第 46 卷第 6 期
2014 年 12 月

南 京 航 空 航 天 大 学 学 报
Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics

Vol. 46 No. 6
Dec. 2014

Maxwell 方程的高阶间断有限元数值解法

吕宏强　徐伊达　高煜堃　边乐超

(南京航空航天大学航空宇航学院,南京,210016)

摘要:采用高精度方法求解时域 Maxwell 方程,方程的空间离散采用基于计算流体力学(Computational fluid dynamics,CFD)领域的高阶间断有限元格式,非定常时间迭代采用四步龙格-库塔格式。为了提高计算效率,本文采用了 Quadrature-free implementation 和网格分区并行技术。数值结果表明,采用高阶格式的情况下,采用稀疏网格便可以得到高精度数值解。另外由于本文的方法基于非结构网格,因此非常适合计算复杂外形的情况。

关键词:Maxwell 方程;间断有限元方法;雷达散射截面

中图分类号:V218　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1005-2615(2014)06-0882-06

High-Order Discontinuous Galerkin Solution of Maxwell′s Equations

Lü Hongqing, Xu Yidai, Gao Yukun, Bian Lechao

(College of Aerospace Engineering, Nanjing Universitg of Aeronautics & Astronall, Nanjing, 210016, China)

Abstract: A highly-accurate numerical method is used to solve the two-dimensional Maxwell′s equations, where a computational fluid dynamics(CFD) based discontinuous galerkin(DG) method is employed for the spatial discretization and the four-step Runge-Kutta is used for time-stepping. In order to improve the efficiency, the quadrature-free implementation and the parallel computing based on mesh partitioning are used. Numerical tests indicate that highly-accurate solutions can be obtained when using high orders even on very coarse grids. More importantly, this CFD-based high-order DG method for the Maxwell′s equations is very suitable for complex geometries since it is implemented on unstructured mesh.

Key words: Maxwell′s equations; discontinuous galerkin method; radar cross-section

在过去的数十年中,时域有限差分(FDTD)方法被广泛应用在 Maxwell 方程的求解[1-2]上,但其物面边界采用分段线性表述会影响算法精度[3],尤其对于复杂几何。有限元方法[4]也被用于求解 Maxwell 方程,但是其需要对大矩阵求逆运算以及单元边界的连续要求成为其向高阶发展的瓶颈。在计算流体力学中广泛应用的有限体积方法[5-8]也被用于求解 Maxwell 方程,然而其主要缺点是精度低,为了保证数值精度必须保证网格数量。

近来,间断有限元(Discontinuous galerkim, DG)方法[9]由于其在实现逆风格式,hp 自适应和并行方面的优势,该方法也被用于求解时域 Maxwell 方程。文献[10]采用间断有限元方法求解完全匹配层内的低色散 Maxwell 方程。文献[11]在六面体网格上采用 DG 方法达到了空间高精度,并与 FDTD 方法和 FVTD 方法结果进行了比较。文献[12]在混合网格上采用 DG 方法,提高了效率。文献[13]采用 Petrov-galerkin 和 DG 方法对时域和频域进行了电磁计算。文献[14]为了求解非规则几何外形引入了 Non-conforming 多单元 DG 方法,在物体附近采用非结构网格,其余区域采用结构网格。文献[15]采用混合 DG 方法求解了时谐 Maxwell 方程。文献[16]给出了直角坐标下交叉 DG 方法求解 Maxwell 方程时的收敛和超收敛分析。文献[17～19]采用 DG 方法求解了元材料和

基金项目:国家自然科学基金(11272152)资助项目;江苏高校优势学科建设工程资助项目。

收稿日期:2014-06-03;**修订日期**:2014-07-16

通信作者:吕宏强,男,副教授,E-mail:hongqiang.lu@nuaa.edu.cn。

各向异性材料的 Maxwell 方程。文献[20]讨论了 Schwarz 类型的区域分解方法,结合 DG 方法求解了三维 Maxwell 方程。文献[21]结合网格和阶数自适应方法给出了大尺度电磁数值解。

