

含橡胶隔振器振动系统动态特性研究

唐振寰 罗贵火 陈伟 杨喜关

(南京航空航天大学能源与动力学院,南京,210016)

摘要:以 APU 隔振器为研究对象,提出采用五参数分数导数建立橡胶隔振器本构模型。推导了含橡胶隔振器振动系统的非线性动力学有限元方程式。分析了隔振器结构参数变化对传递率特性的影响。研究表明:文中的数值计算方法能更好地预测含橡胶隔振器振动系统的动态特性。

关键词:橡胶隔振器;分数导数;黏弹性;有限元;动态特性

中图分类号:O328 **文献标志码:**A **文章编号:**1005-2615(2014)02-0285-07

Dynamic Characteristics of Vibration System Including Rubber Isolator

Tang Zhenhuan, Luo Guihuo, Chen Wei, Yang Xiguan

(College of Energy and Power Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China)

Abstract: A nonlinear dynamics constitutive model of rubber isolator is established by making use of five-parameter fractional derivative. The finite element formulation of vibration system with rubber isolator is derived. The transmissibility characteristics are study by changing the structure parameters of isolator. Results show that the dynamic properties of vibration system with rubber isolator can be predicted by the numerical calculation methods.

Key words: rubber isolator; fractional derivative; viscoelasticity; finite element; dynamic characteristics

橡胶材料属于黏弹性材料,最早模拟黏弹性橡胶材料的动力学本构模型是 Maxwell 模型和 Kelvin-Voigt (K-V)模型。这些模型在一定程度上能很好地吻合试验数据,但是模型并不能反映加载历史的影响。分数导数的引用,可以较好地解决这一问题。最早将分数导数应用于黏弹性材料动力学本构模型的是方法是将分数导数代替传统粘性原件的动力学本构模型。后续很多学者做出了相关研究。

文献[1]提出一种分数导数本构模型,并给出解析解。文献[2,3]提出一种 4 参数分数导数本构模型和一种分数导数本构模型,详细讨论了各个参数对损失系数、损失模量的影响。文献[4]提出采用分数导数 Zener 模型来模拟聚合体材料动态特性。文献[5]提出 3 阶梯分数导数 Zener 模型来模

拟聚合物材料动态特性,利用试验方法测量了各个温度下模型参数。文献[6~8]提出 3 力叠加分数导数动力学本构模型,采用弹性、黏弹性、摩擦力 3 个模型叠加形成材料动力学本构模型,描述力与位移的关系。文献[9]研究发现采用分数导数 Zener 模型来模拟聚合体材料动态性能能获得较好效果。文献[10]研究了 Zener 分数导数模型的各个参数对阻尼的影响。文献[11]提出了分数导数算子与弹簧串联再与一个粘性阻尼原件并联的模型。这些研究完善了含聚合体材料的系统动态特性描述,但与振动试验结果仍然存在误差^[12-14]。

本文依据飞机辅助动力装置(Auxiliary power unit, APU)隔振器的宽频工作特性,发展了一种五参数分数导数描述橡胶隔振器动力学本构关系,

推导了含橡胶隔振器振动系统的非线性动力学有限元方程,并给出数值解法;比较了不同本构模型对橡胶隔振器振动系统传递率计算结果,并进行了试验验证;分析了结构参数变化对传递率特性的影响。

1 隔振器橡胶材料本构模型和参数识别

橡胶材料本构关系具有强烈的非线性,开展隔振器振动系统的有限元分析,关键因素在于建立橡胶材料的本构关系。根据作者之前的研究,隔振器单自由度的动力学模型表达式如下^[15]

$$f(t) + af^{(\alpha)}(t) = bu(t) + cu^{(\beta)}(t) \quad (1)$$

式(1)为力与位移的关系,式中符号的含义见文献[15]。研究表明该模型能很好地预测单自由度橡胶隔振器在较宽频域范围内的动刚度特性。为了反映隔振器性能参数与结构参数的关系和橡胶隔振器三向隔振的特点,本文在文献[15]的基础上发展了一种三维本构模型。考虑到力与位移和应力与应变之间的对应关系,假设橡胶隔振器材料特性也存在类似五参数分数导数本构关系

$$\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{A} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{C} \frac{d^\beta}{dt^\beta} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2)$$

