

# 复合材料层合板宽度尺寸效应的混合模型

沈浩杰<sup>1</sup> 姚卫星<sup>2</sup> 吴义韬<sup>1</sup>

(1. 南京航空航天大学飞行器先进设计技术国防重点学科实验室, 南京, 210016;

2. 南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室, 南京, 210016)

**摘要:**研究了影响复合材料层合板强度尺寸效应的两个主要影响因素:统计尺寸效应和自由边效应。统计尺寸效应采用经典的 Weibull 最弱环理论描述。提出了“废宽度”的概念,将自由边效应和最终失效强度联系起来。综合这两种效应,得到了影响纤维增强复合材料(Fiber reinforced plastic, FRP)宽度尺寸效应的混合模型。引用 D Kujawski 的试验数据对混合模型进行了验证,结果表明:混合模型能够准确地预测不同宽度试件的最终失效强度。

**关键词:**纤维增强复合材料;宽度尺寸效应;统计尺寸效应;自由边效应;废宽度

**中图分类号:** TB332; V258. 3

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1005-2615(2014)03-0371-06

## Mixed Model for Size Effect of FRP Composite in Width

Shen Haojie<sup>1</sup>, Yao Weixing<sup>2</sup>, Wu Yitao<sup>1</sup>

(1. Key Laboratory of Fundamental Science for National Defense-Advanced Design Technology of Flight Vehicle,

Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China;

2. State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures,

Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China)

**Abstract:** The size effect on the strength of fiber reinforced plastic(FRP) composite is investigated. The two main factors, statistical size effect and free-edge effect, are responsible for the size effect in width. Statistical size effect originates from material inherent defects and it is described by the traditional Weibull weakest link theory. Free-edge effect comes into being because of stress singularity at edge and "waste width" is proposed to link the final failure strength with free-edge effect. Then a mixed model for the size effect in width is constructed by synthesizing the two effects. The experimental data from D Kujawski are employed to verify the proposed model and it is shown that the mixed model can predict the final failure strength of specimens with different widths.

**Key words:** fiber reinforced plastic; size effect in width; statistical size effect; free-edge effect; waste width

随着树脂基纤维增强复合材料(Fiber reinforced plastic, FRP)在航空航天领域广泛应用,需要进行大量的试验来支持设计。在应用试验结果时,尺寸效应是一个不可忽略的因素。考虑尺寸效应的影响,不仅能提高使用从试验级小试件获得的

