

## 欧拉角在飞行航迹仿真中的应用

姬金祖 束长勇 黄沛霖

(北京航空航天大学航空科学与工程学院, 北京, 100191)

**摘要:**在考虑地球曲面影响时,飞机定常飞行过程中经度、纬度、航向角一般均在发生变化,以这些参数作为变量的仿真过程计算较为复杂。引入欧拉角表示飞机位置和航向的信息,能更直观反映飞机航迹的特性,计算过程非常简便,尤其在定常飞行情形下,只有一个参量发生变化。根据球面三角几何中的关系,欧拉角参数和经度、纬度、航向角参数可以方便进行换算。文中还推导了飞机转弯、交会、追逐过程中欧拉角参数表示方法。算例结果表明,用欧拉角参数方法能够有效、方便地表示飞机飞行过程中位置、航向及其变化的信息。

**关键词:**飞行仿真;球面几何;欧拉角;球面三角形;定常飞行

**中图分类号:** V249      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1005-2615(2014)02-0218-07

### Application of Euler Angles in Flight Path Simulation

*Ji Jinzu, Shu Changyong, Huang Peilin*

(School of Aeronautic Science and Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing, 100191, China)

**Abstract:** When considering earth curvature effect, airplane's longitude, latitude and heading angles are changing in cruising flight condition and simulation using these parameters is complex. Euler angles are introduced to represent the position and heading information of plane and it can directly reflect flying path characteristics, thus the calculation is simple and convenient, especially while the airplane is in steady flying conditions there is only one parameter varying. Euler parameters, the longitude, latitude, and heading angle convert conveniently according to spherical geometry. Euler parameters of the turning, crossing, tracing processes are deducted. The efficiency and convenience in representation of position, heading and variation by Euler parameters are validated by examples.

**Key words:** flying simulation; spherical geometry; Euler angle; spherical triangle; steady flying

飞行航迹仿真在航迹规划<sup>[1-3]</sup>、模拟作战<sup>[4]</sup>、飞行管道规划<sup>[5]</sup>中具有非常重要的作用。一般情况下,飞机飞行过程中经度、纬度、航向角不断变化<sup>[6-7]</sup>,例如某飞机在北半球某点初速度向东,飞行过程中不转弯,则一定时间后飞机航线就会偏南,进而飞过赤道到达南半球。用人们习惯的经纬度作为参量对飞行过程进行仿真,则计算过程较为复杂。当想定场景中的飞机较多时,计算量较大,对实时仿真有一定影响。同时,在对多架飞机的追逐、交会过程进行仿真时,涉及很多中间步骤的计算,仿真的速

度受到限制。文献[8, 9]采用大地坐标系来描述相关问题,提出坐标参数作为长度量的大地坐标系。文献[10]采用地理坐标系作为参考研究大范围内的航迹仿真,充分考虑了地球曲率。用这些方法表示的航迹,变量的变化仍然比较复杂。

本文提出一种采用 3 个欧拉角参量表示飞机当前位置、航向信息的方法,并可与经纬度、航向角方便换算。采用该方法后,在飞机定常飞行过程中,只有一个参数在发生变化,其余两个参数保持不变。这种方法可以大大简化仿真计算,提高仿真

**基金项目:**总装备部“十二五”预先研究项目资助项目。

**收稿日期:**2013-05-19; **修订日期:**2013-10-22

**通信作者:**姬金祖,男,讲师, E-mail: jijinzu@buaa.edu.cn。

效率。本文还推导了采用欧拉角参量表示飞机定常飞行、转弯、交会、追逐等过程,最后通过算例进行了验证,表明了该方法的有效性和简便性。

## 1 角度规定及球面三角形基础

### 1.1 角度规定

规定经度、纬度、航向角的符号:东经为正,角度范围为 $-\pi \sim \pi$ ;北纬为正,角度范围为 $-\pi/2 \sim \pi/2$ ;飞机航向角以正北为起始方向,顺时针偏转为正,角度范围为 $-\pi \sim \pi$ 。文中主要针对飞机飞行过程中位置、航向变化的计算,不考虑地球自转、公转等效应,并假设地球是一个理想球体。文中定义以下概念及参数:

定常飞行:指飞机在一定高度沿大圆的飞行。

航迹平面:过速度方向和地心的平面。

当前航迹:航迹平面与地球表面的交线。

升交点:定常飞行中飞机由南半球到北半球过赤道的点。航迹平面与赤道面重合时,可定义赤道上任一点为升交点。

赤经 $\omega$ :升交点的经度,范围为 $-\pi \sim \pi$ 。

倾角 $\theta$ :航迹平面与赤道面所成的角度,范围为 $0 \sim \pi$ 。

幅角 $\varphi$ :升交点与飞机当前位置关于地心所成的张角,范围为 $-\pi \sim \pi$ 。

上述航迹平面、当前航迹、升交点、赤经、倾角、幅角等均为瞬时量,可能随运动状态的改变而改变。 $\omega, \theta, \varphi$ 称为欧拉角,飞机的位置、航向由其完全决定,如图 1 所示。

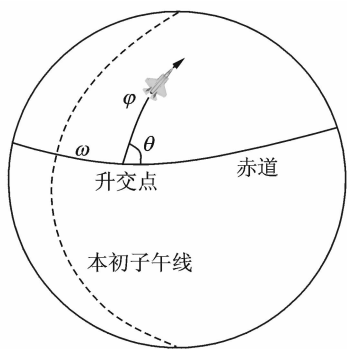


图 1 欧拉角示意图

Fig. 1 Schematic diagram of Euler angle

### 1.2 球面三角形几何关系

如图 2 所示,以球面上 3 个点  $A, B, C$  为端点的大圆弧组成的图形称为球面三角形,这 3 个点称为顶点,大圆弧称为边。大圆弧在顶点切线的夹角定义为顶点角度,大圆弧角度定义为边长。各角所

对边长为  $\alpha, \beta, \gamma$ , 则有下列关系

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A \quad (1)$$

$$\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos\alpha \quad (2)$$

$$\frac{\sin A}{\sin\alpha} = \frac{\sin B}{\sin\beta} = \frac{\sin C}{\sin\gamma} \quad (3)$$

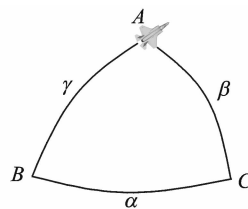


图 2 球面三角形示意图

Fig. 2 Schematic diagram of spheric triangle

式(1,2)称为余弦公式,式(3)称为正弦公式。有一个角是直角的球面三角形称为直角三角形,在直角三角形中可根据除直角外的边长和角度任意两个量来计算其余 3 个量。设角  $C = \pi/2$ , 则  $\cos C = 1, \sin C = 0$ , 得三组关系:

三边关系式

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta \quad (4)$$

两边与一角关系式

$$\sin A = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}, \sin B = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \quad (5)$$

$$\cos A = \frac{\tan\beta}{\tan\gamma}, \cos B = \frac{\tan\alpha}{\tan\gamma} \quad (6)$$

$$\tan A = \frac{\tan\alpha}{\sin\beta}, \tan B = \frac{\tan\beta}{\sin\alpha} \quad (7)$$

一边与两角的关系

$$\cos A = \sin B\cos\alpha, \cos B = \sin A\cos\beta \quad (8)$$

$$\cos\gamma = \cot A\cot B \quad (9)$$

### 1.3 经纬度与欧拉角的换算

如图 2 所示,飞机位于  $A$ , 升交点为  $B$ , 经线与赤道交点为  $C$ , 三边长为  $\alpha, \beta, \gamma$ , 则  $B$  为倾角,  $\gamma$  为幅角,  $\beta$  为纬度,  $A$  为航向角,  $\alpha$  为经度和赤经之差。根据球面直角三角形公式,可以实现欧拉角与经度、纬度、航向换算。

由欧拉角求经纬度和航向角,等价问题为已知此直角三角形的  $B$  及  $\gamma$ , 求  $\alpha, \beta, A$ 。根据式(5,6,9)容易求出。

若由经度、纬度、航向角,求欧拉角,则问题变成已知  $\beta$  及  $A$ , 求其他量,公式如下

$$\alpha = \arctan 2(\sin A \sin\beta, \cos A) \quad (10)$$

$$B = \arccos(\sin A \cos\beta) \quad (11)$$

$$\gamma = \arctan 2(\sin\beta, \cos\beta\cos A) \quad (12)$$

设飞机经度为  $\alpha_1$ , 赤经、倾角、幅角分别为  $\alpha_1 - \alpha, B, \gamma$ 。



$$\cos\varphi' = \cos\varphi\cos\alpha - \frac{\sin^2\varphi}{\sin\theta'}\sin\epsilon\cos\theta \quad (23)$$

