

DOI:10.16356/j.1005-2615.2015.01.002

基于三次样条插值的时滞 GDM(1,2) 模型构建及应用

党耀国¹ 张娟^{1,2} 陈兴怡¹

(1. 南京航空航天大学经济与管理学院, 南京, 211106; 2. 南京航空航天大学理学院, 南京, 211106)

摘要: 针对具有时滞特征的输入输出系统, 建立了灰色时滞 GDM(1,2) 模型。并结合三次样条插值和粒子群优化算法, 求解出模型的 3 个参数 $[a, b, \tau]$ 。相对于先利用灰关联分析确定出时滞参数 τ 再求解灰预测模型的方法, 把时滞参数 τ 融入模型中求解, 避免了参数求解过程中的误差传递; 并且还消除了时滞参数 τ 必须为整数的限制, 使模型更加贴合现实中滞后期数不一定为整数的实际情况。最后将模型应用于公路旅客周转量的预测问题, 实例表明该模型在具有时滞特征的输入输出系统预测中具有较高的精度。

关键词: 灰色预测; GDM(1,2) 模型; 三次样条插值; 粒子群优化

中图分类号: N941.5

文献标志码: A

文章编号: 1005-2615(2015)01-0019-06

Grey Delay Model GDM(1,2) and Its Application Based on Cubic Spline Interpolation

Dang Yaoguo¹, Zhang Juan^{1,2}, Chen Xingyi¹

(1. College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 211106, China;

2. College of Science, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 211106, China)

Abstract: Considering the time-delay characteristics of input-output systems, a GDM(1,2) model is established. Combining the cubic spline interpolation with the particle swarm optimization(PSO), the parameters $[a, b, \tau]$ of the model are obtained by the intelligent optimization algorithm. Compared with the traditional method in which the grey relational model is used to estimate the time-delay τ before solving the grey prediction model, this method can avoid the error transfer in the process of solving parameters and remove the limitation that time-delay τ must be an integer, which is more fit to the actual. Then parameters are substituted into time response formula to conclude the solution of the model. Finally, last the model is applied to the prediction of highway passenger turnover in China. Result shows that the model has high accuracy in input-output systems with time-delay characteristics.

Key words: grey prediction; GDM(1,2) model; cubic spline interpolation; particle swarm optimization (PSO)

基金项目: 国家自然科学基金(71071077, 71371098)资助项目; 中央高校基本科研业务费专项资金(NC2012001) 资助项目; 江苏省高校哲学社会科学重点研究基地(2012JDXM005)重大资助项目; 南京航空航天大学研究生创新基地(实验室)开放基金(kfj20130224)资助项目。

收稿日期: 2014-11-16; **修订日期:** 2014-12-26

作者简介: 党耀国, 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向: 灰色系统理论和数量经济学; 主持国家、省级课题 10 余项, 在国内外学术刊物上发表论文 200 余篇, 其中论文被 SCI/SSCI 检索 60 余次; 出版专著、教材 12 部; 获省级社科哲学一等奖 1 项, 中国高校自然科学奖二等奖 2 项, 省级科技进步二等奖 2 项, 三等奖 4 项。

通信作者: 党耀国, E-mail: iamdangyg@163.com。

灰色预测是基于人们对系统演化不确定性特征的认识,运用序列算子对原始数据进行生成、处理,挖掘系统演化规律,建立灰色模型,对系统的未来作出科学的定量预测^[1]的方法。它是预测分析理论的一个重要组成部分,在社会经济各个领域得到了广泛应用^[2]。灰色 GM(1,2)模型是 GM(1,N)模型的一种特殊形式,其在输入端引入与主序列有较强关联性的参考序列,对输入输出系统的预测问题有较好的模拟效果。目前众多学者对 GM(1,N)模型进行了深入的研究。文献[3]引入卷积算法对 GM(1,N)模型的灰微分方程求解过程进行改进,提高了模型的预测精度,并将新方法用于材料抗张强度的预测。文献[4]提出了基于 Simpson 公式的 GM(1,N)模型的新解法,验证了该算法对某些数据序列的拟合实验具有较高的精度。文献[5]将时间序列分析的 ARMA 方法融入 GM(1,2)建模,对 GM(1,2)模型的残差采用 ARMA 方法进行修正,将优化模型用于美国 PJM 电力市场日均电价的预测。文献[6]对 GM(1,2)模型提出改进方法,采用在历史数据库中搜索参考序列的方法提高了模型的预测性能。