材料性能参数进行结构分析的可靠性,而且能通过采用模型试验来代替全尺寸试验,节省试验成本。

研究人员把各向同性的脆性材料尺寸效应的经验规律,用来研究各向异性的复合材料单向板并进行了改进,现在的研究重点是复合材料层合板及

**基金项目:**国家自然科学基金(11202098)资助项目;长江学者和创新团队发展计划(IRT0968)资助项目;江苏省高校优势学科建设工程资助项目。

**收稿日期:** 2013-12-24; **修订日期:** 2014-02-28

**通信作者:** 姚卫星,男,教授,博士生导师, E-mail: wxyao@nuaa.edu.cn。

结构件的尺寸效应。Sutherland 等人<sup>[1]</sup>回顾了 FRP 尺寸效应的研究方法: Weibull<sup>[2]</sup>最弱环理论、Daniels<sup>[3]</sup>改进最弱环理论(纤维束理论)和断裂力学方法。Okabe 等人<sup>[4]</sup>采用微观的 3D 剪滞模型,用蒙特卡洛方法模拟单向板的尺寸效应,得出纤维束理论模型优于传统 Weibull 模型的结论。Wisnom<sup>[5]</sup>总结了层合板尺寸效应的影响因素,包括了复合材料存在随机分布的自身缺陷、自由边效应、应力梯度的影响以及制造等因素,并总结了不同载荷条件和失效模式下的尺寸效应。Tabiei 等人<sup>[6]</sup>在 Daniels 纤维束模型的基础上,采用基于连续多步失效的等效载荷传递方法分析了  $[0]_{ns}$  和  $[0/90]_{ns}$  层合板的长度、宽度、厚度方向的尺寸效应,并对比了等效载荷法、Weibull 最弱环强度理论的预测结果和试验结果。Wisnom<sup>[7]</sup>等人试验分析了单向板和准各向同性层合板整体的尺寸效应,发现试件强度随着子层级尺寸的增加而增加,随着单层级尺寸的增加而降低。Hallett 等人<sup>[8]</sup>研究了准各向同性复合材料  $[45/90/-45/0]$  单层级的尺寸效应,采用 VCCT 技术模拟分层预测失效载荷,在考虑分层和基体裂纹的相互影响后获得了较好的结果。Camanho 等人<sup>[9]</sup>用连续介质损伤力学方法预测带缺口层合板的尺寸效应,并与点应力模型、固有缺陷模型、线弹性损伤力学模型和一般材料强度分析方法进行比较,认为该方法有无需标定相关参数的优点。

层合板强度的尺寸效应包括了长度、宽度、厚度 3 个方向的尺寸效应,3 个方向尺寸效应的主要影响因素不相同,其中长度方向尺寸效应主要是由随机分布的材料缺陷所决定<sup>[10]</sup>,厚度方向尺寸效应主要取决于铺层方法<sup>[7]</sup>,前人已做有意义的研究。对于层合板结构而言,宽度方向的尺寸效应更加重要,因此本文研究了层合板的宽度尺寸效应,提出一个混合模型,并用 Kujawski<sup>[11]</sup>的试验数据进行验证。

## 1 宽度尺寸效应混合模型

Wisnom<sup>[5]</sup>总结了尺寸效应的影响因素,包括:复合材料自身缺陷(例如:纤维束分布不均匀、树脂富余或有空穴、纤维基体脱胶、纤维断裂或错位)、自由边效应、应力梯度影响和制造等其他因素。如忽略制造中湿热对尺寸效应的影响,FRP 宽度尺寸效应可以归结为自由边效应和材料固有缺陷引起的统计尺寸效应。

### 1.1 统计尺寸效应

尺寸效应是指两个形状相似但尺寸不同的试件,大试件的静强度或疲劳强度小于小试件的现象。统计尺寸效应仅由材料内部缺陷随机分布造成的,在较大的试件中出现较大缺陷的可能性越大,如果在该材料中较大缺陷导致了试件的最终失效,那么较大试件就可能先发生失效,从而得到较小的强度值。统计尺寸效应可以用最弱环理论来描述。以宽度为唯一的尺寸变量,统计发现试件的失效强度满足 Weibull 分布,可表示为

$$P(\sigma) = \exp\left[-\omega\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m\right] \quad (1)$$

式中:  $\omega$  为试件的宽度;  $\sigma$  为试件的失效强度;  $m$  和  $\sigma_0$  分别为 Weibull 函数形状参数和尺度参数;  $P(\sigma)$  为试件在  $\sigma$  应力水平下的存活率。

比较大小两个试件,令它们的存活率相等,则有

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^{\frac{1}{m}} \quad (2)$$

进而可得考虑统计尺寸效应的强度试件随宽度变化的表达式

$$X_1 = X_0 \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^{\frac{1}{m}} \quad (3)$$

式中:  $\omega_0$ ,  $X_0$  为参考宽度和强度,分别来自同一组试验数据的试件宽度和强度值。同时,至少需要两组试验数据就可以计算 Weibull 函数的形状参数  $m$ 。

### 1.2 自由边效应

#### 1.2.1 基于“废宽度”的自由边效应

在复合材料层合板中,由铺层不同造成厚度方向弹性常数不连续,导致在试件自由边附近(自由边界或开孔、切口处)产生较高的层间应力,这个现象称作自由边效应。因为层间强度往往较小,在试件未达到最终失效强度的时候,可能就已经发生了分层破坏。所以自由边效应是复合材料失效分析中的一个重要因素,也是 FRP 宽度尺寸效应的关键影响因素之一。