式(22,23)联立求解  $\cos\alpha$  和  $\cos\varphi'$ , 得

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sin\theta'}(\sin\theta\cos\epsilon - \cos\varphi\sin\epsilon\cos\theta) \quad (24)$$

$$\cos\varphi' = \frac{1}{\sin\theta'}(\cos\varphi\sin\theta\cos\epsilon - \sin\epsilon\cos\theta) \quad (25)$$

原地转弯后欧拉角则为  $\omega - \alpha, \theta', \varphi'$ 。

## 2.4 航迹交会点计算

两个不同的大圆一定有两个交点, 要么分布在南北半球, 要么均在赤道上。如图 5 所示, 设两条航迹的欧拉角分别为  $\omega_1, \theta_1$  和  $\omega_2, \theta_2$ , 求交会点对应的  $\varphi_1, \varphi_2$ 。

设  $\alpha = \omega_2 - \omega_1$ , 若  $\alpha = 0$  或  $\alpha = \pi$ , 则两架飞机航迹交会点位于赤道。设交会点不在赤道, 则问题归结在三角形  $AB_1B_2$  中已知  $B_1 = \theta_1, B_2 = \pi - \theta_2, B_1B_2 = \alpha$ , 求  $AB_1$  及  $AB_2$  的问题。交会点幅角  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$  即为所求。

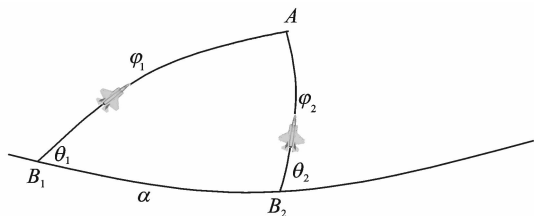


图 5 航迹交会示意图

Fig. 5 Schematic diagram of path crossing

由正弦公式, 得

$$\sin\varphi_1 = \frac{\sin\alpha}{\sin A}\sin\theta_2 \quad (26)$$

$$\sin\varphi_2 = \frac{\sin\alpha}{\sin A}\sin\theta_1 \quad (27)$$

两条航迹不同, 故  $\sin A$  和  $\sin\alpha$  均不为零。由余弦公式, 结合式(26,27), 得

$$\cos\varphi_1 = \cos\alpha\cos\varphi_2 - \frac{\sin^2\alpha}{\sin A}\sin\theta_1\cos\theta_2 \quad (28)$$

$$\cos\varphi_2 = \cos\alpha\cos\varphi_1 + \frac{\sin^2\alpha}{\sin A}\sin\theta_2\cos\theta_1 \quad (29)$$

以上两式联立求解  $\cos\varphi_1$  和  $\cos\varphi_2$ , 得

$$\cos\varphi_1 = \frac{1}{\sin A}(-\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\alpha\sin\theta_2\cos\theta_1) \quad (30)$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{1}{\sin A}(-\cos\alpha\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1) \quad (31)$$

交会点问题在飞机拦截、弹道导弹拦截问题中具有一定意义。

## 2.5 追逐过程的仿真计算

追逐仿真中首先要判断相对方位角。位于  $A_1$  的飞机 1 要追逐位于  $A_2$  的飞机 2, 欧拉角参数分

别为  $\omega_1, \theta_1, \varphi_1$  和  $\omega_2, \theta_2, \varphi_2$ , 求两架飞机的距离以及飞机 2 相对于飞机 1 的方位角。归结为图 6 的问题: 在球面四边形  $A_1A_2B_2B_1$  中, 已知  $B_1 - B_2 = \alpha = \omega_2 - \omega_1, B_1 = \theta_1, B_2 = \pi - \theta_2, A_1B_1 = \varphi_1, A_2B_2 = \varphi_2$ , 求边长  $A_1A_2$  及角度  $B_1A_1A_2$ 。

