

## 直升机低速回避区计算分析

孟万里 陈仁良

(直升机旋翼动力学国家级重点实验室,南京航空航天大学,南京,210016)

**摘要:**在可实现安全自转着陆的条件下,基于最小化回避区面积的思想分析预测了直升机低速高度—速度曲线。将直升机自转着陆表示成非线性最优控制问题,其状态方程使用发动机失效后增广的纵向三维刚体飞行动力学模型。采用直接转换和非线性规划的方法求解非线性最优控制问题。以 UH-60 直升机为例,计算了考虑 1 s 操纵延迟的单发失效的低速高度-速度曲线,并给出了高悬停点、拐点和低悬停点的最优自转着陆过程,发现这些最优着陆过程与驾驶员的实际操纵程序一致。

**关键词:**直升机;回避区;自转着陆;最优控制;三维刚体模型;发动机失效

**中图分类号:**V212.4 **文献标志码:**A **文章编号:**1005-2615(2014)02-0204-08

## Prediction for Helicopter Low-Speed Height-Velocity Diagram

Meng Wanli, Chen Renliang

(National Key Laboratory of Rotorcraft Aeromechanics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing, 210016, China)

**Abstract:** The low-speed height-velocity (HV) diagram of a helicopter is analytically predicted based on the idea of minimizing the unsafe region of the HV diagram under the condition of realistic autorotation landing. The autorotation landing of the helicopter is formulated as a nonlinear optimal control problem. The state equations are described by an augmented longitudinal three-dimensional rigid-body flight dynamic model. The nonlinear optimal control problem is solved by using direct transcription and nonlinear programming. For UH-60 helicopter, the analytical methodology is used to develop a reasonable estimation of the one-engine-inoperative (OEI) low-speed HV diagram with 1 s pilot delay. The OEI autorotation landing procedures from the high hover point, knee point and low hover point are presented. The results show that the autorotation landings can be made by using normal pilot procedures.

**Key words:** helicopters; height-velocity (HV) diagram; autorotation landing; optimal control; three-dimensional rigid-body model; engine failure

直升机具有发动机失效后实现安全自转着陆的能力,其能否安全地自转着陆与外界环境条件、驾驶员飞行技术和发动机失效时直升机的飞行状态有关。回避区定义了由外界环境条件和直升机的飞行状态组成的不安全区域,在这个不安全区域内飞行时如果出现发动机失效,即使具有相当飞行技术的驾驶员也不能操纵直升机安全地自转着陆。对于给定的外界环境条件和直升机重量,回避区一

般由发动机失效时直升机的高度和速度的组合来描述,因此回避区的边界也称为高度-速度 (Height-velocity, HV) 曲线。图 1 给出了直升机典型的 HV 曲线。HV 曲线的确定对直升机的飞行安全而言非常重要。飞行试验是确定 HV 曲线的最终手段,但其风险较高,且耗时、耗资。为了降低飞行试验的成本和风险,一种基于数值优化的分析方法被提出来预测直升机的 HV 曲线。

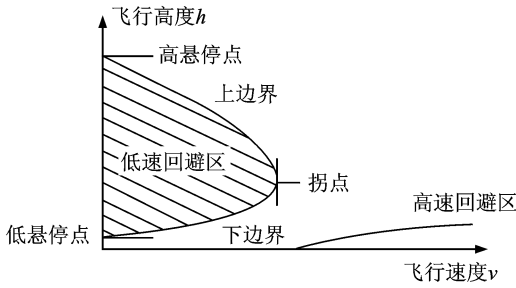


图 1 典型的 HV 曲线

Fig. 1 Typical HV diagram

许多研究人员<sup>[1-3]</sup>基于二维点质量模型计算直升机发动机失效后最优的自转着陆过程,能够得到总距操纵和旋翼转速时间历程与飞行试验数据吻合较好。文献[4]使用带偏航运动的直升机三维点质量模型计算了无操纵延迟的 HV 曲线。文献[5]建立了直升机纵向三维刚体模型,但仍然基于二维点质量模型计算最优自转着陆和 HV 曲线。虽然直升机点质量模型描述方式简单,计算效率高,但由于其没有包含俯仰运动和纵向变距操纵,从而不能准确地预测 HV 曲线的上边界点。为此,文献[6]基于直升机纵向三维刚体模型来计算发动机失效后无操纵延迟的 HV 曲线。文献[6]中还研究了 3 个关键点处的自转着陆过程,与飞行试验结果基本吻合,但其计算的最优自转着陆过程中总距和纵向周期变距操纵存在跳跃不连续,这是直升机操纵系统所无法实现的。文献[7]使用增广的纵向三维刚体模型计算得到了可实现的最优自转着陆过程。