本文将复合材料层合板看作一个整体,提出“废宽度”的概念,示意图如图 1 所示,即在复合材料试件接近最终失效状态时,自由边附近早已提前发生面内失效或者层间失效,材料各个方向上的刚度和强度大幅度下降,认为在该宽度范围内的材料放弃承担外载荷。在一定的载荷水平下,层合板内各层在自由边附近的损伤模式和损伤水平不相同,将各层的损伤等效成层合板整体在一个等效宽度

范围内的损伤。鉴此,本文假设:在试件边缘附近一定宽度范围内,受到自由边效应的影响材料不承受任何外载荷。剩余中间部分材料由于不受自由边效应的影响,板内应力相当于无限大板宽情况下的应力,表达式为

$$\sigma_{\infty} = \frac{F}{(w - 2b)t} \quad (4)$$

式中:  $\sigma_{\infty}$  为无限大板宽时板内应力;  $b$  为单边“废宽度”;  $F$  为施加的外载荷;  $w, t$  分别为试件的宽度和厚度。随着载荷的增加,自由边附近的损伤进一步演化,故“废宽度”随着外载荷的增加而增加,直至层合板最终失效。考虑公式,试件的失效强度随着宽度的变化规律为

$$X_2 = \frac{F}{wt} = \frac{X_{\infty}(w - 2B)t}{wt} = X_{\infty} \left(1 - \frac{2B}{w}\right) \quad (5)$$

式中:  $X_{\infty}$  为无限大板宽的最终失效强度;  $B$  为试件失效时的“废宽度”。

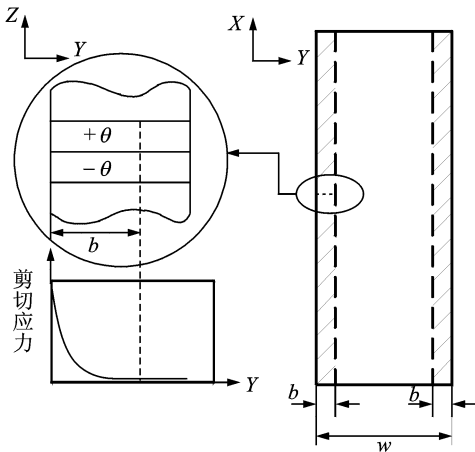


图 1 “废宽度”示意图

Fig. 1 Schematic drawing of waste width

根据层间应力分析,若层合板铺层和厚度相同,则不同宽度的试件自由边面内和层间应力分布完全相同,由于失效“废宽度”是层合板自由边处三维应力和材料强度的函数,因此具有相同的“废宽度”。随着试件宽度的增加,自由边效应的影响区域所占试件的比例逐渐减小。Wisnom<sup>[5]</sup>在其论文中也提到,当试件宽度大于自由边效应完全扩散所需要宽度的时候,无宽度尺寸效应。若层合板的铺层和厚度不同,试件边缘的面内和层间应力分布不同,故“废宽度”亦不同。所以确定不同铺层和厚度试件的“废宽度”,需要详细研究铺层方式和厚度对最终失效强度的影响,包括损伤失效模式以及不同模式间的相互作用和演化规律,或者通过试验的方法来确定待定系数。

### 1.2.2 “废宽度”的求解方法

采用 Kassapoglou 和 Lagace<sup>[12-13]</sup> 提出的“力平衡方法”(又称 KL 方法)求解自由边的应力分布。以均衡角铺设层合板  $[\pm\theta]_{ns}$  为例,自由边的层间剪切应力分布的表达式为

$$\sigma_{13}^{(i)} = \varphi e^{-\varphi x} (\sigma_{12[\theta_i]}^t z + B_2^{(i)}) \quad (6)$$