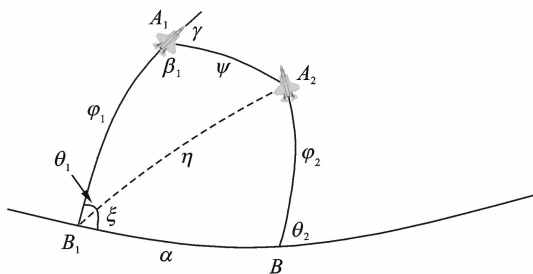


图 6 两架飞机相对方位角示意图

Fig. 6 Schematic diagram of relative azimuth of two planes

设  $A_1A_2 = \psi, \angle B_1A_1A_2 = \beta_1$ , 则  $\beta_1$  的补角  $\gamma$  就是  $A_2$  相对于  $A_1$  的方位角。设  $A_2B_1 = \eta, \angle A_2B_1B_2 = \xi$ , 在  $A_1B_1A_2$  中由余弦公式, 得

$$\begin{aligned} \cos\psi &= \cos\varphi_1\cos\eta + \sin\varphi_1\sin\eta\cos(B_1 - \xi) = \\ &= \cos\varphi_1\cos\eta + \sin\varphi_1\cos B_1\sin\eta\cos\xi + \\ &+ \sin\varphi_1\sin B_1\sin\eta\sin\xi \end{aligned} \quad (32)$$

在  $A_2B_1B_2$  中由余弦公式和正弦公式, 得

$$\cos\eta = \cos\alpha\cos\varphi_2 + \sin\alpha\sin\varphi_2\cos B_2 \quad (33)$$

$$\sin\eta\sin\xi = \sin\varphi_2\sin B_2 \quad (34)$$

利用两次余弦公式, 得

$$\begin{aligned} \cos\varphi_2 &= \cos\alpha\cos\eta + \sin\alpha\sin\eta\cos\xi = \\ \cos\alpha(\cos\alpha\cos\varphi_2 + \sin\alpha\sin\varphi_2\cos B_2) + \sin\alpha\sin\eta\cos\xi &= \\ \cos^2\alpha\cos\varphi_2 + \cos\alpha\sin\alpha\sin\varphi_2\cos B_2 + \sin\alpha\sin\eta\cos\xi \end{aligned} \quad (35)$$

即

$$\sin\eta\cos\xi = \sin\alpha\cos\varphi_2 - \cos\alpha\sin\varphi_2\cos B_2 \quad (36)$$

将式(33,34,36)代入式(32), 得

$$\begin{aligned} \cos\psi &= \cos\alpha(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\cos B_1\sin\varphi_2\cos B_2) + \\ \sin\alpha(\cos\varphi_1\sin\varphi_2\cos B_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1\cos B_1) + \\ \sin\varphi_1\sin B_1\sin\varphi_2\sin B_2 \end{aligned} \quad (37)$$

计算  $\beta_1$ , 在  $A_1B_1A_2$  中, 由正弦定理, 结合式(33,34)得

$$\begin{aligned} \sin\beta_1 &= \sin\eta \frac{\sin(B_1 - \xi)}{\sin\psi} = \\ \frac{\sin B_1\sin\eta\cos\xi - \cos B_1\sin\eta\sin\xi}{\sin\psi} &= \\ \frac{\sin B_1(\sin\alpha\cos\varphi_2 - \cos\alpha\sin\varphi_2\cos B_2) - \cos B_1\sin\varphi_2\sin B_2}{\sin\psi} \end{aligned} \quad (38)$$

在  $A_1B_1A_2$  和  $A_2B_1B_2$  中, 由余弦定理得

$$\cos\beta_1 = \frac{\cos\varphi_2 \cos\alpha + \sin\varphi_2 \sin\alpha \cos B_2 - \cos\varphi_1 \cos\psi}{\sin\varphi_1 \sin\psi} \quad (39)$$

用同样的方法可以计算飞机1相对于飞机2的方位角。计算结果在飞机追逐、导弹攻击、拦截、弹道导弹防御等问题的仿真过程中有重要意义。

### 3 算例

通过3个算例来对本文的算法进行验证。

#### (1) 定常飞行

某时刻飞行器位于东经 $90^\circ$ ，北纬 $45^\circ$ ，以 $2\,000\text{ km/h}$ 的速度向东飞行，海拔高度为 $8\,000\text{ m}$ 。假设该飞行器定常飞行，求飞行器在接下来的 $50\text{ h}$ 内经度、纬度、航向角随时间的变化。