在文献[7]研究工作的基础上,本文通过研究不同高度和速度组合下是否存在可实现的最优自转着陆过程来预测 HV 曲线。以 UH-60 直升机为例,计算了考虑 1 s 操纵延迟的单发失效(One-engine-inoperative, OEI)的低速 HV 曲线,并讨论了回避区高悬停点、拐点和低悬停点的最优自转着陆过程。

## 1 直升机飞行动力学模型

本节首先给出了直升机基本的 OEI 纵向三维刚体飞行动力学模型,包括 3 个运动自由度:水平、垂直的平移运动和俯仰角运动,如图 2 所示。状态变量为水平速度  $u$  和垂直速度  $w$ ,俯仰角速度  $q$ ,俯仰角姿态  $\theta$ ,水平位移  $x$ ,垂直高度  $h$ ,旋翼转速  $\Omega$ ,发动机可用功率  $P_s$ 。控制变量为总距  $\theta_0$  和纵向周期变距  $\theta_s$ 。

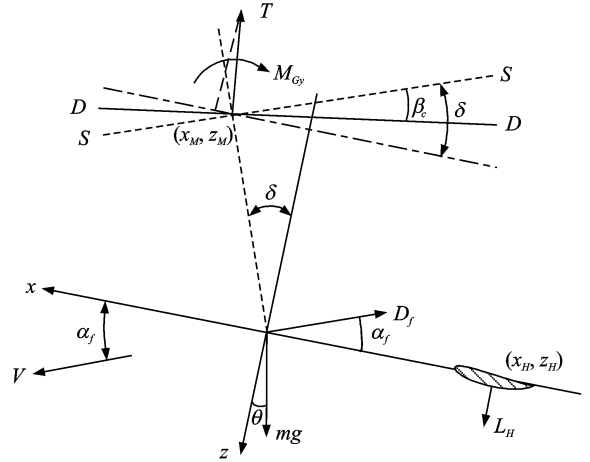


图 2 直升机简化模型

Fig. 2 Simplified helicopter model

直升机在体轴系下的动力学和运动学微分方程、旋翼转速微分方程和功率微分方程如下

$$\frac{du}{dt} = (T \sin(\delta - \beta_c) - D_f \cos \alpha_f - mg \sin \theta) / m - qw \quad (1)$$

$$\frac{dw}{dt} = (-T \cos(\delta - \beta_c) - D_f \sin \alpha_f + mg \cos \theta) / m + qu \quad (2)$$

$$\frac{dq}{dt} = (M_{Gy} + T \cos(\delta - \beta_c) x_M + T \sin(\delta - \beta_c) z_M - L_H x_H) / I_y \quad (3)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = q \quad (4)$$

$$\frac{dx}{dt} = u \cos \theta + w \sin \theta \quad (5)$$

$$\frac{dh}{dt} = u \sin \theta - w \cos \theta \quad (6)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{P_s - P_r}{I_R \Omega} \quad (7)$$

$$\frac{dP_s}{dt} = \frac{(P_{OEI} - P_s)}{t_p} \quad (8)$$

式中: $T, M_{Gy}$ 为旋翼拉力和俯仰力矩; $\beta_c, \delta$ 为旋翼挥舞后倒角和旋翼轴前倾角; $D_f$ 为机身阻力; $L_H$ 为平尾升力; $P_r, P_{OEI}$ 为直升机需用功率和单发可用功率; $I_y, I_R$ 为直升机俯仰惯性矩和旋翼转动惯量; $t_p$ 为发动机时间常数。

旋翼需用功率系数<sup>[1]</sup>

$$C_p = C_T \sqrt{\frac{C_T}{2}} (\bar{u}_c + K_{ind} f_G \bar{v}_i) + \frac{1}{8} \alpha_d (1 + 2.35 C_T \bar{u}_i^2) \quad (9)$$

