第 46 卷第 6 期
2014 年 12 月
南京航空航天大学学报
Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics
Vol. 46 No. 6
Dec. 2014

具有较大零相关窗补序列集的构造

曹喜望　袁文辉
（南京航空航天大学理学院，南京，211100）

摘要：为了降低甚至消除近似同步码分多址(Approximately-synchronized code-division multiple-access，AS-CDMA)系统的多径干扰和多址干扰(Multiple access interference，MAI)，满足系统不断增大的用户容量需要，提出了零相关窗补序列集和零相关窗补序列集的构造方法。零相关窗补序列集比传统补序列集具有更多的序列数目，应用到通信系统中可以支持更多的通信用户。本文基于完美序列和行正交矩阵，构造了两类具有较大零相关窗补序列集：第一类是运用完美序列的自相关性质和行正交矩阵的正交性构造了一类最优的零相关窗补序列集；第二类以同样的方式，构造了一类几乎最优的零相关窗补序列集。

关键词：零相关窗补序列集；完美序列；行正交矩阵
中图分类号：O157.4　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1005-2615(2014)06-0869-05

Constructions of Zero-Correlation Zone Complementary Sequence Sets with Large Cardinality

Cao Xiwang, *Yuan Wenhui*
(College of Science, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 211100, China)

Abstract: In order to reduce or eliminate multipath interference and multiple access interference (MAI) of the approximately-synchronized code-division multiple-access (AS-CDMA) system, and satisfy the needs of increasing user capacities of the system, constructions of zero-correlation zone complementary sequence sets are proposed. Zero-correlation zone complementary sequence sets have larger size compared with conventional ones and can support more users in communication systems. Based on perfect sequences and row-orthogonal matrices, two zero-correlation zone complementary sequence sets are constructed with large cardinality. The first one is an optimal zero-correlation zone complementary sequence sets and constructed by using the properties of perfect sequences and row-orthogonal matrices. The second one is an almost optimal zero-correlation zone complementary sequence sets and constructed by using the same method.

Key words: zero-correlation zone complementary sequence sets; perfect sequence; row-orthogonal matrix

补序列集因为在信道估算、扩展谱通信等方面的良好性质而被广泛研究，特别是随着零相关窗补序列集的提出[1]和发展[2-4]。近年来，由于(Quasi-synchronous-CDMA，QS-CDMA)系统中对于零相关窗补序列集的要求，以致对于零相关窗序列集的研究引起更多人的兴趣和注意。与传统互补序列集相比，零相关窗补序列集可以在一定的区域内对序列长度有着更少的限制，并且有理想的周期自相关性和周期互相关性。本文构造了两类具有较大零相关窗的补序列集。

基金项目：国家自然科学基金(11371011)资助项目；中央高校基本科研业务费专项(NZ2013202)资助项目。
收稿日期：2013-09-27；**修订日期**：2013-12-19
通信作者：曹喜望，男，教授，博士生导师，E-mail：xwcao@nuaa.edu.cn。

1 预备知识

首先给出问题中需要的一些概念的定义：

设 $a=(a_0,\cdots,a_{(N-1)})$，$b=(b_0,\cdots,b_{(N-1)})$ 为两个复数域上长度为 N 的序列。定义 a,b 互相关函数为：$R_{a,b}(\tau)=\sum_{t=0}^{N-1}a(t)\cdot b^*(t+\tau)$，其中 $0\leqslant\tau\leqslant N-1$，$t+\tau$ 为模 N 的值，$b^*(t+\tau)$ 为 $b(t+\tau)$ 的共轭。而当序列 $a=b$ 时，则 $R_{a,a}(\tau)=\sum_{t=0}^{N-1}a(t)\cdot a^*(t+\tau)$，此时称为序列 a 的自相关函数，记为 R_a。

具有良好的自相关值的序列在密码、通信方面有着很好的应用。其中具有下面性质的序列称为完美序列：

设 $a=(a_0,\cdots,a_{(N-1)})$ 为一复数域上的序列，当它的自相关值满足

$$R_a(\tau)=\begin{cases}E_a & \tau=0(\mathrm{mod}\ N)\\ 0 & \tau\neq 0(\mathrm{mod}\ N)\end{cases}\tag{1}$$