本文采用基于 CFD 方法的间断有限元法求解复杂外形的 Maxwell 方程,给出了基于 CFD 方法的高阶间断有限元数值离散,为了减少 CPU 计算时间,本文采用了网格分区并行计算和 Quadrature-free implementation[22],并给出典型的数值结果分析。

1 基于 CFD 方法的 Maxwell 方程高阶间断有限元离散

对于 Transverse magnetic(TM)波,二维守恒形式的 Maxwell 方程可以写成

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})=S(\boldsymbol{U})\qquad(1)$$

式中:$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}\varepsilon E_z\\ \mu H_x\\ \mu H_y\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})=(\boldsymbol{F}^x,\quad \boldsymbol{F}^y)$, $\boldsymbol{F}^x=\begin{bmatrix}-H_y\\ 0\\ -E_z\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{F}^y=\begin{bmatrix}H_x\\ E_z\\ 0\end{bmatrix}$

在自由空间,$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$,$\varepsilon$ 和 μ 是常数。

由于 Maxwell 方程形式和无粘欧拉方程的形式十分接近,采用类似 CFD 离散的方法对方程(1)进行数值离散。在方程(1)两边同乘测试函数在积分域内积分,然后分部积分,可以得到如下弱解形式的方程

$$\int_\Omega W\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}\mathrm{d}\Omega+\int_{\partial\Omega}W\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\delta-\int_\Omega\nabla W\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})\mathrm{d}\Omega=0\quad(\forall W)\qquad(2)$$

式中$\partial\Omega$ 为积分域 Ω 的边界。

将积分域分解成不交叉的单元,半离散系统可以写成

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega_e}W_h\boldsymbol{U}_h\mathrm{d}\Omega_e+\int_{\partial\Omega_e}W_h\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_h)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\delta-\int_\Omega\nabla W_h\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_h)\mathrm{d}\Omega_e=0\quad(\forall W_h)\qquad(3)$$

式中:$\boldsymbol{U}_h$,W_h 为 $\boldsymbol{U}$,W 的高阶近似。

$$\boldsymbol{U}_h(x,y,t)=\sum_{j=1}^{N(p)}\boldsymbol{u}_j(t)\varphi_j(x,y)$$

$$W_h(x,y,t)=\sum_{j=1}^{N(p)}w_j(t)\varphi_j(x,y)\qquad(4)$$

式中 $\varphi_j(x,y)$为 p 阶基函数。将式(3)和式(4)代入(2),可以得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega_e}\varphi_i\boldsymbol{U}_h\mathrm{d}\Omega_e+\int_{\partial\Omega_e}\varphi_i\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_h)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\delta-\int_\Omega\nabla\varphi_i\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_h)\mathrm{d}\Omega_e=0\quad 1\leqslant i\leqslant N(p)\qquad(5)$$

通量函数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_h)\cdot\boldsymbol{n}$ 采用数值通量函数 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{U}_h^-,\boldsymbol{U}_h^+,\boldsymbol{n})$代替,式(5)变为

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega_e}\varphi_i\boldsymbol{U}_h\mathrm{d}\Omega_e+\int_{\partial\Omega_e}\varphi_iH(\boldsymbol{U}_h^-,\boldsymbol{U}_h^+,\boldsymbol{n})\mathrm{d}\delta-\int_\Omega\nabla\varphi_i\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_h)\mathrm{d}\Omega_e=0\quad 1\leqslant i\leqslant N(p)\qquad(6)$$

式中:$\boldsymbol{U}_h^-$ 为本单元交界面的值,$\boldsymbol{U}_h^+$ 为相邻单元交界面的值。数值通量函数的选取有很多种,为了便于 Quadrature-free implementation 法的实现,文中采用简单的 LLF 数值通量函数。

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{U}_h^-,\boldsymbol{U}_h^+,\boldsymbol{n})=\frac{1}{2}[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_h^-)\cdot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_h^+)\cdot\boldsymbol{n}+\alpha_{\max}(\boldsymbol{U}_h^--\boldsymbol{U}_h^+)]\qquad(7)$$