式中: $K_{ind}$ 为诱导速度修正因子; $c_d$ 为旋翼桨叶阻

力系数; $\sigma$ 为旋翼实度。

旋翼桨盘平面处无量纲的法向和切向速度

$$\bar{u}_c = \frac{(u + qz_M)\sin(\delta - \beta_c) - (\omega - qx_M)\cos(\delta - \beta_c)}{\Omega R \sqrt{C_T/2}} \quad (10)$$

$$\bar{u}_t = \frac{(u + qz_M)\cos(\delta - \beta_c) + (\omega - qx_M)\sin(\delta - \beta_c)}{\Omega R \sqrt{C_T/2}} \quad (11)$$

无量纲诱导速度<sup>[1]</sup>

$$\bar{v}_i = \begin{cases} 1/\sqrt{\bar{u}_t^2 + (\bar{u}_c + \bar{v}_i)^2}, & (2\bar{u}_c + 3)^2 + \bar{u}_t^2 > 1 \\ \bar{u}_c(0.373\bar{u}_c^2 + 0.598\bar{u}_t^2 - 1.991), & \text{其他} \end{cases} \quad (12)$$

地面效应因子<sup>[8]</sup>

$$f_G = 1 - \frac{\sigma a_\infty \lambda}{4C_T} \frac{(R/4z)^2}{1 + (\mu/\lambda)^2} \quad (13)$$

式中: $\mu, \lambda$ 为旋翼前进比和流入比; $a_\infty$ 为桨叶升力线斜率; $z$ 为桨毂离地高度。

旋翼诱导速度<sup>[1]</sup>

$$v_i = K_{ind} \bar{v}_i f_G \cdot \Omega R \sqrt{C_T/2} \quad (14)$$

为了方便地计算旋翼诱导速度和需用功率,本文引入两个代数变量旋翼拉力系数 $C_T$ 和旋翼挥舞后倒角 $\beta_c$ ,相应的代数方程如下<sup>[8-9]</sup>

$$C_T - \frac{1}{2} a_\infty \sigma \left[ \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \mu^2 \right) \theta_0 + \frac{1}{4} (1 + \mu^2) \theta_1 - \frac{1}{2} \lambda - \frac{1}{2} \mu \theta_s \right] = 0 \quad (15)$$

$$\beta_c - \left[ \left( \frac{8}{3} \theta_0 + 2\theta_1 - 2\lambda \right) \mu - \left( 1 + \frac{3}{2} \mu^2 \right) \theta_s - \frac{16}{\gamma_b} \frac{q}{\Omega} \right] / \left( 1 - \frac{1}{2} \mu^2 \right) = 0 \quad (16)$$

式中: $\theta_1$ 为桨叶负扭转角。由方程(1~8)和方程(15,16)组成的微分-代数方程描述了基本的直升机纵向三维刚体运动模型。

为了考虑操纵系统特性对操纵量 $\theta_0, \theta_s$ 变化速度的限制,同时为了避免操纵量出现跳跃不连续或者近似“bang-bang”型控制的形式,本文使用操纵量一阶导数 $\dot{\theta}_0, \dot{\theta}_s$ 代替操纵量 $\theta_0, \theta_s$ 作为控制变量,而使操纵量 $\theta_0, \theta_s$ 作为状态变量,并给出 $\theta_0, \theta_s$ 的一阶微分方程如下

$$\frac{d\theta_0}{dt} = \dot{\theta}_0 \quad (17)$$

$$\frac{d\theta_s}{dt} = \dot{\theta}_s \quad (18)$$

方程(1~8)和方程(15~18)组成的1阶微分-代数

方程给出了直升机单发失效后增广的纵向三维刚体飞行动力学模型。在本文中称 $\theta_0, \theta_s$ 为操纵量, $\dot{\theta}_0, \dot{\theta}_s$ 为控制量, $C_T, \beta_c$ 为代数量。按照最优控制理论描述,方程(1~8)和方程(17,18)组成非线性最优控制模型的状态微分方程,方程(15,16)为其等式路径约束方程,状态变量为 $u, \omega, q, \theta, x, h, \Omega, P_s, \theta_0, \theta_s$ ,控制变量为 $C_T, \beta_c, \dot{\theta}_0, \dot{\theta}_s$ 。