系统的时滞特征是指变量受到自身或另一变量前期影响的现象。现有的文献少有考虑这种时滞性。对于单变量的预测模型,最早将时滞因素引入 GM(1,1)模型的是灰色系统创始人邓聚龙教授,在文献[7~8]中提出了 GM(1,1| τ,r)模型,其中 τ 代表延迟时间, r 代表随时间变化的灰输入次数即非线性参数。文献[9]根据经典的速度-流量模型(Green-shields 抛物线模型)推算出时滞参数 τ ,将 GM(1,1| τ,r)模型进行了应用。文献[10]针对 GM(1,1| τ,r)模型,提出了灰色时滞绝对关联度的概念,以原始序列和比较序列的灰色时滞绝对关联度最大为目标来确定时滞参数 τ 。文献[11]构建了灰色时滞模型,并将模型应用于具有波动性特征的短时交通流量的预测。另有一些学者考虑外部因素影响的时滞性,在多变量系统中加入时滞参数进行研究。文献[12]在 GM(1,2)模型中加入滞后项,构建带有时滞的 GM(1,2)模型。文献[13]考虑降水对泉水补给的时滞性,构建了时滞 GM(1,2)模型,将该模型用于泉水流量的预测。文献[14]提出了灰色多变量延迟模型 GM(1,N| τ,r),建立以误差平方最小为目标的非线性优化问题,采用在给定 τ 时用智能算法求解非线性参数 r 的方法求得模型最优解。文献[15]构建了时滞 GM(1,N)模型,认为时滞系统中特征变量同时受到

来自自身和其他变量的滞后影响。

从现有的研究成果看,大多数多变量的灰色时滞预测模型是先通过其他方法确定时滞参数 τ ,并且时滞参数 τ 为整数,然后利用最小二乘法进行参数辨识。本文针对具有时滞效应的输入输出系统构建了时滞 GDM(1,2)模型,并利用三次样条插值和粒子群优化(Particle swarm optimization, PSO)算法相结合,对 GDM(1,2)模型中的参数列 $[a,b,\tau]$ 进行求解,其中 a 为模型的发展系数, b 为模型的灰作用量, τ 为时滞参数。这样既能减少从求解时滞参数 τ 的模型到最小二乘模型过程中的误差传递,又消除了时滞参数 τ 必须为整数的限制。因为在大多数情况下滞后期 τ 不为整数。最后将模型应用于受到公路建设固定资产投资滞后影响的旅客周转量的预测问题中,验证了该方法的合理有效性。

1 时滞 GDM(1,2)模型的构建

1.1 GDM(1,2)模型的建模机理

GM(1,2)模型是灰色模型中表示输入输出系统的状态模型,主要反映系统变量在当前时刻的取值和变化率均被另一因素变量所影响的特征,适合两个变量间的动态分析预测。GM(1,2)模型的基本形式为 $x_1^{(0)}(k) + az_1^{(1)}(k) = bx_2^{(1)}(k)$,表示的是系统主变量在当前时刻的取值和变化率均被另一个变量所影响,其原理图如图 1 所示: $bx_2^{(1)}(k)$ 作为状态系统的输入变量,是系统的“因”,虽然 k 时刻 $x_2^{(1)}(k)$ 是可观测的,但 $bx_2^{(1)}(k)$ 的确切内涵是灰的,故为灰因; $x_1^{(0)}(k)$ 作为状态系统的输出变量,是系统的“果”,故为白果。因此,GDM(1,2)符合灰因白果率。同时作为一个输入输出型能量系统,白果自身的发展情况也被视作预测系统发展的历史依据,通过一阶累加生成(Accumulating generation operator, AGO)和均值生成(Mean generation, MG)成为背景值 $z_1^{(1)}(k)$ 再次进入到系统的运作,影响着后续的系统输出。