由给定条件，飞行器经度为 $\pi/2$ ，纬度为 $\pi/4$ ，航向角为 $\pi/2$ 。先将经纬度、航向角换算为欧拉角，得到 $\omega=0$ ， $\theta=\pi/4$ ， $\varphi=\pi/2$ 。飞行器定常飞行，故只有幅角 $\varphi$ 发生变化。计算得 $\varphi$ 的变化率为 $2\,000/(6\,370+8) = 0.109\,8\text{ rad/h}$ 。

用Matlab编写程序，仿真步长设为 $0.001\text{ h}$ ，计算飞行过程中经度、纬度和航向角随时间的变化情况，如图7所示。

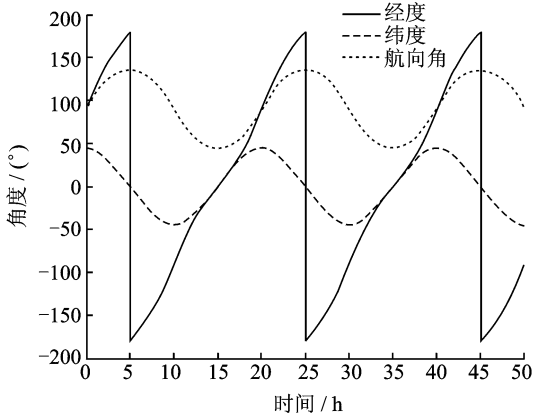


图7 飞行器定常飞行仿真结果

Fig. 7 Simulation result of steady flight

由图7可见，在飞行过程中各角度均呈周期性变化。经度除某些时刻有突变外，呈单调增加，突变的原因是飞行器经度超过 $180^\circ$ 后又变成了 $-180^\circ$ 。纬度在 $-45^\circ$ 到 $45^\circ$ 之间起伏变化，航向角恒大于 $0^\circ$ ，这些结果均说明了仿真的正确性。

#### (2) 交会点计算

飞机1位于东经 $10^\circ$ ，北纬 $20^\circ$ ，航向角 $25^\circ$ ，飞机2位于东经 $40^\circ$ ，北纬 $10^\circ$ ，航向角 $-30^\circ$ ，求两架飞机的航迹在北半球交会的位置。假设两架飞机在相同高度定常飞行，可进一步计算，如果要相遇，

速度须满足什么关系。

将飞机经纬度、航向角换算成欧拉角，分别得 $\omega_1=0.9^\circ$ ， $\theta_1=66.6^\circ$ ， $\varphi_1=21.9^\circ$ 和 $\omega_2=46.9^\circ$ ， $\theta_2=124.4^\circ$ ， $\varphi_2=12.2^\circ$ 。计算得在北半球交会点，两架飞机的幅角分别是 $\varphi'_1=38.5^\circ$ ， $\varphi'_2=43.8^\circ$ ，可见两架飞机须分别继续向前飞行 $\varphi'_1-\varphi_1=16.6^\circ$ 和 $\varphi'_2-\varphi_2=31.7^\circ$ 到达交会点。后者与前者之比是1.9，即如果要在交会点相遇，飞机2的速度要恰为飞机1的1.9倍。

这个问题在导弹拦截、卫星对接、变轨中，也具有重要意义。利用前面的计算方法，将欧拉角参数换算为经纬度参数，不难求出两架飞机的交会点在东经 $18.47^\circ$ ，北纬 $34.85^\circ$ 。

#### (3) 追逐问题

两架飞机的初始状态与算例2相同。假设飞机2以 $800\text{ km/h}$ 的速度定常飞行，飞机1速度为 $1\,300\text{ km/h}$ ，最大转弯角速度为 $3^\circ/\text{s}$ ，两架飞机飞行高度均为 $8\,000\text{ m}$ 。飞机1速度矢量要尽量指向飞机2，追上飞机2后，与其同速飞行。求飞机1的飞行航迹。