式中 $\alpha_{\max}$为当地特征值取最大值。

在远场边界上,采用无反射边界条件。在物面边界上,采用如下边界条件

$$\boldsymbol{n}\times E_t=0\qquad(8)$$

$$\boldsymbol{n}\cdot H_t=0\qquad(9)$$

$$(\boldsymbol{n}\times H)_B=(\boldsymbol{n}\times H)_R-\frac{\boldsymbol{n}\times[\boldsymbol{n}\times(E_R-E_B)]}{(\mu c)_R}\qquad(10)$$

式中:下标 B 代表物面边界,R 代表边界单元的值,t 代表包含来流和散射的总值。

采用 DG 方法进行空间离散后,可以得到如下系统

$$\boldsymbol{M}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{u})\qquad(11)$$

式中 $\boldsymbol{M}$ 为质量矩阵。采用四步龙格-库塔方法时间推进求解时间独立变量 $\boldsymbol{u}$。

众所周知,以上计算中数值积分部分占主要的计算量,因此为了加速计算,本文采用了 Quadrature-free implementation 将数值积分计算转化成矩阵、向量形式的运算[22]。另外为了加速计算本文采用了网格分区并行技术。

2 数值结果

采用以上方法,本文对不同几何外形进行了时

域 Maxwell 方程求解和雷达散射截面计算。

2.1　良导体圆柱的 RCS 计算

首先考虑完全导体圆柱在真空中的波散射问题。其中量纲一化 TM 入射波为

$$E_z^i = \cos(2\pi(x-t))$$

$$H_x^i = 0$$

$$H_y^i = -\cos(2\pi(x-t))$$

为了展示本文采用的高精度方法的高精度特性和鲁棒性，本文有意采用了非对称非结构网格，特别是在物面上半部和下半部分网格尺度变化明显，如图1所示。整个计算域非结构网格单元数为1 529个。图2给出了该算例并行计算中的网格分区示意图。

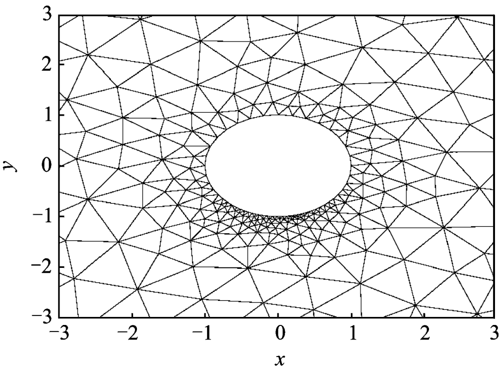


图1　金属圆柱计算网格

Fig. 1　Mesh around metal cylinder

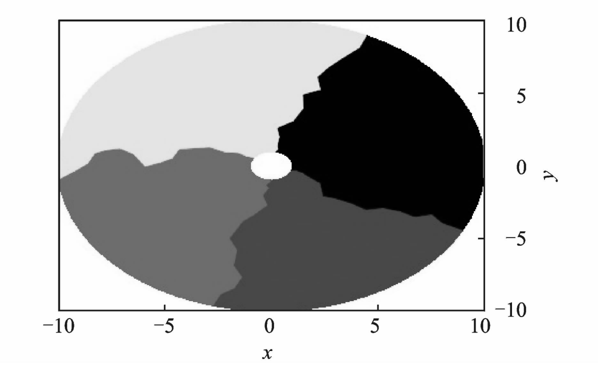
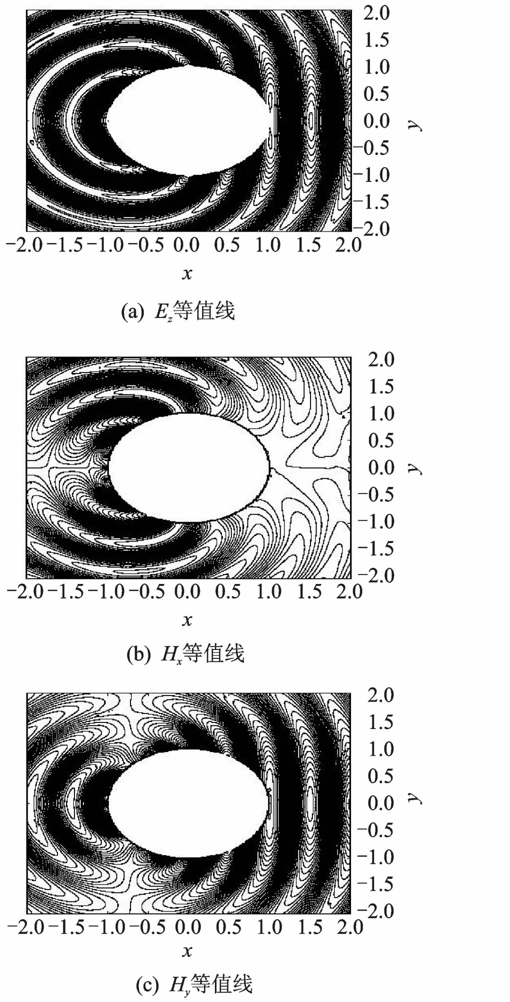