式中：$E_a=\sum_{t=0}^{N-1}|a_t|^2$，称为序列 a 的能量。

由于完美序列的良好性质，在很多研究方向都有很好的应用[5-7]，所以对于完美序列的构造也成为很多人关心的问题。

例1 二次单位根序列 $a=(1,1,1,-1)$ 为一完美序列。

下面给出行正交矩阵的定义：

设 $\boldsymbol{H}=[h_{i,j}]_{M\times M}$ 为复数域上一 $M\times M$ 矩阵，若它的任意两行满足 $\sum_{k=0}^{M-1}h_{i,k}h_{j,k}^*=\begin{cases}M & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$，则称 $\boldsymbol{H}$ 为行正交矩阵。若对 $\forall h_{ij}\in\boldsymbol{H}$，有 $|h_{ij}|=1$，称 $\boldsymbol{H}$ 为单位模行正交矩阵。

再给出补序列集的定义：

给定一组序列集记为 $A=\{A^0,A^1,\cdots,A^{M-1}\}$，其中任一序列 $A^i\in A$，均包含 N 个长度为 L 的子序列。

$$A^i=(A_0^i,A_1^i,\cdots,A_{N-1}^i)\qquad 0\leqslant i\leqslant M-1$$

$$A_j^i=(a_j^i(0),a_j^i(1),\cdots,a_j^i(L-1))\qquad 0\leqslant j\leqslant N-1$$

设序列 $A^{m_1}\in A$ 称为补序列，若它满足

$$R_{A^{m_1},A^{m_1}}(\tau)=\sum_{k=0}^{N-1}R_{A_k^{m_1},A_k^{m_1}}(\tau)=\begin{cases}\sum_{k=0}^{N-1}E_{A_k^{m_1}} & \tau=0\\ 0 & 0<|\tau|<L\end{cases}\tag{2}$$

$E_{A_k^{m_1}}$ 为 $A_k^{m_1}$ 的能量。

设另一序列 $A^{m_2}\in A(m_1\neq m_2)$ 称为序列 A^{m_1} 的配对，若它满足

$$R_{A^{m_1},A^{m_2}}(\tau)=\sum_{k=0}^{N-1}R_{A_k^{m_1},A_k^{m_2}}(\tau)=0\quad 0\leqslant\tau<L\tag{3}$$

如序列集 A 中任意两个序列互为配对，则称序列集 A 为补序列集，记为 PCS。

序列集 A 被称为零相关窗补序列集（ZPCS），当它满足 $\forall A^{m_1},A^{m_2}\in A$，有

$$R_{A^{m_1},A^{m_2}}(\tau)=\sum_{k=0}^{N-1}R_{A_k^{m_1},A_k^{m_2}}(\tau)=\begin{cases}0 & |\tau|<Z,m_1\neq m_2\\ 0 & 0<|\tau|<Z,m_1=m_2\\ \sum_{k=0}^{N-1}E_{A_k^{m_1}} & \tau=0,m_1=m_2\end{cases}\tag{4}$$

记为 $(M,Z)\,\mathrm{PCS}_N^L$，其中 M 为序列集的元素个数，N 为每一元素中子序列的个数，L 为子序列的长度，而 Z 称为零相关窗。

由零相关窗补序列界理论[8]知，对一 $(M,Z)\,\mathrm{PCS}_N^L$，有 $M\leqslant N\cdot\left|\frac{L}{Z}\right|$。且当等号成立时，$(M,Z)\,\mathrm{PCS}_N^L$ 称为最优零相关窗补序列集。