飞机1的速度方向要根据飞机2的位置不断进行调整，可分为3个过程：(1)飞机1以最大转弯速度调转机头，将机头尽量转向飞机2；(2)飞机1根据飞机2的位置变化调整速度方向，所需转弯速度小于最大转弯速度；(3)机头指向飞机2后，与飞机2同方向飞行。此问题涉及了两架飞机相对方位角的判断以及转弯过程，单步长内的仿真流程如图8所示。

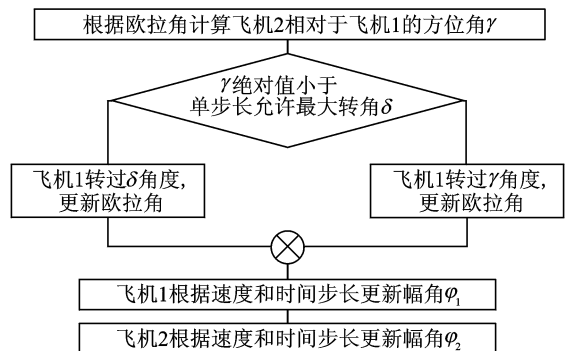


图8 追逐过程中单步内仿真流程图

Fig. 8 Simulation flow chart of mono-step in chasing process

仿真结果如图9~11所示。

由图11可见，飞机1距离飞机2较远时，航线平直，距离较近时，转弯较大，追上飞机2后，两机航线重合。过程(2)和过程(3)在图中体现较为明

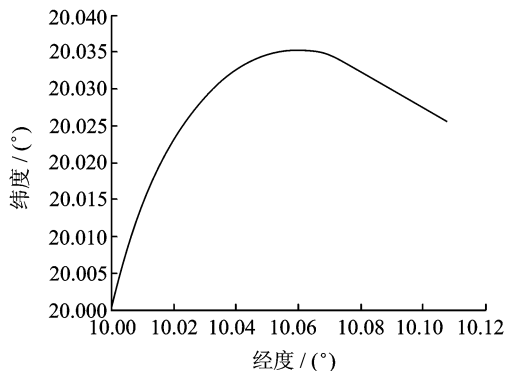
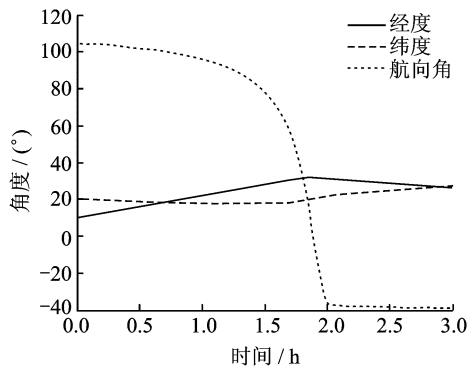


图 9 追逐过程中飞机 1 经度、纬度、航向角曲线

Fig. 9 Longitude, latitude and heading of airplane 1 in chasing process

图 12 飞机 1 在初始 36 s 内的航迹

Fig. 12 Flight path of airplane 1 in the first 36 s

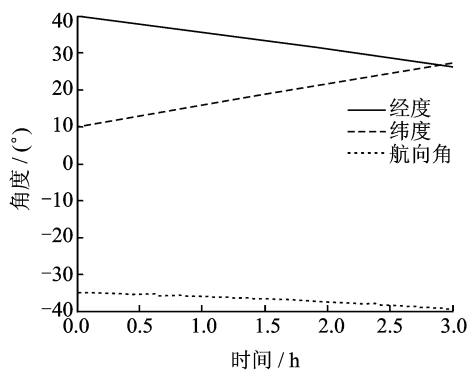


图 10 追逐过程中飞机 2 经度、纬度、航向角曲线

Fig. 10 Longitude, latitude and heading of airplane 2 in chasing process

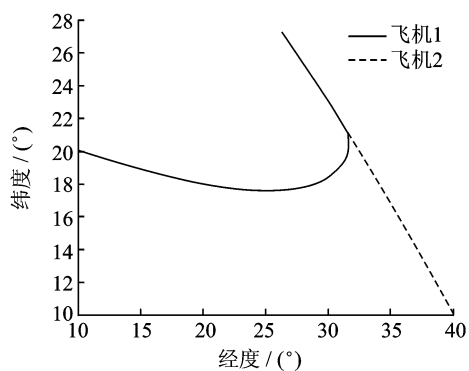


图 11 两架飞机飞行航迹

Fig. 11 Flight path of two airplanes

显,但过程(1)历时较短,图 11 无法体现。图 12 为飞机 1 在仿真开始 0.01 h 内的飞行轨迹。

由图 12 可见,仿真开始后,为将机头调转向飞机 2,飞机 1 以最大转弯速度向右转弯,在 0.01 h 内完成了转弯,将机头转向了飞机 2,之后航向变化就非常小,近似于平直。