该式表示第  $i$  层层间剪切应力。式中:  $\sigma_{12[\theta_i]}^t$  为第  $i$  层面内剪切应力,可以用经典层合板理论(CLT)求得;  $B_2^{(i)}$  为其他各层面内剪切应力对第  $i$  层层间剪切应力的累积作用;  $\varphi$  为剪切应力衰减因子。 $\varphi$  值越大说明自由边附近层间剪切应力衰减速度越快,自由边效应所影响区域的宽度越小。图 2 给出了不同铺层角的自由边处应力分布。 $\varphi$  随铺层角改变的变化趋势如图 3 所示,图中可以看出衰减因子  $\varphi$  随着铺层角度的增加先下降后上升。

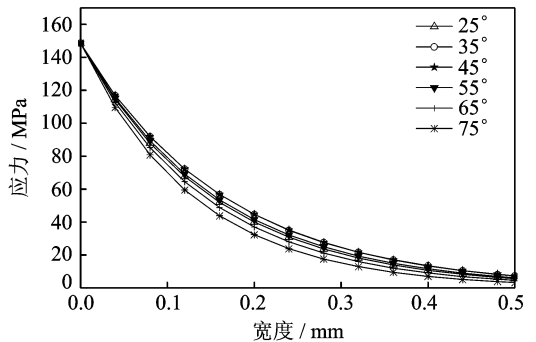


图 2 不同铺层角铺设层合板自由边处层间剪切应力分布  
Fig. 2 Interlaminar shear stress distribution near free-edge of different angle-ply laminates

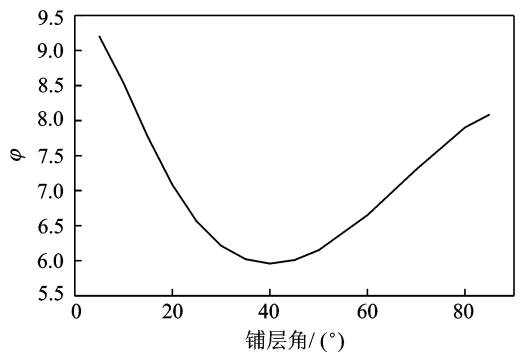


图 3 剪切应力衰减因子  $\varphi$  随着铺层角的变化趋势  
Fig. 3 Change of  $\varphi$  (the decay factor of shear stress) with ply angle

均衡角铺设层合板在轴向静拉伸时主要有两种失效模式:层间分层和面内失效。在铺层角较小时,表现为层间分层或是基体剪切应力造成的纤维断裂;铺层角较大时,为面内基体裂纹。面内应力用 CLT 方法进行计算,失效判定采用二维 Hashin<sup>[14]</sup> 准则。层间的应力分布用 KL 方法计算,失效

判定采用 Kim 和 Soni<sup>[15]</sup> 提出的平均应力准则。求解过程采用载荷增量方法:层合板加载初始应力,判断是否发生面内失效或者层间失效,如果未失效,层合板继续加载,若发生失效,则根据以下判定公式计算“废宽度”

$$\sigma_{13} > \beta[\tau_{13}] \quad (7)$$

式中: $\sigma_{13}$  为层间剪切应力; $[\tau_{13}]$  为层间剪切强度; $\beta$  为比例因子。当自由边层间剪切应力满足判定公式时,说明该区域材料已经不能继续承载,这部分材料宽度即为“废宽度”。计算流程如图 4 所示。