2 零相关窗补序列集的构造

定理1 设序列 $a=(a_0,\cdots,a_{(N-1)})$ 为长度为 N 的完美序列，$\boldsymbol{H}=[h_{i,j}]_{M\times M}$ 为复数域上 $M\times M$ 单位模行正交矩阵，对 $\forall h_{ij}\in\boldsymbol{H}$，有 $|h_{ij}|=1$，取整数 M_2，令 $M=M_1M_2$，且 $\gcd(N,M_1)=1$，则下列构造的序列集 $A=\{A^0,A^1,\cdots A^{M-1}\}$ 为零相关窗 N 的补序列集。记为 $(M,N)\,\mathrm{PCS}_{M_2}^{NM_1}$。其中

$$A^m=\{A_0^m,A_1^m,\cdots,A_{M_2-1}^m\}\qquad 0\leqslant m\leqslant M-1$$

$$A_k^m=(A_k^m(0),A_k^m(1),\cdots,A_k^m(NM_1-1))\qquad 0\leqslant k\leqslant M_2-1$$

$$A_k^m(t)=a(t\ \mathrm{mod}\ N)\cdot h_{m,g(\bar{k},\bar{t})}\qquad 0\leqslant t\leqslant NM_1-1$$

$g(\bar{x},\bar{y})$ 为双射。

其中

$$\bar{x}\in\frac{Z}{M_2Z}=\{\bar{0},\bar{1},\cdots,\overline{M_2-1}\}$$

$$\bar{y}\in\frac{Z}{M_1Z}=\{\bar{0},\bar{1},\cdots,\overline{M_1-1}\}$$

$$\bar{z}\in\frac{Z}{MZ}=\{\bar{0},\bar{1},\cdots,\overline{M-1}\}$$

双射 $g:(\bar{x},\bar{y})\xrightarrow{g(\bar{x},\bar{y})\ \mathrm{mod}\ (M)}\bar{z}$

证明　设定 $A^{m_1},A^{m_2}\in A$，两序列的互相关值为

$$R_{A^{m_1},A^{m_2}}(\tau)=\sum_{k=0}^{M_2-1}R_{A_k^{m_1},A_k^{m_2}}(\tau)=$$
$$\sum_{k=0}^{M_2-1}\sum_{t=0}^{NM_1-1}a(t \bmod N)\cdot h_{m_1,g(\bar{k},\bar{t})}\cdot$$
$$a^*((t+\tau)\bmod N)\cdot h^*_{m_2,g(\bar{k},\overline{t+\tau})}$$

令 $t=t_1M_1+t_2$　$0\leqslant t_1\leqslant N-1$，$0\leqslant t_2\leqslant M_1-1$。

有 $R_{A^{m_1},A^{m_2}}(\tau)=$

$$\sum_{k=0}^{M_2-1}\sum_{t_2=0}^{M_1-1}\sum_{t_1=0}^{N-1}a((t_1M_1+t_2)\bmod N)\cdot h_{m_1,g(\bar{k},\bar{t_2})}\cdot$$
$$a^*((t_1M_1+t_2+\tau)\text{b} \bmod N)\cdot h^*_{m_2,g(\bar{k},\overline{t_2+\tau})}$$

$\gcd(N,M_1)=1$，则当 t_1 取遍 0 到 $N-1$ 时，$t_1M_1+t_2$，$t_1M_1+t_2+\tau$ 也取遍 0 到 $N-1$。

$$R_{A^{m_1},A^{m_2}}(\tau)=$$
$$\sum_{t_1=0}^{N-1}a(t_1 \bmod N)\cdot a^*((t_1+\tau)\bmod N)\cdot$$
$$\sum_{k=0}^{M_2-1}\sum_{t_2}^{M_1-1}h_{m_1,g(\bar{k},\bar{t_2})}\,h^*_{m_2,g(\bar{k},\overline{t_2+\tau})}=$$
$$R_a(\tau \bmod N)\cdot\sum_{k=0}^{M_2-1}\sum_{t_2}^{M_1-1}h_{m_1,g(\bar{k},\bar{t_2})}\cdot$$
$$h^*_{m_2,g(\bar{k},\overline{t_2+\tau})}\tag{5}$$