## 4 结 论

结合球面几何理论,研究了采用欧拉角表示飞机位置、航向等运动参数的方法。通过算例对算法进行了验证,主要有以下结论:

(1)用欧拉角表示飞机位置、航向的运动参数与用经纬度、航向角表示等价,两种表示方法可以方便进行换算。

(2)对飞机定常飞行过程进行仿真时,采用欧拉角参数极其简单,只需要一个参数变化即可完成仿真过程,表明欧拉角参数更能直接体现飞机在地球表面运动本质。

(3)采用欧拉角参数可以方便地计算两点之间最短航线,判断两条航迹的交会点以及计算到达交会点的距离,对飞机转弯、追逐等典型飞行过程的仿真也非常容易实现。

### 参考文献:

[1] Chen Chunlin, Liu Guogang, Wu Wenhai, et al. Three-dimensional trajectory optimization with direct method[J]. Transactions of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2002,19(2):118-122.

[2] 张广林,曹义华,苏媛.直升机最优航迹规划与地形跟踪[J].南京航空航天大学学报,2008,40(5):595-599.

Zhang Guanglin, Cao Yihua, Su Yuan. Helicopter optimal trajectory planning and terrain following[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2008,40(5):595-599.

[3] 曾佳,申功璋,杨凌宇.无人机在线协同航迹规划时序问题[J].南京航空航天大学学报,2009,41(3):335-338.

Zeng Jia, Shen Gongzhang, Yang Linyu. Timing problem for UAV online cooperated trajectory planning[J]. Journal of Nanjing University of Aeronau-

- tics & Astronautics, 2009, 41(3):335-338.
- [4] 郭乃林, 王建辉, 雷英杰. 军事训练想定中的三维航迹仿真模型[J]. 系统仿真学报, 2002, 14(4):534-538.  
Guo Nailin, Wang Jianhui, Lei Yingjie. A simulative 3D model of target's trail in the military training supposition[J]. Journal of System Simulation, 2002, 14(4):534-538.
- [5] 孙涛, 谢晓方, 乔勇军. 基于地形裁减与DCSAS的反舰导弹飞行管道规划仿真[J]. 系统仿真学报, 2009, 21(22):7313-7319.  
Sun Tao, Xie Xiaofang, Qiao Yongjun. Simulation of planning algorithm for anti-ship missile flight pipeline based on terrain clipping and DCSAS[J]. Journal of System Simulation, 2009, 21(22):7313-7319.
- [6] Bezdek W J, Mays D J, Powell R R, et al. The history and future of military flight simulators[C]//AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference and Exhibit. Austion, Texas: [s. n.], 2004:1-21.
- [7] Dirk L, Martin G, Michael B J. In-flight simulation in support of an aircraft certification process[C]//AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference and Exhibit. Austion, Texas: [s. n.], 2003:1-11.
- [8] 施一民, 范业明, 朱紫阳. 新型大地坐标系中的大地主题解算[J]. 同济大学学报:自然科学版, 2006, 34(2):212-216.  
Shi Yimin, Fan Yeming, Zhu Ziyang. Direct and inverse solution of geodetic problem in new form of geodetic coordinate system[J]. Journal of Tongji University: Natural Science, 2006, 34(2):212-216.
- [9] 施一民, 朱紫阳, 范业明. 坐标参数为长度量的一种新型的大地坐标系[J]. 同济大学学报:自然科学版, 2005, 33(11):1537-1540.  
Shi Yimin, Zhu Ziyang, Fan Yeming. New form of geodetic coordinate system taking two length quantity as coordinate parameters[J]. Journal of Tongji University: Natural Science, 2005, 33(11):1537-1540.
- [10] 李舰. 地理坐标系内的航迹仿真[J]. 现代雷达, 2004, 26(8):15-18.  
Li Jian. Track simulation in geographic coordinates [J]. Modern Radar, 2004, 26(8):15-18.