式中: $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 为模型参数矩阵; $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}$ 表达式为

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}$$

将五参数分数导数三维本构关系表示为球张量和斜张量的形式^[13]

$$\boldsymbol{\sigma}_h + \mathbf{A}_h \frac{d^{\alpha_h}}{dt^{\alpha_h}} \boldsymbol{\sigma}_h = \mathbf{B}_h \boldsymbol{\varepsilon}_h + \mathbf{C}_h \frac{d^{\beta_h}}{dt^{\beta_h}} \boldsymbol{\varepsilon}_h \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_d + \mathbf{A}_d \frac{d^{\alpha_d}}{dt^{\alpha_d}} \boldsymbol{\sigma}_d = \mathbf{B}_d \boldsymbol{\varepsilon}_d + \mathbf{C}_d \frac{d^{\beta_d}}{dt^{\beta_d}} \boldsymbol{\varepsilon}_d \quad (4)$$

式中: $\mathbf{A}_h = a_h \mathbf{I}, \mathbf{A}_d = a_d \mathbf{I}, \mathbf{B}_h = b_h \mathbf{T}, \mathbf{B}_d = b_d \mathbf{T}, \mathbf{C}_h = c_h \mathbf{T}, \mathbf{C}_d = c_d \mathbf{T}$ 。 a, b, c 为模型参数,下标h表示球张量,下标d表示斜张量。

由式(3,4)可以得到

$$\boldsymbol{\sigma} + \left(a_h \mathbf{T}_h \frac{d^{\alpha_h}}{dt^{\alpha_h}} + a_d \mathbf{T}_d \frac{d^{\alpha_d}}{dt^{\alpha_d}} \right) \boldsymbol{\sigma} = (b_h + b_d) \mathbf{T} \boldsymbol{\varepsilon} + \left(c_h \mathbf{T}_h \frac{d^{\beta_h}}{dt^{\beta_h}} + c_d \mathbf{T}_d \frac{d^{\beta_d}}{dt^{\beta_d}} \right) \mathbf{T} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5)$$

当材料为纯弹性时, $a_h = a_d = c_h = c_d = 0$,令

$b_h = 3K, b_d = 2G$ 即为广义胡克定律的张量表示形式。式中 K 为体积模量, G 为剪切模量。斜张量部分参数可以由下节参数识别得到,本文假设斜张量参数与球张量部分参数相等,相关依据和误差分析见文献[13],式(5)简化为

$$\boldsymbol{\sigma} + a \mathbf{I} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \boldsymbol{\sigma} = b \mathbf{T} \boldsymbol{\varepsilon} + c \mathbf{T} \frac{d^\beta}{dt^\beta} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (6)$$

式中:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \boldsymbol{\sigma} \text{ 为应力}; \boldsymbol{\varepsilon} \text{ 为应变}; a,$$

b, c 为模型参数; α, β 为分数导数系数。

由于式(6)中包含分数导数,应力和应变并不能直接求得,故将其变换到频域进行参数识别。剪切模量的表达式为^[15]

$$G(\omega) = G_d(\omega) + jG_1(\omega) = \frac{b + c(j\omega)^\beta}{1 + a(j\omega)^\alpha} \quad (7)$$

式中: $G(\omega)$ 为剪切模量; $G_d(\omega)$ 为剪切储存模量; $G_1(\omega)$ 为剪切损失模量。将式(7)化简可得

$$G_d(\omega) = \frac{b + ba\omega^\alpha \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + c\omega^\beta \cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) + ac\omega^{\alpha+\beta} \cos\left(\frac{(\alpha+\beta)\pi}{2}\right)}{1 + a^2\omega^{2\alpha} + 2a\omega^\alpha \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \quad (8)$$

$$G_1(\omega) = \frac{c\omega^\beta \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) - ab\omega^\alpha \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + ac\omega^{\alpha+\beta} \sin\left(\frac{(\alpha+\beta)\pi}{2}\right)}{1 + a^2\omega^{2\alpha} + 2a\omega^\alpha \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \quad (9)$$

