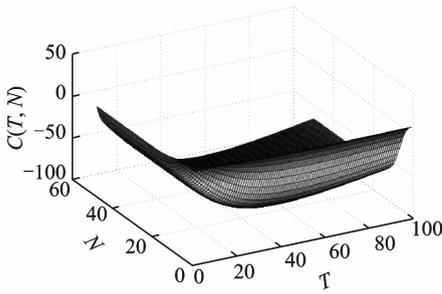


图2 平均损失  $C(T, N)$  与二元维修-更换策略  $(T, N)$  的关系图

Fig. 2 Relationship curve of  $C(T, N)$  and  $(T, N)$

由表1和图2可以看出,当更换次数  $N$  固定时,平均损失  $C(T, N)$  的取值是随着  $T$  的增加先逐步增大,再逐渐减小;同样地,当预防维修时间间隔  $T$  固定时,平均损失的取值也将随着  $N$  的增加先逐步增大,再逐渐减小。因此,由表1可以很容易找出该系统平均损失的最小值为  $C(T^*, N^*) = -82.5559$ , 相应的最优化更换次数为  $N^* = 30$ , 预防维修的最优化时间间隔为  $T^* = 50$ 。

### 3.2 参数关系验证

本节通过数值算例说明该贮备可修系统的最优更换策略  $(T^*, N^*)$ 、系统经长期运行后单位时间的平均最优成本率  $C(T^*, N^*)$  与贮备系统的主部件以及从属部件的失效率、修复率之间的关系。

在数值算例中,主部件的参数失效率  $\lambda_1$  从 0.1

到 0.9 取不同的值,其他参数不变。系统的最优更换策略  $(T^*, N^*)$  以及相应的单位时间的平均最优成本率与  $\lambda_1$  的关系如表2所示。从表2可以看出,随着主部件失效率的增大,预防维修的区间长度和更换前的失效次数都在不断减小,而该系统的单位时间的平均成本率却在不断增大,结果与主观判断相符合。

在数值例子中,主部件的参数修复率  $\lambda_2$  从 0.01 到 0.09 取不同的值,其他参数不变,系统的最优更换策略  $(T^*, N^*)$  以及  $C(T^*, N^*)$  与  $\lambda_2$  的关系如表3所示。从表3可以看出,随着主部件修复率的增大,预防维修的区间长度和该系统单位时间的平均成本率都在不断减小,而更换前的失效次数却在不断增大,结果与主观判断相符合。

在数值例子中,从属部件的参数失效率  $\mu$  从 0.02 到 0.40 取不同的值,其他参数不变,系统的最优更换策略  $(T^*, N^*)$  以及  $C(T^*, N^*)$  与  $\mu$  的关系如表4所示。从表4可以看出,随着从属部件的失效率的增大,预防维修的区间长度和系统的单位时间的平均成本率都在不断增大,而更换前的失效次数却在不断减小,结果与主观判断相符合。

在数值例子中,从属部件的参数修复率  $\nu$  从 0.02 到 0.30 取不同的值,其他参数不变,系统的最优更换策略以及  $C(T^*, N^*)$  与  $\nu$  的关系如表5所示。从表5可以看出,随着从属部件的修复率的

表2 主部件  $(T^*, N^*)$ ,  $C(T^*, N^*)$  与  $\lambda_1$  之间的关系

Tab. 2 Relationship of  $(T^*, N^*)$ ,  $C(T^*, N^*)$  and  $\lambda_1$  of component 1

$\lambda_1$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$(T^*, N^*)$	(67, 50)	(58, 50)	(55, 48)	(52, 37)	(50, 30)	(48, 25)	(46, 22)	(45, 19)	(44, 17)
$C(T^*, N^*)$	-149.072	-132.143	-111.009	-94.978 5	-82.555 9	-72.700 4	-64.721 6	-58.158 9	-52.674 5

表3 主部件  $(T^*, N^*)$ ,  $C(T^*, N^*)$  与  $\lambda_2$  之间的关系

Tab. 3 Relationship of  $(T^*, N^*)$ ,  $C(T^*, N^*)$  and  $\lambda_2$  of component 1

$\lambda_2$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
$(T^*, N^*)$	(61, 25)	(57, 28)	(54, 29)	(52, 29)	(50, 30)	(48, 30)	(47, 31)	(46, 31)	(45, 31)
$C(T^*, N^*)$	-19.0714	-43.586 5	-60.346 7	-72.855 3	-82.555 9	-90.285 8	-96.587 3	-101.810	-106.201

表4 从属部件  $(T^*, N^*)$ ,  $C(T^*, N^*)$  与  $\mu$  之间的关系

Tab. 4 Relationship of  $(T^*, N^*)$ ,  $C(T^*, N^*)$  and  $\mu$  of component 2