图2　金属圆柱计算网格分区示意图

Fig. 2　Partition mesh around metal cylinder

图3给出了 $t=25.0$ 时刻，采用4阶间断有限元法计算所得的 E_z、H_x 和 H_y 的等值线图。可以看出，尽管物面附近网格尺度明显不同，但采用高阶的情况下，数值结果仍然体现出了非常好的对称性。图4给出了4阶间断有限元法计算所得的 RCS 与级数解的对比，可见虽然采用的计算网格相对稀疏，但 RCS 结果吻合良好。



(a) E_z等值线

(b) H_x等值线

(c) H_y等值线

图3　金属圆柱散射场等值线分布

Fig. 3　Scattering field isolines around metal cylinder

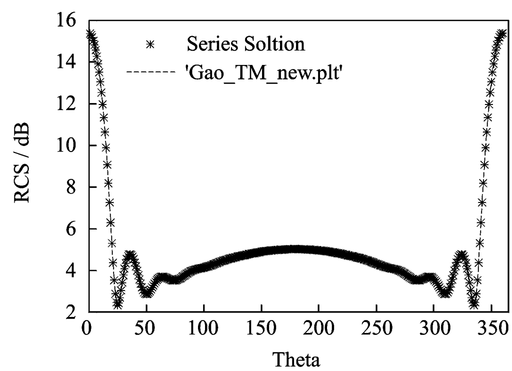


图4　金属圆柱 RCS 对比图

Fig. 4　RCS around metal cylinder

2.2　金属方柱的 RCS 计算

另一常用的验证算例为金属方柱。图5给出了金属方柱的计算网格，计算域内仅696个非结构网格单元。图6给出了采用5阶间断有限元计算得到的散射场等值线图，可见尽管采用的计算网格非常稀疏，但得到的散射场等值线对称性和光滑性

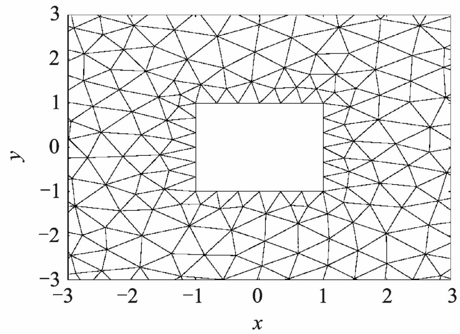


图 5　金属方柱计算网格

Fig. 5　Mesh around metal square column

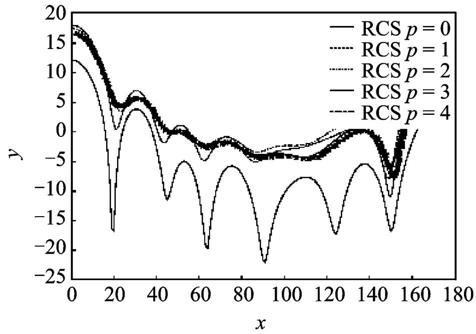
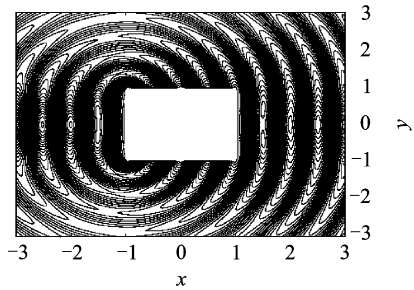