通过对橡胶动态特性的试验测得剪切模量的实部 $G_d(\omega)$ 与虚部 $G_1(\omega)$,即可确定模型中的各参数。动态特性试验的试验件如图1所示。

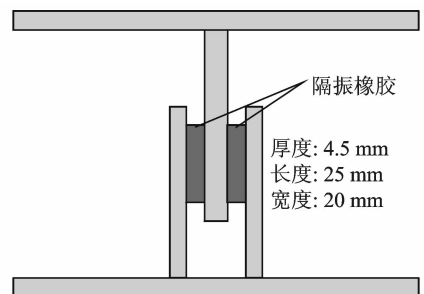


图1 动态特性试验剪切模量试验件

Fig. 1 Test piece of dynamic characteristics test shear modulus

试验激励频率范围为:20~500 Hz,测量隔振器在稳态的正弦激励下的剪切动态模量,试验原理见图 2,识别黏弹性材料模型参数。试验数据应去除试验数据里夹具附加质量的影响^[8]。通过最小二乘法拟合,得到五参数分数导数模型中的参数 a, b, c, α, β 。表 1 为橡胶试件本构模型的参数识别结果。拟合效果图见图 3。

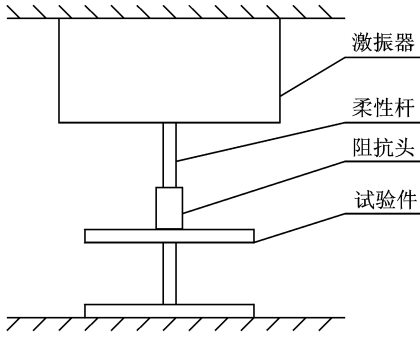


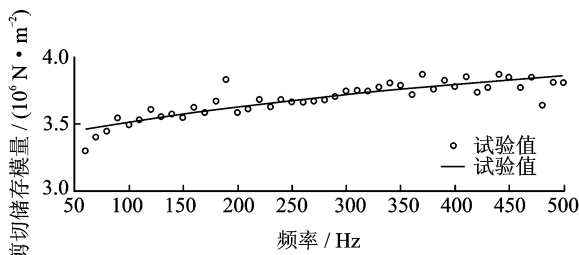
图 2 动态试验原理图

Fig. 2 Schematic diagram of dynamic test

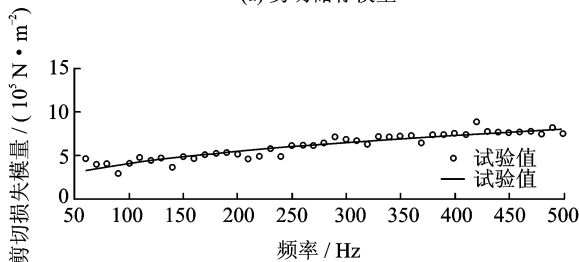
表 1 隔振器橡胶材料本构模型参数拟合结果表

Tab. 1 Parameter fitting of isolator rubber constitutive model

参数	a	b	c	α	β
拟合值	5.94×10^{-2}	3.62×10^6	9.08×10^4	0.18	0.40
单位	s^α	$N \cdot m^{-2}$	$N \cdot s^\beta \cdot m^{-2}$	无量纲	无量纲



(a) 剪切储存模量



(b) 剪切损失模量

图 3 五参数分数导数本构模型对试验数据的拟合

Fig. 3 Fitting test data by five-parameter fractional derivative constitutive model

2 隔振器非线性动力学有限元数值分析

本节将含分数导数因子的本构关系代入有限元基本方程,给出了非线性有限元方程的解法。APU 橡胶隔振器结构如图 4 所示。隔振器由外刚环、内刚环、橡胶 3 个部分组成。外环与飞机相连,内环与 APU 相连。