分析式(5)有

(1) 当 $m_1=m_2$，$\tau=0$，$R_{A^{m_1},A^{m_2}}(\tau)=R_a(0)\cdot\sum_{k=0}^{M_2-1}\sum_{t_2}^{M_1-1}h_{m_1,g(\bar{k},\bar{t_2})}\,h^*_{m_1,g(\bar{k},\bar{t_2})}=ME_a$（由行正交矩阵定义和双射 g 的定义可得）。

而 $E_{A_k^m}=\sum_{t=0}^{NM_1}|a(t \bmod N)\cdot h_{m,g(\bar{k},\bar{t})}|^2=\sum_{t=0}^{NM_1-1}|a(t \bmod N)|^2\cdot|h_{m,g(\bar{k},\bar{t})}|^2$，又因为对于 $\forall h_{ij}\in\boldsymbol{H}$，有 $|h_{ij}|=1$，所以有 $E_{A_k^m}=M_1E_a$，可知 $E_{A_k^m}$ 为一常数。同时也就可以得到等式 $R_{A^{m_1},A^{m_2}}(\tau)=ME_a=M_2E_{A_k^{m_1}}$，符合定义。

(2) 当 $m_1\neq m_2$，$\tau=0$，由行正交矩阵性质知，式(5)等于 0。

(3) 当 $0<\tau\leqslant N-1$，由完美序列性质知，式(5)等于 0。

综上可得，$R_{A^{m_1},A^{m_2}}(\tau)=\sum_{k=0}^{M_2-1}R_{A_k^{m_1},A_k^{m_2}}(\tau)=$

$$\begin{cases}0 & |\tau|<N,m_1\neq m_2\\ 0 & 0<|\tau|<N,m_1=m_2\\ \sum_{k=0}^{M_2-1}E_{A_k^{m_1}}=M_2E_{A_k^{m_1}} & \tau=0,m_1=m_2\end{cases}$$

所以 A 为 $(M,N)\ \mathrm{PCS}_{M_2}^{NM_1}$。

由于 $M=M_2\cdot\left|\dfrac{NM_1}{N}\right|$，知该序列集最优。

例 2　设定完美序列 $a=(+,0+,0,0,-,+)$，其中"+"代表 1，"−"代表 −1，$N=7$，再取 8 阶 Hadamard 矩阵 $\boldsymbol{H}$

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{T} & \boldsymbol{T}\\ \boldsymbol{T} & -\boldsymbol{T}\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$$

设 $M_1=2$，$M_2=4$，$g(\bar{k},\bar{t})=2\bar{k}+\bar{t}$，$\bar{k}\in\dfrac{Z}{4Z}=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3}\}$，$\bar{t}\in\dfrac{Z}{2Z}=\{\bar{0},\bar{1}\}$

则由定理 1 可构造一个 $(8,7)\mathrm{PCS}_4^{14}$

{(+0+00−++0+00−+;+0+00−++0+00−+;+0+00−++0+00−+;+0+00−++0+00−+)(+0+00−++0+00−+;+0+00−++0+00−+;−0−00+−−0−00+−;−0−00+−−0−00+−)(+0+00++−0−00−−;+0+00++−0−00−−;+0+00++−0−00−−;+0+00++−0−00−−)(+0+00++−0−00−−;−0−00−−+0+00++;+0+00++−0−00−−;−0−00−−+0+00++)(+0+00−++0+00−+;−0−00+−−0−00+−;+0+00−++0+00−+;−0−00+−−0−00+−)(+0+00−++0+00−+;−0−00+−−0−00+−;−0−00+−−0−00+−;+0+00−++0+00−+)(+0+00++−0−00−−;+0+00++−0−00−−;−0−00−−+0+00++;−0−00−−+0+00++)(+0+00++−0−00−−;−0−00−−+0+00++;−0−00−−+0+00++;+0+00++−0−00−−)}

易验证该序列集为 ZPCS。另外对同一完美序列和正交矩阵，可通过定义不同的 $g(\bar{k},\bar{t})$，例如可再定义 $g(\bar{k},\bar{t})=\bar{k}+4\bar{t}$ 等得出不同的 ZPCS。