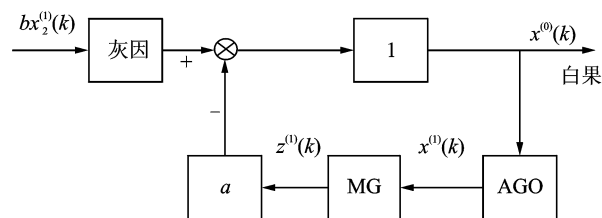


图 1 GM(1,2)模型原理图

Fig. 1 Schematic diagram of GM(1,2) model

然而在现实中的大多数系统中,两个参量间的滞后效应普遍存在。系统在某时刻的输出和变化率会受到系统前期输入的影响。例如高新技术产业投入和产出系统,伴随着科研成果转化周期,科研投入对产值的拉动作用可能不会在当期立即体现,而是推迟一段时间后产生,是典型的具有时滞效应的输入输出系统。因此,时滞效应主要体现在灰因上,即因素变量对主变量的影响具有滞后性,基于此得到 GDM(1,2)模型的原理图如图 2 所示。 $bx_2^{(1)}(k-\tau)$ 作为状态系统的输入变量,是系统的灰因,表示因素变量对主变量的影响具有滞后性, $x^{(0)}(k)$ 作为系统的状态系统的输出变量,是系统的白果,因此 GDM(1,2)符合灰色模型的灰因白果率。根据 GDM(1,2)建模机理,考虑在 GM(1,2)模型的影响因素序列中加入时滞参数,建立含有时滞的 GDM(1,2)模型。

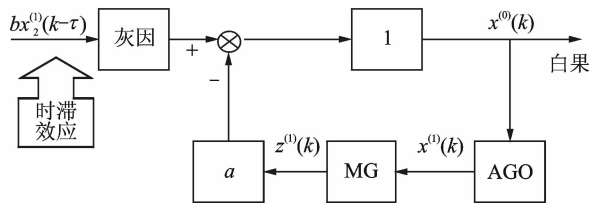


图 2 GDM(1,2)模型原理图

Fig. 2 Schematic diagram of GDM(1,2) model

1.2 GDM(1,2)模型构建及时间响应式

定义 1 设 $X_1^{(0)} = (x_1^{(0)}(1), x_1^{(0)}(2), \dots, x_1^{(0)}(n))$ 为系统特征序列, $X_2^{(0)} = (x_2^{(0)}(1), x_2^{(0)}(2), \dots, x_2^{(0)}(n))$ 为相关因素序列。 $X_i^{(1)} = (x_i^{(1)}(1), x_i^{(1)}(2), \dots, x_i^{(1)}(n))$, $i = 1, 2$ 是 X_1, X_2 的一阶累加生成(1-AGO), 其中, $x_i^{(1)}(k) = \sum_{m=1}^k x_i^{(0)}(m)$, $k = 1, 2, \dots, n$ 。 $Z_1^{(1)} = (z_1^{(1)}(2), z_1^{(1)}(3), \dots, z_1^{(1)}(n))$ 为 $X_1^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列, 其中, $z_1^{(1)}(k) = 0.5(x_1^{(1)}(k) + x_1^{(1)}(k-1))$, $k = 2, 3, \dots, n$ 。 X_2 对 X_1 的影响时滞为 τ , 则称 $x_1^{(0)}(k) + a \cdot z_1^{(1)}(k) = b \cdot x_2^{(1)}(k-\tau)$ 为时滞 GDM(1,2)模型的基本形式, $\frac{dx_1^{(1)}}{dt} + ax_1^{(1)} = bx_2^{(1)}(t-\tau)$ 为 GDM(1,2)模型的白化方程, 其中, $b \cdot x_2^{(1)}(k-\tau)$ 为驱动项, 而 $\hat{a} = (a, b, \tau)$ 为参数序列。显然, 当 $\tau = 0$ 时, GDM(1,2)模型退化为 GM(1,2)模型, 因此 GDM(1,2)模型是 GM(1,2)模型的一种特殊形式。

命题 1 GDM 模型近似时间响应式为

$$\hat{x}_1^{(1)}(k+1) = x_1^{(1)}(0) - \frac{b}{a}x_2^{(1)}(k-\tau+1)e^{-at} + \frac{b}{a}x_2^{(1)}(k-\tau+1)$$