图 4 APU 橡胶隔振器结构示意图

Fig. 4 Structural graph of rubber isolator

参考隔振器橡胶实际结构,采用 8 节点 6 面体单元划分有限元网格,共分 576 个节点,324 个单元,有限元模型如图 5 所示。内环直径为 23 mm,外环直径为 34 mm,高度为 28 mm。由于隔振器内外钢环的质量相对 APU 系统质量很小,本文忽略隔振器内外钢环质量的影响,在有限元模型的内径圆柱面和外径圆柱面上分别施加位移协调来模拟内外钢环运动。

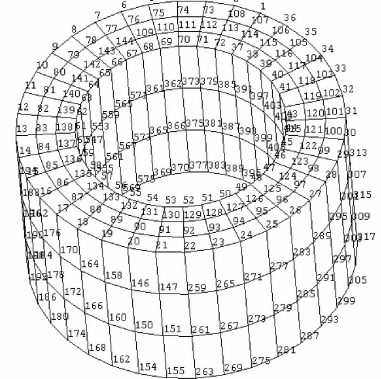


图 5 橡胶结构有限元模型图

Fig. 5 Finite element model of rubber structure

设单元位移矩阵为 q , 节点矩阵为 u , 单元形函数为 N , 由虚功原理得到系统的运动方程

$$\int_V B^T \sigma dV + M \ddot{u} = r \quad (10)$$

式中: $\mathbf{M} = \int_V \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV$; ρ 为材料密度; \mathbf{r} 为外力矩阵; \mathbf{B} 为几何矩阵。

式(10)为非线性有限元方程,该方程中含有非线性本构关系,不可能直接进行求解,需进行必要的简化。将系统运动方程式(11)写成 t 时刻的形式有

$$\int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(t) dV + \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{r}(t) \quad (11)$$

分数导数有很多定义,均表示为无穷项和的形式,不可能直接进行数值计算,需进行适当简化^[6]。本文采用 Grunwald 定义,得到分数导数的一种近似解^[15]

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} \approx (\Delta t)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\frac{t}{\Delta t}-1} A_{j+1} f(t-j\Delta t) \quad (12)$$

式中: $A_{j+1} \equiv \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j+1)}$, $\alpha \in \mathbb{Q}$ 。系数 A_{j+1} 为 Grunwald 系数。

将式(12)代入式(11)得

$$\boldsymbol{\sigma}(t) + a(\Delta t)^{-\alpha} \mathbf{I} \sum_{j=0}^{N-1} A_{j+1}^{(\alpha)} \boldsymbol{\sigma}(t-j\Delta t) = b\mathbf{T}\boldsymbol{\varepsilon}(t) + c(\Delta t)^{-\beta} \mathbf{T} \sum_{j=0}^{N-1} A_{j+1}^{(\beta)} \boldsymbol{\varepsilon}(t-j\Delta t) \quad (13)$$

代入几何矩阵化简可得

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{G}_1 \mathbf{u}(t) + \mathbf{G}_2 \sum_{j=1}^{\frac{t}{\Delta t}-1} A_{j+1}^{(\beta)} \mathbf{u}(t-\Delta t j) - \mathbf{G}_3 \sum_{j=1}^{\frac{t}{\Delta t}-1} A_{j+1}^{(\alpha)} \boldsymbol{\sigma}(t-\Delta t j) \quad (14)$$

式中: $\mathbf{G}_1 = [\mathbf{I} + a(\Delta t)^{-\alpha} \mathbf{I}]^{-1} \times [(b\mathbf{T} + c(\Delta t)^{-\beta} \mathbf{T}) \mathbf{B}]$; $\mathbf{G}_2 = [\mathbf{I} + a(\Delta t)^{-\alpha} \mathbf{I}]^{-1} \times [c(\Delta t)^{-\beta} \mathbf{T} \mathbf{B}]$; $\mathbf{G}_3 = [\mathbf{I} + a(\Delta t)^{-\alpha} \mathbf{I}]^{-1} \times [-a(\Delta t)^{-\alpha} \mathbf{I}]$ 。

将式(14)代入式(11)可得

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}^* \mathbf{u}(t) = \mathbf{r}^*(t) \quad (15)$$