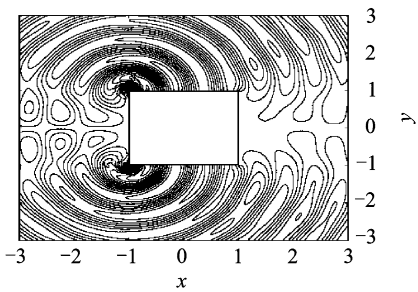
图 7　金属方柱 RCS 对比

Fig. 7　RCS around metal square column

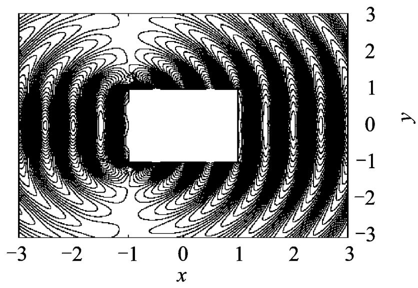
良好。图 7 给出了采用 0～5 阶间断有限元法计算图 5 所示的粗网格上得到的 RCS 和文献[6]中有限体积法采用密网格(28 058 个非结构网格单元)



(a) E_z等值线



(b) H_x等值线



(c) H_y等值线

图 6　金属方柱散射场等值线分布

Fig. 6　Scattering field isolines around metal square column

计算结果的对比。可见本文 0 阶 DG(等同于有限体积格式)得到的 RCS 精度明显很差，这主要是由于计算采用的网格过于稀疏导致。1 阶和 2 阶的结果明显越来越趋向文献值，但仍可观察到局部较明显的差别，3～5 阶的结果跟文献值吻合很好。

2.3　复杂外形的 RCS 计算

本文的最后一个算例为带鼓包的 NACA0012 翼型。计算网格如图 8 所示，计算域内共 1 903 个非结构网格单元。图 9 给出了采用 4 阶间断有限元计算得到的散射场等值线图，可见尽管外形较为复杂且网格较为稀疏，计算所得的散射场仍具有良好的精度且跟文献[6]中密网格上的计算结果很吻合。图 10 给出了采用 0～4 阶间断有限元法计算图 7 所示的粗网格上得到的 RCS 和文献[6]中有限体积法计算结果的对比。可见除了 0 阶 DG 由于计算采用的网格过于稀疏导致差别非常明显外，0～4 阶的结果跟文献值分布趋势吻合良好。图 11 给出了 1 阶到 6 阶的计算耗时(非定常迭代 5 000 步)对比，图中横坐标为阶数，纵坐标为 CPU 耗时。

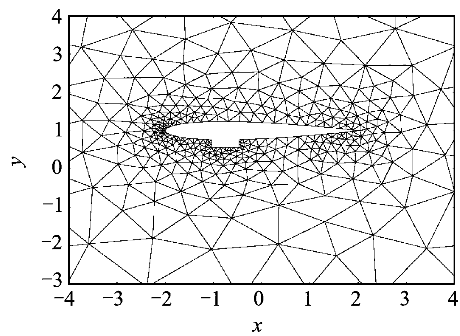
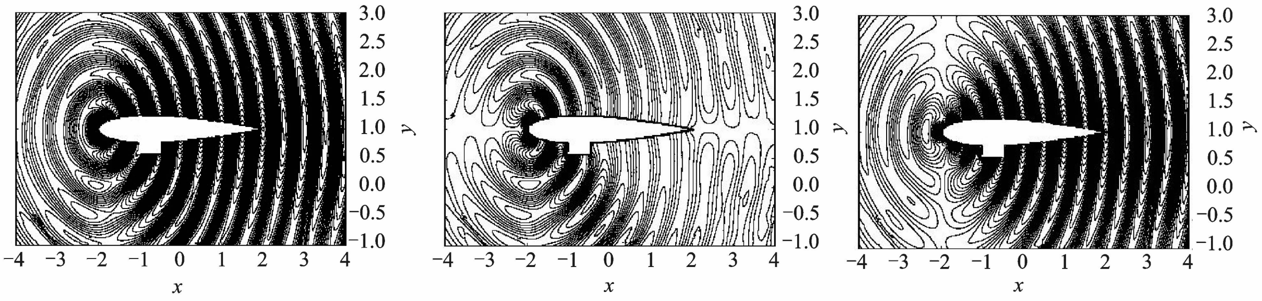