定理 1 是利用了完美序列和单位模行正交矩阵很好的性质，来构造了零相关窗补序列集。下面定理 2，通过改变从完美序列和单位模行正交矩阵的取值方式，可以得到另一类几乎最优零相关窗补序列集。

定理 2　设 $\boldsymbol{H}=[h_{i,j}]_{M\times M}$ 为复数域上一 $M\times M$ 单位模行正交矩阵，序列 $a=(a_0,\cdots,a_{(N-1)})$ 为长度 N 的完美序列，令 $N=N_1N_2$，取整数 M_2，令 $M=N_1M_2$，序列集 $A=\{A^0,A^1,\cdots,A^{M-1}\}$，其中各

序列

$$A^m=\{A_0^m,A_1^m,\cdots,A_{M_2-1}^m\}\qquad 0\leqslant m\leqslant M-1$$

$$A_k^m=(A_k^m(0),A_k^m(1),\cdots,A_k^m(NN_1-1))\qquad 0\leqslant k\leqslant M_2-1$$

$A_k^m(t)=a\left((t \bmod N_1)N_2+\left\lfloor\frac{t}{N_1}\right\rfloor\right)\cdot h_{m,g(\bar{k},\bar{t})}\quad 0\leqslant t\leqslant NN_1-1$，其中 $g(\bar{x},\bar{y})$ 为定理1中所述的函数，$\bar{x}\in\frac{Z}{M_2Z}=\{\bar{0},\bar{1},\cdots\overline{M_2-1}\}$，$\bar{y}\in\frac{Z}{N_1Z}=\{\bar{0},\bar{1},\cdots\overline{N_1-1}\}$，$\bar{z}\in\frac{Z}{MZ}=\{\bar{0},\bar{1},\cdots\overline{M-1}\}$，

双射 $g:(\bar{x},\bar{y})\xrightarrow{g(\bar{x},\bar{y})\bmod(M)}\bar{z}$。

其中 $\left\lfloor\frac{t}{N_1}\right\rfloor$ 表示不超过 $\frac{t}{N_1}$ 的最大整数。则可得 A 为一 $(M,N-1)\mathrm{PCS}_{M_2}^{NN_1}$。

证明　设 $A^{m_1},A^{m_2}\in A$，计算互相关值为

$$R_{A^{m_1},A^{m_2}}(\tau)=\sum_{k=0}^{M_2-1}R_{A_k^{m_1},A_k^{m_2}}(\tau)=$$

$$\sum_{k=0}^{M_2-1}\sum_{t=0}^{NN_1-1}a\left((t\bmod N_1)N_2+\left\lfloor\frac{t}{N_1}\right\rfloor\right)\cdot h_{m_1,g(\bar{k},\bar{t})}\cdot a^*\left(((t+\tau)\bmod N_1)N_2+\left\lfloor\frac{t+\tau}{N_1}\right\rfloor\right)\cdot h^*_{m_2,g(\bar{k},\overline{t+\tau})}$$

，现令 $t=t_1N_1+t_2$，$\tau=\tau_1N_1+\tau_2$，显然有 $0\leqslant t_1,\tau_1\leqslant N-1$，$0\leqslant t_2,\tau_2\leqslant N_1-1$。则有

$$R_{A^{m_1},A^{m_2}}(\tau)=\sum_{k=0}^{M_2-1}\sum_{t_2=0}^{N_1-1}\sum_{t_1=0}^{N-1}a((t_2N_2+t_1)\bmod N)\cdot a^*(\zeta\bmod N)\cdot h_{m_1,g(\bar{k},\bar{t}_2)}\cdot h^*_{m_2,g(\bar{k},\overline{t_2+\tau_2})}$$

其中

$$\zeta=((t_2+\tau_2)\bmod N_1)N_2+t_1+\tau_1+\left\lfloor\frac{(t_2+\tau_2)}{N_1}\right\rfloor$$

因为 $N=N_1N_2$，所以 ζ 在模 N 的情况下可以写成

$$\zeta=t_2N_2+t_1+\tau_2N_2+\tau_1+\left\lfloor\frac{(t_2+\tau_2)}{N_1}\right\rfloor$$