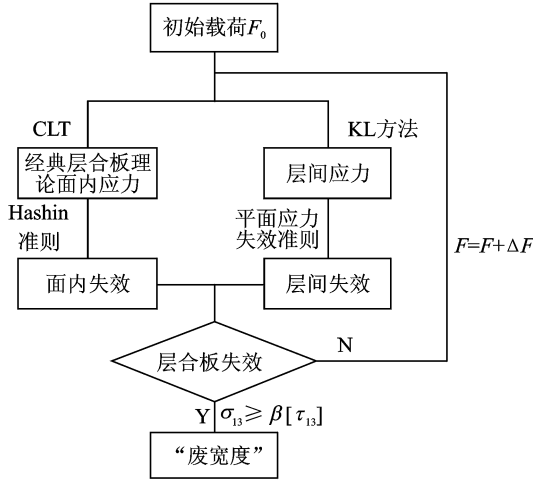


图 4 角铺设层合板“废宽度”计算流程图

Fig. 4 Computing flow scheme of waste width for angle-ply laminates

### 1.3 混合模型

统计尺寸效应呈现出失效强度随着试件宽度增加而下降的趋势,而自由边效应则是强度随着试件宽度增加而上升。宽度尺寸效应是统计尺寸效应和自由边效应共同作用的结果,并且不同铺层这两种效应影响因素所占比例不同,故可能表现出最终失效强度随着宽度增加而上升、下降、先上升后下降或者先下降后上升的现象。由此本文提出一个宽度尺寸效应的混合模型

$$X = CX_1 + (1 - C)X_2 = CX_0 \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^{\frac{1}{m}} + X_\infty (1 - C) \left( 1 - \frac{2B}{\omega} \right) \quad (8)$$

式中: $\omega_0, X_0$  为一组参考宽度和强度, $X_0$  由基于“废宽度”的自由边效应公式确定。当试件为参考宽度  $\omega_0$  时,最终失效强度  $X = X_0$ 。 $C$  为权重系数,不同铺层权重系数取值不同。

## 2 试验验证

Kujawski<sup>[11]</sup> 对角铺设层合板  $[\pm \theta_2]_s$  的静拉

伸强度进行试验研究。试件采用 E 玻璃纤维/1003 环氧树脂复合材料,包含 6 种铺层角 ( $\pm 25 \sim \pm 75^\circ$ ) 和 5 种不同宽度,几何形状见图 5,不同铺层角和不同宽度试件的静拉伸强度均值统计见表 1。

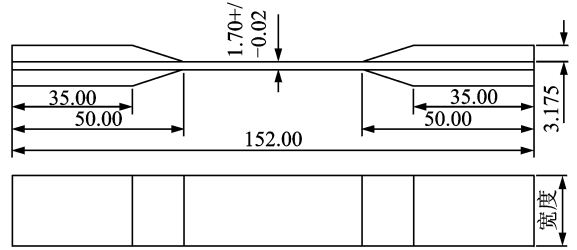


图 5 试件几何形状

Fig. 5 Geometrical shape of specimen

表 1 Kujawski 试验静拉伸强度均值

Tab. 1 Static mean strength in experiment from Kujawski

铺层	w/mm				
	4.5	7.6	10.5	16.0	20.5
$[\pm 25_2]_s$	405.6	459.0	476.0	498.1	497.3
$[\pm 35_2]_s$	286.4	320.2	335.6	344.5	344.9
$[\pm 45_2]_s$	135.5	165.2	178.2	192.2	193.1
$[\pm 55_2]_s$	70.0	77.1	78.0	83.3	81.6
$[\pm 65_2]_s$	61.9	65.1	66.1	68.7	70.2
$[\pm 75_2]_s$	49.4	51.6	52.6	52.3	53.1

混合模型中共有 4 个待定参数:权重系数  $C$ 、Weibull 函数形状参数  $m$ 、无限大板宽最终失效强度  $X_\infty$ 、试件失效“废宽度” $B$ 。其中, $B$  根据图 4 中的“废宽度”计算流程对不同铺层角分别计算。流程中的比例因子  $\beta$ ,通过比较计算一种铺层下的“废宽度”和公式拟合得到的结果获得。对于其他 5 种铺层,可以采用其中 4 种宽度的强度数据拟合另外 3 个待定参数,再用第 5 种宽度的强度数据检验混合模型的正确性。