$\mu$	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08	0.10	0.20	0.30	0.40
$(T^*, N^*)$	(37, 32)	(42, 31)	(43, 31)	(44, 31)	(46, 31)	(47, 31)	(50, 30)	(51, 29)	(52, 29)
$C(T^*, N^*)$	-143.053	-127.617	-121.787	-116.791	-108.617	-102.157	-82.555 9	-72.128 2	-65.408 3

表 5 从属部件( $T^*, N^*$ ),  $C(T^*, N^*)$ 与  $v$  之间的关系  
 Tab. 5 Relationship of ( $T^*, N^*$ ),  $C(T^*, N^*)$  and  $v$  of component 2

$v$	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.08	0.10	0.20	0.30
$(T^*, N^*)$	(37,26)	(43,28)	(47,29)	(50,30)	(53,30)	(57,31)	(61,31)	(73,33)	(80,34)
$C(T^*, N^*)$	-31.177 8	-58.924 9	-73.498 1	-82.555 9	-88.757 5	-96.743 1	-101.682	-111.978	-115.545

增大,预防维修的区间长度和更换前的失效次数都在不断地增大,而该系统的单位时间的平均成本率却在不断减少,结果与主观判断相符合。

本节给出的数值算例体现了贮备可修系统的工程特性。

## 4 结束语

贮备系统的最优维修策略问题是可靠性理论中的一个重要研究对象,近来已被广泛研究。本文研究了两个不同类型部件组成的退化冷贮备可修系统的维修优化问题。在相应的假设条件下,通过引入一类广义的泊松过程模拟主要部件的工作状态和维修状态,得到了各系统长期运行单位时间内平均损失的明确表达式,并对系统模型进行了数值模拟。通过数值模拟,验证了理论研究的正确性。

贮备系统中备用部件的最大的特点是平时处于非工作状态,只有在出现紧急情况时才进入工作状态,一旦完成规定的任务就返回到非工作状态,因此其处于备用状态的时间远远大于工作时间。贮备系统的作用是为了保证系统在发生紧急事件时仍然能够正常工作,以减少因停工所带来的重大损失。

## 参考文献:

- [1] Barlow R E, Proschan F. Mathematical theory of reliability[M]. New York: Wiley,1975.
- [2] Ascher H,Feingold H. Repairable systems reliability[M]. New York: Marcel Dekker,1984.
- [3] 吴清太,叶尔骅. 开关寿命连续型冷贮备可修系统的可靠性分析[J]. 南京航空航天大学学报,2000,32(5):556-561.  
Wu Qingtai, Ye Erhua. Reliability analysis of cold non-maintained redundant of component repairable system with continuous lifetime switch[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2000,32(5):556-561.
- [4] Wu Qingtai, Wu Shaomin. Reliability analysis of

two-unit cold standby repairable systems under Poisson shocks [J]. Appl Math Comput, 2011,218(1): 171-182.

- [5] Nakagawa T,Osaki S. Stochastic behavior of a two-unit priority standby redundant system with repair [J]. Microelectron Reliab, 1975,14:309-313.
- [6] Barlow R E, Hunter L C. Optimum preventive maintenance policies [J]. Oper Res, 1960,8:90-100.
- [7] Barlow M, Proschan F. Imperfect repair[J]. J Appl Prob, 1983,20:851-859.
- [8] Lam Yeh. Geometric processes and replacement problem[J]. Acta Math Appl Sin, 1988(4): 366-377.
- [9] Lam Yeh. A note on the optimal replacement problem [J]. Adv Appl Prob, 1988,20:479-482.
- [10] 贾积身,刘思锋,党耀国. 冷贮备可修系统的维修更换模型[J]. 南京航空航天大学学报,2007,39(4): 544-549.  
Jia Jishen, Liu Sifeng, Dang Yaoguo. Maintenance and replacement model for cold standby repairable system[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2007,39(4):544-549.
- [11] Wu Shaomin, Clements-Croome D. A novel repair model for imperfect maintenance[J]. IMA Journal of Management Mathematics, 2005(6):1-9.
- [12] Wu Qingtai. Reliability analysis of a cold standby system attacked by shocks[J]. Appl Math Comput, 2012,218(23):11654-11673.
- [13] Lewis E E. Introduction to reliability engineering [M]. Second Edition. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1994.
- [14] Wang Guangjun, Zhang Yuanlin. A bivariate optimal replacement policy for a cold standby repairable system with preventive repair [J]. Appl Math Comput, 2011, 218:3158-3165.
- [15] Wu Shaomin. Springer series in reliability engineering—Preventive maintenance models: A review [M]. London:Springer, 2010.
- [16] Ross S M. Stochastic processes[M]. 2nd Ed. New York:Wiley, 1996.