所以 $R_{A^{m_1},A^{m_2}}(\tau)=$

$$R_a\left(\left(\tau_1+\left\lfloor\frac{t_2+\tau_2}{N_1}\right\rfloor+\tau_2N_2\right)\bmod N\right)\cdot\sum_{k=0}^{M_2-1}\sum_{t_2=0}^{N_1-1}h_{m_1,g(\bar{k},\bar{t}_2)}\cdot h^*_{m_2,g(\bar{k},\overline{t_2+\tau_2})}\tag{6}$$

因为 a 为完美序列，可得 $R_a\left(\left(\tau_1+\left\lfloor\frac{t_2+\tau_2}{N_1}\right\rfloor+\tau_2N_2\right)\bmod N\right)\neq 0$，当且仅当 $\tau_2N_2+\tau_1+\left\lfloor\frac{t_2+\tau_2}{N_1}\right\rfloor\equiv 0(\bmod N)$ 成立，又因为 $0\leqslant t_2,\tau_2\leqslant N_1-1$，所以 $\left\lfloor\frac{t_2+\tau_2}{N_1}\right\rfloor=0$ 或 1。则可知

$$R_a\left(\left(\tau_1+\left\lfloor\frac{t_2+\tau_2}{N_1}\right\rfloor+\tau_2N_2\right)\bmod N\right)\neq 0$$

成立，当且仅当上述同余式中 $\tau_2N_2+\tau_1\equiv 0(\bmod N)$（记为式(a)），或 $\tau_2N_2+\tau_1+1\equiv 0(\bmod N)$（记为式(b)）成立。

针对 τ_1 的大小，对上述分情况讨论：

(1)设 $0\leqslant\tau_1\leqslant N_2-2$，上述同余式仅式(a)成立，且此时 $\tau_1=\tau_2=0$。

（证明：因为 $N=N_1N_2$，式(a)成立当且仅当 $N_2\mid\tau_1$，式(b)成立当且仅当 $N_2\mid(\tau_1+1)$。而 $0\leqslant\tau_1\leqslant N_2-2$，所以 $\tau_1=0$，且仅有式(a)成立。此时有 $\tau_2N_2\equiv 0(N)$，$0\leqslant\tau_2<N_1-1$，得 $\tau_2=0$）。

所以当 $0<\tau_1\leqslant N_2-2$，$\tau_2\neq 0$ 时，即 $0<\tau=\tau_1N_1+\tau_2\leqslant N-N_1-1$ 时，有

$$R_a\left(\tau_1+\left\lfloor\frac{t_2+\tau_2}{N_1}\right\rfloor+\tau_2N_2\right)=0。$$

(2)再设 $\tau_1=N_2-1$，上述同余式仅式(b)成立，此时有 $\tau_2=N_1-1$，且 $t_2\geqslant 1$。

（证明：当 $\tau_1=N_2-1$，因为 $N=N_1N_2$，知仅有式(b)成立，此时 $\tau_2=N_1-1$，$\left\lfloor\frac{t_2+\tau_2}{N_1}\right\rfloor=1$，$t_2\geqslant 1$）。

所以当 $\tau_1=N_2-1$，$\tau_2\neq N_1-1$ 时，即 $N-N_1\leqslant\tau=\tau_1N_1+\tau_2\leqslant N-2$ 时，有

$$R_a\left(\tau_1+\left\lfloor\frac{t_2+\tau_2}{N_1}\right\rfloor+\tau_2N_2\right)=0。$$

综合(1,2)可知：当 $0<\tau<N-1$ 时，$R_a\left(\tau_1+\left\lfloor\frac{t_2+\tau_2}{N_1}\right\rfloor+\tau_2N_2\right)=0$，即

$$R_{A^{m_1},A^{m_2}}(\tau)=0$$

再分析当 $\tau=0$ 时，即 $\tau_1=\tau_2=0$，代入式(6)有

$$R_{A^{m_1},A^{m_2}}(\tau)=R_a(0)\cdot\sum_{k=0}^{M_2-1}\sum_{t_2}^{N_1-1}h_{m_1,g(\overline{k,t_2})}h^*_{m_2,g(\bar{k},\bar{t}_2)}=\begin{cases}0 & m_1\neq m_2\\ ME_a & m_1=m_2\end{cases}$$