为了在统一的尺度下比较不同铺层角的试验数据,用同一种铺层下不同宽度试件中静强度最大值对该铺层的静强度值进行归一化处理。根据铺层角为  $25^\circ$  的试验数据,拟合得到 4 个待定系数,见表 2。通过比较该铺层下“废宽度” $B$  拟合结果和计算结果,确定了比例因子  $\beta$  为 0.002 8,进而计算得到其他铺层角的“废宽度” $B$ ,见表 3。

表 2 不同铺层的角铺设层合板公式中待定系数

Tab. 2 Undetermined coefficients in equation of different angle-ply laminates

铺层	C	m	B	$X_\infty$	$R^2$
$[\pm 25_2]_s$	0.49	13.57	1.05	1.27	99.5%

表 3 “废宽度” $B$  计算值Tab. 3 Computing values of waste width  $B$ 

铺层	$B/\text{mm}$
$[\pm 35_2]_s$	1.14
$[\pm 45_2]_s$	0.94
$[\pm 55_2]_s$	0.60
$[\pm 65_2]_s$	0.34
$[\pm 75_2]_s$	0.40

根据前 4 种宽度的试验数据,拟合得到公式,除“废宽度”外,其余 3 个待定系数见表 4,表中亦给出第 5 种宽度的预测强度,以及预测结果的相对误差。

结果发现式(8)对试验数据的拟合度良好,相关系数均在 95% 以上。前 3 种铺层角拟合结果相对于后 3 种铺层角较好,根据试验中不同铺层角的

表 4 式(8)待定系数与第 5 种宽度强度预测情况

Tab. 4 Prediction of coefficient in equation (8) and the fifth width specimen strength

铺层	$X_\infty$	$C$	$m$	$R^2/\%$	$X_5$	$X_{50}$	相对误差/%
$[\pm 35_2]_s$	1.68	0.66	16.34	99.8	1.01	1.00	1.10
$[\pm 45_2]_s$	1.20	0.19	97.85	99.7	1.02	1.00	1.33
$[\pm 55_2]_s$	1.14	0.31	99.65	95.4	1.00	0.98	1.90
$[\pm 65_2]_s$	1.06	0.17	79.89	96.0	1.00	1.02	-2.30
$[\pm 75_2]_s$	1.15	0.23	4.36	96.3	1.00	1.01	-0.90

失效模式认为,前 3 种铺层角损伤的萌生与扩展随机影响较弱,试验结果分散性较小,进而试验值与式(8)吻合较好。后 3 种铺层角的失效模式均以基体裂纹为主,对材料的初始缺陷较为敏感,试验结果分散性较大,又因为试验件数量较少,故试验值和式(8)偏差相对较大。

根据“废宽度”计算方法,计算得到 5 种铺层的“废宽度”,并作为已知参数,对其余 3 个待定参数进行拟合,用式(8)拟合第 5 种宽度的破坏强度,预测结果误差均在 3% 以内。

### 3 讨 论

均衡角铺设层合板损伤的萌生和演化过程主要是受到统计尺寸效应和自由边效应影响。铺层角较小时,主要受到自由边效应的影响,在试件边缘萌生分层;铺层角较大时,基体裂纹大多在随机分布的固有缺陷处萌生导致最后断裂,最终失效时试件边缘亦受到自由边效应的影响存在分层损伤,故两种效应对最终失效都有贡献;当铺层角位于以上两种情况之间时,失效过程较为复杂,不过亦可以等效成两种效应同时作用的结果。综合两种效应,不同宽度试件最终失效强度呈现试验中的变化规律。混合模型正是基于这两种效应建立,满足合理性。

在分析自由边效应时,前人提出的平均应力模型等仅给出了自由边效应对分层失效强度的影响,由试件宽度不影响自由边处层间应力分布,推出不同宽度试件同时发生分层失效的结论,需要进一步

研究分层等损伤的演化规律,方能给出自由边效应对宽度尺寸效应的影响。本文的混合模型提出“废宽度”的概念,把层合板看作一个整体,给出自由边效应影响下最终失效强度的表达形式。