式中: $\mathbf{K}^* = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{B} dV$, $\mathbf{F} = \mathbf{I} + a(\Delta t)^{-\alpha} \mathbf{I}$,

$\mathbf{C}^* = b\mathbf{T} + c(\Delta t)^{-\beta} \mathbf{T}$; $\mathbf{r}^*(t) = \mathbf{r}(t) -$

$\Phi c(\Delta t)^{-\beta} \sum_{j=1}^{\frac{t}{\Delta t}-1} A_{j+1}^{(\beta)} \mathbf{u}(t-\Delta t j) + a(\Delta t)^{-\alpha} \Psi$, 其中,

$\Phi = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{B} dV$; $\Psi = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{F}^{-1} \sum_{j=1}^{\frac{t}{\Delta t}-1} A_{j+1}^{(\alpha)} \boldsymbol{\sigma}(t-\Delta t j) dV$ 。

采用直接积分法求解方程式(15)。在每个单元中计算的修改的刚度矩阵 \mathbf{K}^* 是不随时间变化的常量,而修改的力矩阵 $\mathbf{r}^*(t)$ 随应力和应变历史

的变化而变化。因此需在迭代计算的每步求解之前先计算修改的力矩阵 $\mathbf{r}^*(t)$ 。

在固定的激励频率下,求解方程式(15)即可得到整个时间段内的位移响应。位移响应幅值除以位移激励的幅值即为系统在固定频率下的传递率。求解各个频率下的传递率即可得到系统的传递率特性。

3 隔振器-质量系统传递率特性

3.1 传递率的计算与试验验证

传递率是隔振器性能的主要指标。本节应用上节非线性动态特性有限元分析法,计算了隔振器的传递率,并进行了试验验证。试验安装示意图如图6所示。文中将隔振器内外环圆柱高的方向设为轴向,内外环圆柱直径方向设为径向。不同的系统质量,隔振器的传递特性也不相同,因此分析隔振器的传递特性必须先确定隔振器系统的质量。本文根据 APU 隔振器实际安装状态各隔振器的分布质量,计算和试验中均设定隔振器径向隔振的系统等效质量为 65 kg,隔振器轴向隔振的系统等效质量为 7 kg。

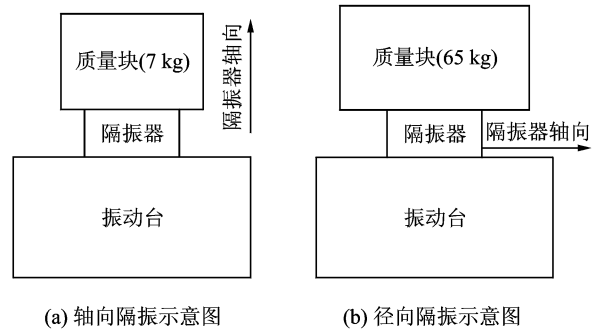


图6 轴向和径向隔振示意图

Fig. 6 Isolation graphs of axial and radial directions

给橡胶隔振器-等效质量系统一个位移激励,分别计算轴向和径向2个方向橡胶隔振器-等效质量系统的传递率,计算与试验结果见表2,3;隔振器轴向、径向传递率图见图7,8。

表1,2及图7,8中比较了3种典型橡胶材料本构模型的传递率。模型1为本文所采用五参数分数导数本构模型,模型2和模型3分别为分数导数K-V模型和K-V模型。模型表达式见式(16~18)。研究表明:K-V本构模型常用于弹性材料的描述,对黏弹性材料的预测结果较差;分数导数K-V模型通常用于描述黏弹性材料,但对含隔振器系统的共振频率和放大系数的预测不理想,本文采用的五参数分数导数模型对隔振器-质量系统

传递率的预测能达到较好效果。

模型 1:五参数分数导数模型

$$\sigma(t) + a\sigma^{(\alpha)}(t) = b\varepsilon(t) + c\varepsilon^{(\beta)}(t) \quad (16)$$