证明 微分方程 $\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)$ 的通解为

$$y = \left[\int g(x)e^{\int f(x) dx} dx + c \right] e^{-\int f(x) dx}$$

因此可得 GDM(1,2)模型的白化方程 $\frac{dx_1^{(1)}}{dt} + ax_1^{(1)} = bx_2^{(1)}(t-\tau)$ 的通解为

$$x_1^{(1)}(t) = \left[\frac{b}{a} \int x_2^{(1)}(t-\tau) e^{at} dt + c \right] e^{-at} \quad (1)$$

因此,得 GDM(1,2)模型的时间响应式为

$$x_1^{(1)}(t) = \frac{b}{a}x_2^{(1)}(t-\tau) + ce^{-at} \quad (2)$$

根据初始条件,可得

$$c = x_1^{(1)}(0) - \frac{b}{a}x_2^{(1)}(t-\tau) \quad (3)$$

故 GDM(1,2)模型的时间响应式为

$$\begin{cases} \hat{x}_1^{(1)}(k+1) = \frac{b}{a}x_2^{(1)}(k-\tau+1) + (x_1^{(1)}(0) - \frac{b}{a}x_2^{(1)}(k-\tau+1))e^{-ak} \\ \hat{x}_1^{(0)}(k+1) = \hat{x}_1^{(1)}(k+1) - \hat{x}_1^{(1)}(k) \end{cases} \quad (4a)$$

$$\hat{x}_1^{(0)}(k+1) = \hat{x}_1^{(1)}(k+1) - \hat{x}_1^{(1)}(k) \quad (4b)$$

2 基于三次样条插值与 PSO 的 GDM(1,2)模型的求解

2.1 三次样条插值与 PSO 算法

定义 2 设在区间 $[a, b]$ 上给定 $(n+1)$ 个插值节点 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, 以及函数 $f(x)$ 相应的值 $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n)$ 。若函数 $S(x)$ 满足: (1) $S(x)$ 在每一个小区间 $[x_j, x_{j+1}]$ 上是三次多项式, $j = 0, 1, \dots, n-1$; (2) $S(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的二阶导数, 则称 $S(x)$ 为三次样条函数。如果 $S(x)$ 还满足 $S(x_j) = y_j, j = 0, 1, 2, \dots, n$, 则称 $S(x)$ 为三次样条插值函数。由三次样条插值方法的插值条件可知, 三次样条插值具有二阶光滑度, 生成的插值函数具有较好的平滑性, 因此利用三次样条插值方法拟合含有时滞参数的序列 $x_2^{(1)}(k-\tau+1)$ 。

PSO 算法首先在可行解空间范围内初始化一群粒子, 每个粒子都代表优化问题的一组潜在最优解, 有 3 个指标来表示粒子特征: 位置、速度、适应度值。适应度值由适应度函数计算得出, 适应度函数即是目标函数。粒子在可行解空间运动, 通过个体极值点 Pbest 和群体极值点 Gbest 共同决定粒子的移动速度, Pbest 是指个体所经历位置中计算得到的适应度最优位置, Gbest 是指种群中所有粒子搜索到的最优适应度位置。粒子每更新一次, 就计算一次适应度值, 通过比较新粒子的适应度值和

个体极值、群体极值的适应度值更新 Pbest 和 Gbest, 最终的 Gbest 即为最优解。

2.2 基于三次样条插值与 PSO 的 GDM(1,2) 模型参数求解

在经典的 GM 模型研究中, 常用最小二乘法来进行参数估计。然而如果模型中含有时滞参数 τ , 则无法直接采用最小二乘法。从现有的文献看, 目前求解时滞的方法大多集中于灰关联分析, 具体做法是从可能的整数中选取关联度最大的数值确定为 τ 。由于时滞 GDM(1,2) 模型的时间响应式 4(a) 中含有 3 个参数 a, b, τ 和含时滞参数 τ 的项 $x_2^{(1)}(k-\tau+1)$, 因此本文以系统特征序列 X_1 的平均相对误差最小为目标函数, 建立非线性规划模型 (5), 并采用 PSO 算法进行求解。

$$\min P(a, b, \tau) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_1^{(0)}(i) - \hat{x}_1^{(0)}(i)}{x_1^{(0)}(i)} \right| \quad (5)$$