图 8　带鼓包的 NACA0012 翼型计算网格

Fig. 8　Mesh around NACA0012 with a bulge



(a) E_z等值线 (b) H_x等值线 (c) H_y等值线

图9 带鼓包的NACA0012翼型散射场等值线分布

Fig. 9 Scattering field isolines around NACA0012 with a bulge

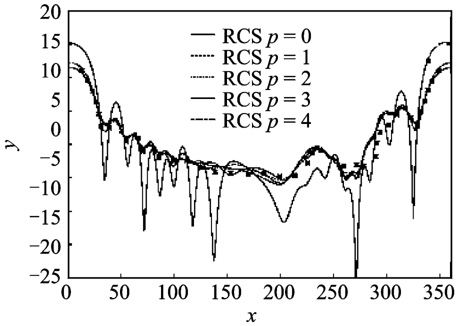


图10 带鼓包的NACA0012翼型RCS对比

Fig. 10 RCS around NACA0012 with a bulge

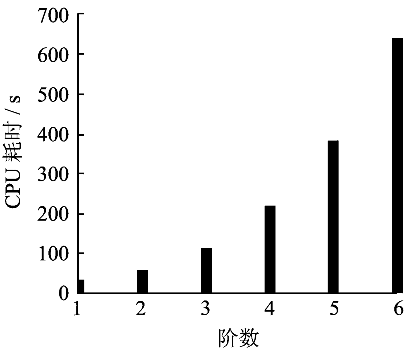


图11 不同阶数情况下的CPU计算耗时对比

Fig. 11 CPU time of different orders

3 结束语

本文采用高阶间断有限元法与非结构网格上数值求解时域Maxwell方程。方程离散中的数值通量采用LLF通量,为了加速计算,采用了Quadrature-free implementation和网格分区并行技术。对圆柱和方柱验证算例的计算表明,在采用高阶的情况下,即使在非常稀疏的网格上也能够得到高精度的数值解。RCS的数值结果对比表明,阶数的提高对RCS计算精度的提高非常显著。对复杂外形的散射场计算表明本文的方法非常适合复杂外形的情况且对网格质量的要求很低。

参考文献:

[1] Yee K S. Numerical solution of initial value problems involving Maxwell′s equation in isotropic media[J]. IEEE Trans Antennas Prop 1966, 14(3): 302-307.

[2] Taflove A, Hagness S C. Computational electrodynamics: The finite-difference time-domain method [M]. Norwood, MA:Artech House,2000.

[3] Cangellaris A C,Wright D B. Analysis of the numerical error caused by the stair-stepped approximation of a conducting boundary in FDTD Simulations of electromagnetic phenomena[J]. IEEE Trans An-tennas Prop,1991,39(10): 1518-1525.

[4] Cohen G, Monk P. Mur-nedelec finite element schemes for Maxwell′s equations[J]. Comp Meth Appl Mech Eng, 1999,169(3/4):197-217.

[5] Piperno S, Remaki M, Fezoui L. A non-diffusive finite volume scheme for the 3d Maxwell euqations on unstructured meshes[J]. SIAM J Numer Anal, 2002, 39(6): 2089-2108.