模型 2:分数导数 K-V 模型

$$\sigma(t) = b_1\varepsilon(t) + c_1\varepsilon^{(\theta)}(t) \quad (17)$$

式中: b_1, c_1, θ 为模型参数。

模型 3:K-V 模型

$$\sigma(t) = b_2\varepsilon(t) + c_2\dot{\varepsilon}(t) \quad (18)$$

式中: b_2, c_2 为模型参数。

表 2 各模型轴向传递率与试验值比较

Tab. 2 Axial direction transmissibility from every model compared with that from test

参数	共振点频率/ Hz	共振放大系数	400 Hz 处传 速率 / %
试验值	39	6.08	2.5
模型 1	41(误差 5.1%)	6.55(误差 7.7%)	2.0
模型 2	47(误差 20.5%)	6.83(误差 12.3%)	1.9
模型 3	66(误差 69.2%)	8.09(误差 33.1%)	3.5

表 3 各模型径向传递率与试验值比较

Tab. 3 Radial direction transmissibility from every model compared with that from test

参数	共振点频率/ Hz	共振放大系数	400 Hz 处传 速率 / %
试验值	23	3.43	4.0
模型 1	26(误差 13.0%)	4.05(误差 18.1%)	3.3
模型 2	30(误差 30.4%)	4.33(误差 26.2%)	2.2
模型 3	38(误差 65.2%)	6.15(误差 79.3%)	1.8

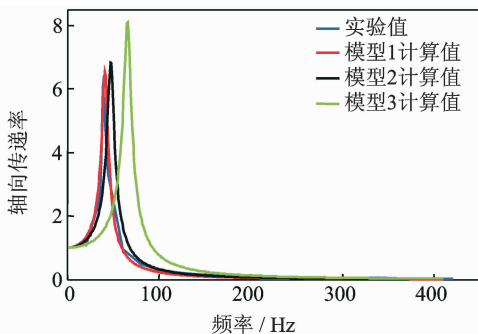


图 7 隔振器轴向隔振位移传递率图

Fig. 7 Displacement transmissibility in isolator axial direction

3.2 隔振器结构参数对传递率的影响

传递率是隔振器工作过程中最重要的性能指标,本节主要研究隔振器结构尺寸对隔振器振动传递特性的影响。橡胶隔振器主要轮廓尺寸设定为:高度 $h=28$ mm,外径 $D=34$ mm,内径 $d=23$ mm。

轴向隔振状态下,设定隔振器的轴向振动等效

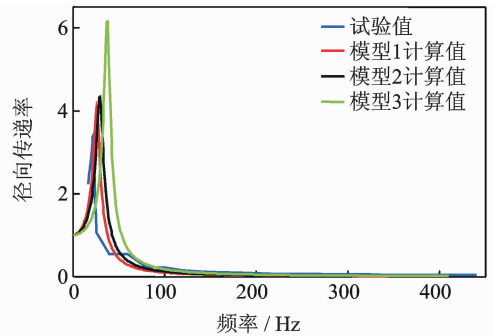
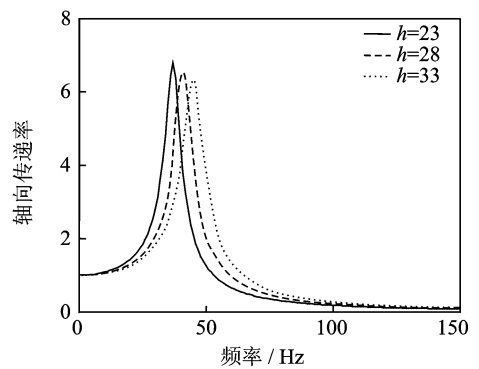