由于 PSO 算法是通过粒子更新计算种群中所有粒子的适应度值, 刷新最优适应度值, 使得最优适应度值达到一个令人满意的结果, 从而得出最优解的方法。更新粒子后计算适应度函数 $Q(a, b, \tau)$ 时, 粒子所在位置已知, 而函数 $Q(a, b, \tau)$ 中的 $\hat{x}_1^{(0)}(k) = \hat{x}_1^{(1)}(k) - \hat{x}_1^{(1)}(k-1)$, 其表达式中包含带有时滞参数的 $x_2^{(1)}(k-\tau+1)$, 因此须对 $x_2^{(1)}(k-\tau+1)$ 序列采用三次样条插值方法进行模拟, 代入适应度的计算, 以保证优化算法的可实现性。因而, 基于三次样条插值和 PSO 算法的 GDM(1,2) 模型参数确定方法流程如图 3 所示。

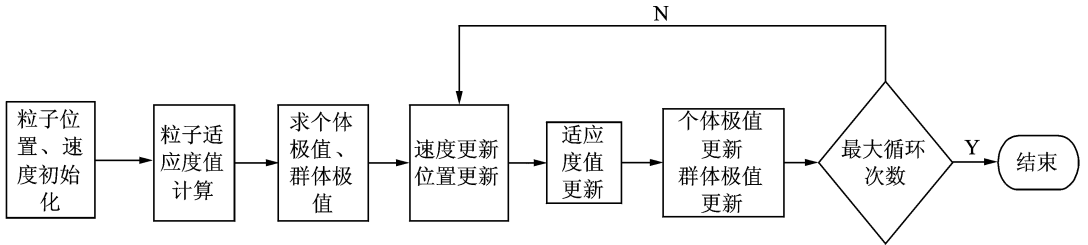


图 3 GDM(1,2)模型参数确定流程图

Fig. 3 Flow chart of parameter identification in GDM(1,2) model

算法步骤如下:

(1) 在可行域范围内初始化粒子种群 $L = (L_1, L_2, \dots, L_M)^T$, M 表示种群规模, 不宜过大, 每个粒子都是一个三维的空间向量 $L_i = (l_{i1}, l_{i2}, l_{i3})$, 代表搜索空间是三维;

(2) 对每一个粒子 $L_i = (l_{i1}, l_{i2}, l_{i3})$, 根据 l_{i3} 的数值, 以三次样条插值 $\text{interp}(X_2^{(1)}, k + l_{i3} - 1)$ (其中 $X_2^{(1)}$ 表示待插值的所有样点, $k + l_{i3} - 1$ 表示待插值的节点) 拟合含有时滞参数的序列 $x_2^{(1)}(k - \tau)$, 计算每一个粒子的适应度值 $Q(L_i)$;

(3) 寻找个体极值位置 Pbest 和个体极值 fitnessPbest;

(4) 寻找群体极值位置 Gbest 和群体极值 fitnessGbest;

(5) 如果满足要求, 在本算法中为达到最大循环次数 MaxNum, 则转到步骤(7), 否则进行步骤(6);

(6) 根据 $V_i(t+1) = \omega V_i(t) + c_1 r_1 (Pbest - L_i(t)) + c_2 r_2 (Gbest - L_i(t))$; $L_i(t+1) = L_i(t) + V_i(t+1)$ 更新粒子的速度和位置, 转到步骤(2);

(7) 输出全局极值 fitnessGbest, 以及对应的解 Gbest, 退出循环。

3 实例分析

在交通运输领域, 公路建设固定资产投资对公路旅客周转量的影响是具有滞后性的。因此, 构成一个具有时滞效应的输入输出系统。查阅中国交通运输统计年鉴得到 1999—2012 年公路建设固定资产投资额(亿元)和旅客周转量(亿人公里)数据, 见表 1, 并以此建立 GDM(1,2) 模型。其中公路建设固定资产投资为系统输入数据作为模型的相关因素序列, 旅客周转量为系统的输出数据作为模型的特征序列 X_2 。