## 2 问题描述

### 2.1 HV 曲线

数值优化方法计算 HV 曲线的基本思想是在可实现安全自转着陆的条件下最小化回避区面积,其核心在于研究不同高度和速度组合下是否存在可实现的最优自转着陆过程。对于高悬停点,预先估计满足安全自转着陆约束条件的最小容许初始高度,用最优控制模型计算最优自转着陆过程,如果无法实现该高度处的自转着陆,逐步增加高度重新进行最优自转着陆,直到某一高度的自转着陆过程可实现且令人满意,此高度为高悬停点高度。对于低悬停点,预先估计满足安全自转着陆约束条件的最大容许初始高度,然后逐步减小高度来计算最优自转着陆过程,直到某一高度的自转着陆过程可实现且令人满意,此高度为低悬停点高度。对于任意高度下的回避区边界点,预先估计满足安全自转着陆约束条件的最小容许初始速度,然后逐步增加速度来计算最优自转着陆过程,直到某一速度的自转着陆过程可实现且令人满意,此高度和速度组合为该高度下的回避区边界点。由上述边界点组成的曲线即为 HV 曲线。

### 2.2 最优控制模型

预测 HV 曲线方法的核心在于计算最优自转着陆过程,本节详细描述发动机失效后自转着陆的最优控制模型。自转着陆过程的最优控制问题一般表述为:在满足直升机自转着陆的可操纵性和安全性的条件下,使直升机接触地面时的水平和垂直速度最小。只考虑接地速度最小的目标时最优控制问题的目标函数取为

$$\min J^p = \left[ \left( \frac{u(t_f)}{u_{fmax}} \right)^2 + \left( \frac{\omega(t_f)}{\omega_{fmax}} \right)^2 \right] \quad (19)$$

式中: $t_f$ 为优化末端时间; $u_{fmax}, \omega_{fmax}$ 分别为直升机着陆时主起落架所能承受的最大水平和垂直接地速度。

考虑最优控制理论,由于使用了 $\dot{\theta}_0, \dot{\theta}_s$ 作为控制变量,若以 $J^p$ 作为目标函数,则最优控制问题出现奇异弧段的情况,可能使控制变量的数值最优解

偏离真实解。另外考虑自转着陆过程的可操纵性和可实现性,需要对  $J^p$  进行修正得到如下目标函数<sup>[7]</sup>

$$\min J = \omega_v \cdot J^p + \omega_t \cdot (t_f - t_0) + \frac{1}{t_f - t_0} \cdot \int_{t_0}^{t_f} (\omega_1 \cdot \dot{\theta}_0^2 + \omega_2 \cdot \dot{\theta}_s^2) dt \quad (20)$$

式中:  $t_0$  为优化初始时间;  $\omega_v$  为接地速度项的加权常数;  $\omega_t$  为自转操纵持续时间项的加权常数;  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  为操纵速度的加权函数,在本文中取为常数。

本文考虑如下路径约束:

$$\begin{aligned} u_{\min} &\leq u(t) \leq u_{\max}, & \omega_{\min} &\leq \omega(t) \leq \omega_{\max} \\ q_{\min} &\leq q(t) \leq q_{\max}, & \theta_{\min} &\leq \theta(t) \leq \theta_{\max} \\ h(t) &\geq 0, & \Omega_{\min} &\leq \Omega(t) \leq \Omega_{\max} \\ \theta_{0\min} &\leq \theta_0(t) \leq \theta_{0\max}, & \theta_{s\min} &\leq \theta_s(t) \leq \theta_{s\max} \\ C_{T\min} &\leq C_T(t) \leq C_{T\max}, & \beta_{c\min} &\leq \beta_c(t) \leq \beta_{c\max} \\ \dot{\theta}_{0\min} &\leq \dot{\theta}_0(t) \leq \dot{\theta}_{0\max}, & \dot{\theta}_{s\min} &\leq \dot{\theta}_s(t) \leq \dot{\theta}_{s\max} \end{aligned}$$

初始边界约束如下:  $t_0$  为延迟时间 1 s,初始状态为经过 1 s 操纵延迟直升机所具有的状态。

末端边界约束如下:

$$\begin{aligned} u(t_f) &\leq u_{f\max}, & \omega(t_f) &\leq \omega_{f\max} \\ h(t_f) &= 0, & q(t_f) &= 0 \\ \theta_{f\min} &\leq \theta(t_f) \leq \theta_{f\max} \end{aligned}$$