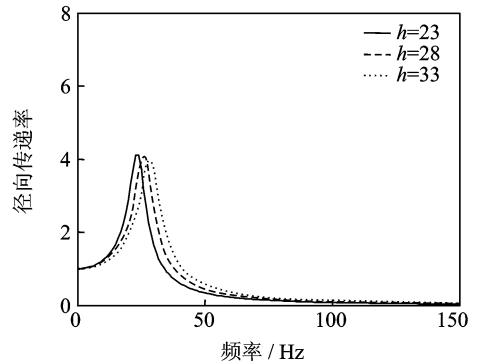
图 8 隔振器径向隔振位移传递率图

Fig. 8 Displacement transmissibility in isolator radial direction

质量载荷为 7 kg,轴向施加一个幅值为 0.001 mm 的稳态正弦位移激励。径向隔振状态下,设定径向振动等效质量载荷为 65 kg,径向施加一个幅值为 0.001 mm 的稳态正弦位移激励。激励频率范围为 0~150 Hz。采用第 2 节有限元法求解各个频率下的系统的稳态位移响应。位移响应幅值除以位移激励的幅值即为系统传递率。若其他尺寸不变,仅 h 变化时,传递率特性如图 9 所示;其他尺寸不变,仅 d 变化时,传递率特性如图 10 所示;其他尺寸不变,仅 D 变化时,传递率特性如图 11 所示。



(a) 轴向传递率



(b) 径向传递率

图 9 参数 h 对系统轴向和径向传递率的影响

Fig. 9 Influence of parameter h on axial direction and radial direction transmissibility

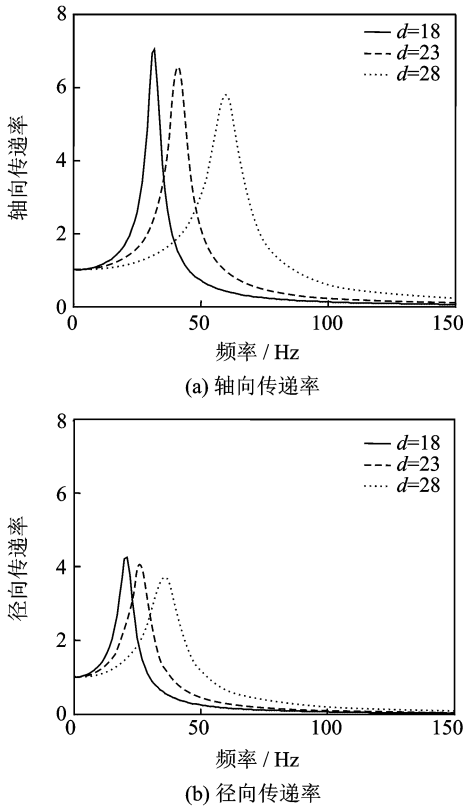


图 10 d 变化对系统轴向和径向传递率的影响
Fig. 10 Influence of parameter d on axial direction and radial direction transmissibility

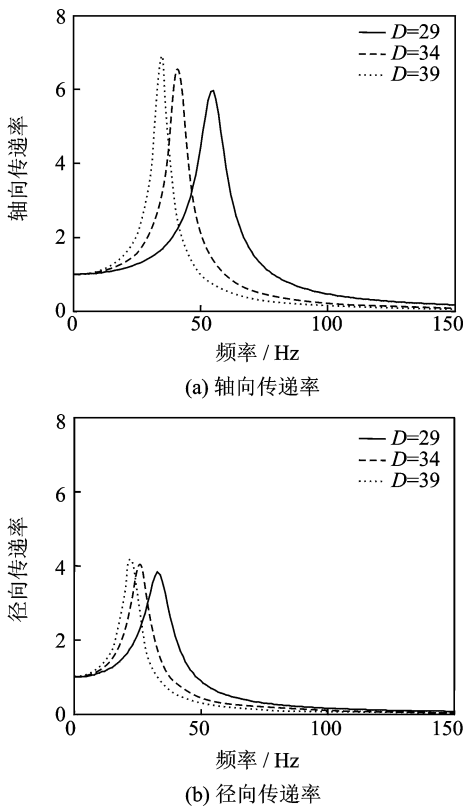


图 11 D 变化对系统轴向和径向传递率的影响
Fig. 11 Influence of parameter D on axial direction and radial direction transmissibility

比较轴向和径向传递率可以看出,随着结构参数的变化,轴向和径向结构尺寸引起传递率变化趋势基本相同。共振放大系数特性和高频传递率特性基本相反,降低共振放大系数必然提高高频传递率,反之亦然。