本节以 2006—2012 年公路建设固定资产投资 X_1 与旅客周转量 X_2 的数据进行 GDM(1,2) 建模。由于时滞效应的存在, 当期的旅客周转量会受前期的公路建设固定资产投资的滞后影响, 因此, 还加入了 1999—2005 年旅客周转量的数据纳入相关因素序列 X_2 , 目的不在于建模而在于插值计算, 即以三次样条插值来模拟含时滞参数的项 $x_2^{(1)}(k - \tau + 1)$, 使得基于插值和粒子群算法的 GDM(1,2) 模型参数确定方法能够实现, 得到 GDM(1,2) 模型的解。

在进行参数 $[a, b, \tau]^T$ 求解时, 搜索空间为三

表 1 1999—2012 年中国公路建设固定资产投资及旅客周转量原始数据

Tab. 1 Raw data of highway construction investment in fixed assets and passenger turnover of China in 1999—2012

年份	公路建设 固定资产投资/亿元	旅客周转量/ (亿人公里)	年份	公路建设 固定资产投资/亿元	旅客周转量/ (亿人公里)
1999	2 189.49	6 199.24	2006	6 231.05	10 130.85
2000	2 315.82	6 657.42	2007	6 489.91	11 506.77
2001	2 670.37	7 207.08	2008	6 880.64	12 476.11
2002	3 211.73	7 805.77	2009	9 668.75	13 511.44
2003	3 714.91	7 695.60	2010	11 482.28	15 020.81
2004	4 702.28	8 748.38	2011	12 596.36	16 760.25
2005	5 484.97	9 292.08	2012	12 713.95	18 467.55

维,且种群中粒子数目不宜过大,因此取粒子数为 30,迭代次数为 100,惯性权重采用在 $[0.4, 0.9]$ 内线性减小,经过计算机模拟得到参数的最优解分别是 $a=0.536 0, b=0.767 3, \tau=1.641 9$,说明在交通领域中交通固定资产投资对公路旅客周转量的滞后影响具有 1.64 年,即大约为 1 年零 8 个月的滞后期。将参数 $a=0.536 0, b=0.767 3, \tau=1.641 9$ 代入时间响应式

$$\hat{x}_1^{(1)}(k+1) = (x_1^{(0)} - \frac{b}{a}x_2^{(1)}(k-\tau+1))e^{-a(k-7)} + \frac{b}{a}x_2^{(1)}(k-\tau+1)$$

由 $\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k)$ 还原得到特征序列的模拟值,结果见表 2。

表 2 GDM(1,2)模拟 2006—2012 年旅客周转量情况

Tab. 2 GDM(1,2) model simulation result of passenger turnover in 2006—2012

年份	我国旅客 周转量/ (亿人公里)	GDM(1,2) 模拟值/ (亿人公里)	相对 误差/%
2006	10 130.85	10 130.85	0.000
2007	11 506.77	11 507.01	0.002
2008	12 476.11	12 758.86	2.266
2009	13 511.44	12 621.36	6.588
2010	15 020.81	13 605.60	9.422
2011	16 760.25	16 759.62	0.004
2012	18 467.55	18 473.72	0.033
平均相 对误差			2.620

从表 2 中可知,GDM(1,2)对原始数据的拟合具有较好效果。在 2006—2012 年间,最大误差仅为 9.422%,且 2007,2011 年的误差小至 0.002% 和 0.004%,而平均相对误差为 2.62%,可见具有较高的模拟精度。分析其原因,GDM(1,2)考虑了公路交通建设固定资产投资对旅客周转量的影响具有滞后性,因此取得了较好的模拟效果。

4 结束语

本文针对具有时滞效应的输入输出系统,以系统输出滞后于输入为研究前提,在 GM(1,2)模型中加入时滞参数 τ ,建立了 GDM(1,2)模型,并依照 GM(1,N)模型求解方式得到了 GDM(1,2)模型的时间响应式。结合三次样条插值与 PSO 算法对 GDM(1,2)模型参数进行识别,既避免了传统方法过程中的误差传递,同时又消除时滞参数必须为整数的限制。最后将模型用于 2006—2012 年中国公路运输旅客周转量的模拟中,结果表明 GDM(1,2)模型对具有滞后效应的输入输出系统预测具有较高精度。

参考文献:

- [1] 刘思峰,党耀国,方志耕,等.灰色系统理论及其应用[M].第五版.北京:科学出版社,2010.
Liu Sifeng, Dang Yaoguo, Fang Zhigeng, et al. Grey system theory and its application[M]. 5th Edition. Beijing: Science Press, 2010.
- [2] 邓聚龙.灰理论基础[M].武汉:华中科技大学出版社,2002.
Deng Julong. Grey theory[M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2002.
- [3] Tien Z L. A research on the grey prediction model GM(1,N)[J]. Applied Mathematics and Computation, 2012, 218: 4903-4916.
- [4] 何满喜,王勤.基于 Simpson 公式的 GM(1,N)建模的新算法[J].系统工程理论与实践,2013,33(1): 199-202.
He Manxi, Wang Qin. New algorithm for GM(1,N) modeling based on Simpson formula[J]. System Engineering—Theory & Practice, 2013, 33(1): 199-202.
- [5] 王瑞庆,李渝曾.含误差校正的粒子群优化 GM(1,2)短期电价预测方法[J].电力系统保护与控制,2011,

- 39(13):41-45.
- Wang Ruiqing, Li Yuzeng. Particle swarm optimization based GM(1,2) method for short-term electricity price forecasting with predicted error improvement [J]. Power System Protection and Control, 2011, 39(13):41-45.
- [6] 雷鸣雳,冯祖仁. GM(1,2)模型改进方法研究及应用[J]. 控制与决策, 2013, 28(6):950-952.
- Lei Mingli, Feng Zuren. Research on the improved method for GM(1,2) model and its application [J]. Control and Decision, 2013, 28(6):950-952.
- [7] Deng J L. A novel grey model GM(1,1| τ, r): Generalizing GM(1,1) [J]. Journal of Grey System, 2001, 13(1):1-8.
- [8] Deng J L. Solution of grey differential equation for GM(1,1| τ, r) in matrix train [J]. Journal of Grey System, 2002, 14(1):105-110.
- [9] Guo Huan, Xiao Xiping, Forrest J. Urban road short-term traffic flow forecasting based on GM(1, N| τ, r) model [J]. Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology, 2013, 13(6):60-66.
- [10] 范献胜,肖新平. GM(1,1| τ, r)中 τ, r 的确定及模型应用[J]. 武汉理工大学学报:信息与管理工程版, 2013, 35(4):536-539.
- Fan Xiansheng, Xiao Xiping. The identification of τ, r in GM(1,1| τ, r) model and its application [J]. Journal of Wuhan University of Technology: Information & Management Engineering, 2013, 35(4):536-539.
- [11] Guo Huan, Tang Yuxiao. Short-term traffic flow forecasting based on grey delay model [J]. Artificial Intelligence and Computational Intelligence, Lecture Notes Computer Science, 2012, 7530:357-364.
- [12] 翟军,冯英俊,盛建明. 带有时滞的 GM(1,2)模型及应用[J]. 系统工程, 1996, 14(6):66-68.
- Zhai Jun, Feng Yingjun, Sheng Jianming. GM(1,2) model with time lag and its application [J]. System Engineering, 1996, 14(6):66-68.
- [13] 郝永红,黄登宇,高红波,等. 娘子关泉水流量的 GM(1,2)时滞预测模型[J]. 中国岩溶, 2004, 23(1):43-47.
- Hao Yonghong, Huang Dengyu, Gao Hongbo, et al. Prediction of Niangziguan spring flow using delay model GM(1,2) [J]. Carsologica Sinica, 2004, 23(1):43-47.
- [14] 黄继. 灰色多变量 GM(1, N| τ, r)模型及其粒子群优化算法[J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29(10):145-151.
- Huang Ji. Grey GM(1, N| τ, r) model and its particle swarm optimization algorithm [J]. System Engineering—Theory & Practice, 2009, 29(10):145-151.
- [15] 鲁亚运,原峰,谭枝登. 时滞 GM(1, N)模型及其应用[J]. 统计与决策, 2014(14):73-75.
- Lu Yayun, Yuan Feng, Tan Zhideng. Delaying GM(1, N) model and its application [J]. Statistics and Decision, 2014(14):73-75.