同于定理1证明得到，当 $\tau=0$，$m_1=m_2$ 时，由单位模正交矩阵性质可知 $E_{A_k^{m_1}}=N_1E_a$，所以有

$$R_{A^{m_1},A^{m_1}}(\tau)=ME_a=M_2E_{A_k^{m_1}}$$

综上可得 $R_{A^{m_1},A^{m_2}}(\tau)=\sum_{k=0}^{M_2-1}R_{A_k^{m_1},A_k^{m_2}}(\tau)=$

$$\begin{cases}0 & |\tau|<N-1,m_1\neq m_2\\ 0 & 0<|\tau|<N-1,m_1=m_2\\ \sum_{k=0}^{M_2-1}E_{A_k^{m_1}}=M_2E_{A_k^{m_1}} & \tau=0,m_1=m_2\end{cases}$$

所以证明了该序列集 A 为一个 $(M,N-1)\mathrm{PCS}_{M_2}^{NN_1}$。

因为 $M_2 \cdot \left|\frac{NN_1}{N-1}\right| = M+1$,可以看出此界与最优界仅差 1,此时称此零相关窗补序列集为几乎最优。

例 3 设定完美序列 $a=(+---+---)$，则 $N=8$,取 8 阶 Hadamard 矩阵

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{T} & \boldsymbol{T}\\ \boldsymbol{T} & -\boldsymbol{T}\end{bmatrix} \quad \boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$N_1=2, N_2=4, M_2=4g(\bar{k},\bar{t})=\bar{k}+4\bar{t},$$

其中 $\bar{k}\in\frac{Z}{4Z}=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3}\}$,$\bar{t}\in\frac{Z}{2Z}=\{\bar{0},\bar{1}\}$ 。由定理 2 可算出一个 $(8,7)\mathrm{PCS}_4^{16}$。

3 结束语

本文利用了单位模行正交矩阵和完美序列的性质,构造了两类具有较大零相关窗的补序列集。与第一类零相关窗补序列集比较,第二类零相关窗补序列集的构造从完美序列和单位模行正交矩阵中的取值有所不同。并根据文献[8]中的界理论,得出两类分别为最优和几乎最优零相关窗补序列集。由于完美序列和正交矩阵有很多,所以由这种方法可以构造出很多这样的零相关窗补序列集。

参考文献：

[1] Fan Pingzhi,Darnell M. Sequence design for communication applications[M]. New York：Wiley, RSP, 1996.

[2] Fan Pingzhi, Yuan Weina,Tu Yifeng. Z-complementary binary sequences[J]. Signal Processing Letters, 2007, 14(8):509-512.

[3] Chen H H, Chiu H W. Orthogonal complementary codes for interference CDMA technologies[J]. Wireless Communication,2006,13(1):68-79.

[4] Han Chenggao, Suehiro T,Hashimoto T. A systematic framework for the construction of optimal complete complementary code[J]. Transactions on Information Theory,2011, 57(9)：6033-6042.

[5] Hayashi T. A novel class of zero-correction zone sequence sets constructed from a perfect sequence[J]. Fundamental of Electronic Communications and Computer Science,2008,91(4):1233-1237.

[6] Hayashi T. A class of zero-correlation zone sequence set using a perfect cequence[J]. Signal Processing Letters,2009,16(4):331-334.

[7] Hayashi T. Zero-correlation zone sequence set constructed from a perfect sequence[J]. Fundamental of Electronic Communicateons and Computer Science, 2007,90(5):1107-1111.

[8] Feng Lifang, Fan Pingzhi, Zhou Xianwei. Lower bounds on correlation of Z-complementary code sets [J] . Wireless Personal Comunications,2013,72(2):1475-1488.