[6] 高煜堃,陈红全.基于非结构网格格点FVTD算法的电磁散射模拟[J].南京航空航天大学学报, 2013,45(3):415-423.
Gao Yikun, Chen Hongquan. Electromagnetic scattering simulation based on cell-vertex unstructured-grid FVTD algorithm[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2013, 45(3): 415-423.

[7] 陈刚,高正红.结构/直角切割网格下时域有限体积法在计算电磁中的应用研究[J].航空学报,2007,28(5):1033-1039.
Chen Gang, Gao Zhenghong. Study on FVTD method for CEM using structured/adaptive Cartesian grids [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2007, 28(5):1033-1039.

[8] 许勇，乐嘉陵. 基于 CFD 的电磁散射数值模拟[J]. 空气动力学学报，2004，22(2)：185-189.
Xu Yong, Le Jialing. CFD-based numerical simulation of electromagnetic scattering[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2004, 22(2): 185-189.

[9] Cockburn B, Karniadakis G E, Shu C W. Discontinuous Galerkin methods: Theory, computation and applications[M]. Springer Berlin Heidelberg: [s. n.], 2000.

[10] Lu Tiao, Zhang Pngwen, Cai Wei. Discontinuous Galerkin methods for dispersive and lossy Maxwells equations and PML boundary conditions[J]. Journal of Computational Physics, 2004, 200(2): 549-580.

[11] Cohen G, Ferrieres X, Pernet S. A spatial high-order hexahedral discontinuous Galerkin method to solve Maxwell's equations in time domain[J]. Journal of computational Physics, 2006, 217(2): 340-363.

[12] Sevilla R, Hassan O, Morgan K. The use of hybrid meshes to improve the efficiency of a discontinuous Galerkin method for the solution of Maxwells equations[J]. Computers and Structures, 2014(137): 2-13.

[13] Anderson W K, Wang Li, Kapadia S, et al. Petrov-Galerkin and discontinuous-Galerkin methods for time-domain and frequency-domain electromagnetic simulations[J]. Contents Lists Available at SciVerse ScienceDirect, 2011, 230(23): 8360-8385.

[14] Durochat C, Lanteri S, Scheid C. High order non-conforming multi-element discontinuous Galerkin method for time domain electromagnetics[J]. Applied Mathematics and Computation, 2013(224): 681-704.

[15] Nguyen N C, Peraire J, Cockburn B. Hybridezable discontinuous Galerkin methods for the time-harmonic Maxwell's equations[J]. Journal of Computational Physics, 2011, 230(19): 7151-7175.

[16] Chung E T, Jr Patrick C, Yu T F. Convergence and superconver-gence of staggered discontinuous Galerkin methods for the three-dimensional Maxwell's equations on cartesian grids[J]. Journal of Computational Physics, 2013(235): 14-31.

[17] Li Jichun. Development of discontinuous Galerkin methods for Maxwells equations in metamaterials and perfectly matched layers[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2011, 236(5): 950-961.

[18] Li Jichun, Wang J W, Machorro E A. An implicit leap-frog discontinuous Galerkin method for the time-domain Maxwells equations in metamaterials[J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 2012(223): 43-54.

[19] Konig M, Busch K, Niegemann J. The discontinuous Galerkin time-domain method for Maxwells equations with anisotropic materials[J]. Photonics and Nanostructures-Fundamentals and Application, 2010, 8(4): 303-309.

[20] Dolean V, Lanteri S, Perrussel R. A domain decomposition method for solving the three-dimensional time-harmonic Maxwell equations discretized by discontinuous Galerkin methods[J]. Journal of computational Physics, 2008, 227(3): 2044-2072.

[21] Schnepp S M, Weiland T. Efficient large scale electro-magnetic simulations using dynamically adapted meshes with discontinuous Galerkin method[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2012(236): 4909-4924.

[22] Atkins H L, Shu C H. Quadrature-free implementation of discontinuous Galerkin method for hyperbolic equations[J]. AIAA Journal, 1998, 36(5): 775-782.