“废宽度”的概念适用于任意铺设层合板。本文以均匀角铺设层合板为例,根据损伤规律给出了该铺层形式下的计算流程,并用计算结果进一步拟合其余待定参数,从而得到试验件宽度修正的公式。其他铺层下求解“废宽度”,可以借助有限元仿真等工具详细研究对应损伤的萌生、演化规律,或者通过试验的方法亦可得到。

### 4 结 论

(1)通过对复合材料宽度尺寸效应的影响因素进行分析,认为 FRP 宽度尺寸效应是由统计尺寸效应和自由边效应共同作用的结果。

(2)提出“废宽度”的概念来解释自由边效应,建立了自由边效应和最终失效强度间的关系。

(3)对两种效应进行详细分析后,提出了基于两种效应的混合模型,并用 Kujawski 的试验结果验证混合模型的合理性。混合模型解释了宽度对最终失效强度影响的变化趋势,说明了宽度尺寸效应在复合材料中确实存在,并准确地预测不同宽度试件的失效强度,从而提高使用该材料体系强度值进行分析的可靠性。

#### 参考文献:

- [1] Sutherland L S, Sheno R A, Lewis S M. Size and scale effects in composites: I. Literature review[J].

- Composites Science and Technology, 1999, 59(2): 209-220.
- [2] Weibull W. A statistical theory of the strength of materials [J]. Ingeniorsvetenscapsakademien Handlingar, 1939, 151: 1-29.
- [3] Daniels H E. The statistical theory of the strength of bundles of threads[C]//Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Mathematical and Physical Sciences. London:[s. n.],1945, 183: 405-435.
- [4] Okabe T, Takeda N. Size effect on tensile strength of unidirectional CFRP composites—Experiment and simulation[J]. Composites Science and Technology, 2002, 62(15): 2053-2064.
- [5] Wisnom M R. Size effects in the testing of fibre-composite materials[J]. Composites Science and Technology, 1999, 59(13): 1937-1957.
- [6] Tabiei A, Sun J. Analytical simulation of strength size effect in composite materials [J]. Composites Part B: Engineering, 2000, 31(2): 133-139.
- [7] Wisnom M R, Khan B, Hallett S R. Size effects in unnotched tensile strength of unidirectional and quasi-isotropic carbon/epoxy composites[J]. Composite Structures, 2008, 84(1): 21-28.
- [8] Hallett S R, Jiang W, Khan B, et al. Modelling the interaction between matrix cracks and delamination damage in scaled quasi-isotropic specimens[J]. Composites Science and Technology, 2008, 68(1): 80-89.
- [9] Camanho P P, Maimí P, Dávila C G. Prediction of size effects in notched laminates using continuum damage mechanics [J]. Composites Science and Technology, 2007, 67(13): 2715-2727.
- [10] Wisnom M R, Atkinson J W. Reduction in tensile and flexural strength of unidirectional glass fibre-epoxy with increasing specimen size [J]. Composite Structures, 1997, 38(1/2/3/4): 405-411.
- [11] Kujawski D. Width effects on the tensile strength and fatigue behavior of angle-ply laminates[J]. International Journal of Fatigue, 1998, 20(8): 575-580.
- [12] Lagace P A, Kassapoglou C, Composites M I O T. An efficient method for the calculation of interlaminar stresses in composite materials: The force balance method[M]. [S. l.]: Technology Laboratory for Advanced Composites, Massachusetts Institute of Technology, 1985.
- [13] Kassapoglou C, Lagace P A. Closed form solutions for the interlaminar stress field in angle-ply and cross-ply laminates [J]. Journal of Composite Materials, 1987, 21(4): 292-308.
- [14] Hashin Z. Failure criteria for unidirectional fiber composites[J]. Journal of Applied Mechanics, 1980, 47(2): 329-334.
- [15] Kim R Y, Soni S R. Experimental and analytical studies on the onset of delamination in laminated composites [J]. Journal of Composite Materials, 1984, 18(1): 70-80.