APU 隔振器一般要求隔振器轴向和径向隔振共振频率小于 50 Hz,共振放大系数小于 7,并在工作条件下(400 Hz 左右)使得隔振器系统轴向隔振和径向传递率最小。

4 结 论

本文对含橡胶隔振器振动系统动力学特性进行了分析研究,得到如下结论:

(1) 提出采用五参数分数导数描述橡胶隔振器的本构关系,拟合了模型参数,结果表明该模型能较好预测橡胶材料在较宽频率下的动态特性;

(2) 推导了含橡胶隔振器振动系统的非线性动力学有限元方程,给出了其数值解法,并与试验值比较。结果表明:该模型与数值计算方法能较好的预测含橡胶隔振器振动系统的动态特性;

(3) 隔振器合理的结构设计应是在满足一定的共振放大系数的基础上降低高频段的传递率,综合考虑轴向和径向传递率的要求。

参考文献:

- [1] Yu A R, Shitikova M V. Analysis of damped vibrations of linear viscoelastic plates with damping modeled with fractional derivatives[J]. Signal Processing, 2006,86(10):2703-2711.
- [2] Pritz T. Analysis of four-parameter fractional derivative model of real solid materials[J]. Journal of Sound and Vibration, 1996,195(1):103-115.
- [3] Pritz T. Five-parameter fractional derivative model for polymeric damping materials[J]. Journal of Sound and Vibration, 2003,265(5):935-952.
- [4] Djamel O. Combination of a standard viscoelastic model and fractional derivative calculus to the characterization of polymers[J]. Mat Res Innovat, 2003,7(1):42-46.
- [5] Nicole H. Constitutive equations for polymer viscoelasticity derived from hierarchical models in cases of failure of time-temperature superposition[J]. Signal Processing, 2003,83(1):2345-2357.
- [6] Sjoberg M. Rubber isolators-measurements and modelling using fractional derivatives and friction[J].

- SAE Technical Paper Serials, 2000-01-3518,2000.
- [7] Sjoberg M, Kari L. Non-linear behavior of a rubber isolator system using fractional derivatives[J]. Vehicle System Dynamics, 2002,37(3):217-236.
- [8] Sjoberg M. Nonlinear isolator dynamics at finite deformations: An effective hyperelastic, fractional derivative, generalized friction model [J]. Nonlinear Dynamics, 2003,33(3):323-336.
- [9] Pu Y, Sumali H, Gailard C. Modeling of nonlinear elastomeric mounts. Part 1: Dynamic Testing and Parameter Identification[J]. SAE Technical Paper Serials, 2001-01-0042,2001.
- [10] Kohandel M, Sivaloganathan S, Tenti G, et al. Frequency dependence of complex moduli of brain tissue using a fractional Zener model[J]. Phys Med Biol, 2005,50(12):2799-2805.
- [11] Haupt P, Lion A. On the dynamic behavior of polymers under finite strains: Constitutive modeling and identification of parameters[J]. International Journal of Solids and Structures, 2000,37(26):3633-3646.
- [12] Negrete N G, vinolas J, Kari L. A nonlinear rubber material model combining fractional order viscoelasticity and amplitude dependent effects[J]. Journal of Applied Mechanics,2009,76(1):011009.1-011009.9.
- [13] Schmidt A, Gaul L. Finite element formulation of viscoelastic constitutive equations using fractional time derivatives[J]. Nonlinear Dynamics, 2002,29(1/2/3/4):37-55.
- [14] Kim S Y, Lee D H. Identification of fractional-derivative-model parameters of viscoelastic materials from measured FRFs[J]. Journal of Sound and Vibration, 2009,324(3/4/5):570-586.
- [15] 唐振寰,罗贵火. 橡胶隔振器粘弹性五参数分数导数并联动力学模型[J]. 航空动力学报, 2013,28(2):275-282.
- Tang Zhenhuan, Luo Guihuo. Research on parallel dynamic model of rubber isolator about five parameters fractional derivatives[J]. Journal of Aerospace Power, 2013,28(2):275-282.