由于最优控制模型中各状态变量和控制变量的量纲不同且量值差异很大,这会引起数值求解困难,因此需要对状态变量和控制变量进行无量纲化和缩放处理,使经过处理后的变量取值在 1 附近。本文采用如下的无量纲化和缩放处理方式:

$$\bar{u} = \frac{1}{k_v \Omega_0 R} u, \quad \bar{\omega} = \frac{1}{k_v \Omega_0 R} \omega, \quad \bar{q} = \frac{k_x}{k_v \Omega_0} q$$

$$\bar{\Omega} = \frac{\Omega}{\Omega_0}, \quad \bar{x} = \frac{x}{k_x R}, \quad \bar{h} = \frac{h}{k_x R}$$

$$\bar{\tau} = \frac{k_v \Omega_0 t}{k_x}, \quad \bar{P}_s = \frac{k_x P_s}{k_v I_R \Omega_0^3}, \quad \bar{C}_T = \frac{C_T}{k_T}$$

$$\bar{\theta}_0 = \frac{k_x}{k_v \Omega_0} \dot{\theta}_0, \quad \bar{\theta}_s = \frac{k_x}{k_v \Omega_0} \dot{\theta}_s$$

$$\bar{\theta} = \theta, \quad \bar{\theta}_0 = \theta_0, \quad \bar{\theta}_s = \theta_s, \quad \bar{\beta}_c = \beta_c$$

其中:  $k_x, k_v, k_T$  为常量缩放因子。

### 2.3 最优控制问题求解方法

为了求解得到的无量纲和缩放后的非线性最优控制问题,需要先计算发动机失效后在驾驶员操纵延迟时间内直升机的自由响应,即求解控制量  $\dot{\theta}_0, \dot{\theta}_s$  为 0 时的 1 阶微分-代数方程。为此,首先配平直升机在发动机失效时的状态和操纵,得到 1 阶微分-代数方程的初值问题,然后使用向后差分公式(Backward differentiation formulae, BDF)算法

求解。

对复杂的非线性最优控制模型,本文采用直接转换方法将连续的最优控制问题转化为离散的非线性规划问题,然后使用已经发展非常成熟的非线性规划算法来求解<sup>[10-11]</sup>。直接转换法在等距分布时间节点上同时离散状态和控制变量作为非线性规划问题的优化参数。首先使用 Hermite-Simpson 节点配置方法对微分方程进行离散,在每个时间子段上形成缺陷等式约束方程。然后将边界条件作用到初始和末端点处,路径约束作用到所有节点和中点处。最后按照同样的方式离散目标函数,从而得到一个与最优控制问题相容的非线性规划问题,并应用稀疏序列二次规划算法求解该非线性规划问题得到参数化的最优状态和控制解。对参数化的最优解进行分段多项式插值,即可得到最优控制问题近似最优解的状态和控制函数。

## 3 结果与分析

本文针对 UH-60 直升机计算其后重心状态且总质量为 9 185 kg 时的 OEI 低速 HV 曲线,如图 3 所示。发动机失效时直升机处于标准大气环境下的稳定悬停或稳定平飞状态,驾驶员经过 1 s 时间延迟后开始操纵直升机自转着陆,起落架所能承载的最大垂直和水平着陆速度分别为 1.524, 12.192 m/s。从图 3 中可以看出,与飞行手册<sup>[12]</sup>中的 HV 曲线相比,最优自转着陆技术给出更小的直升机低速回避区,尤其是回避区上边界。

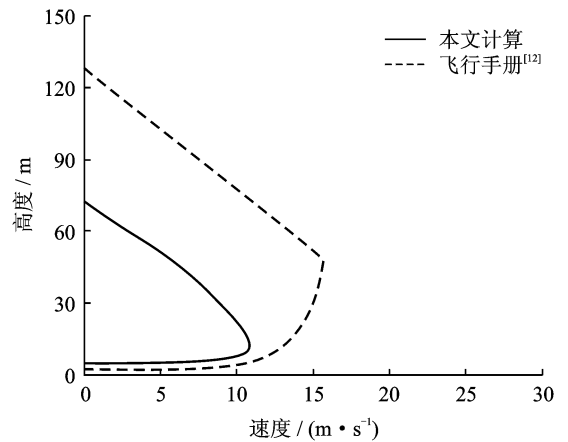


图 3 低速 HV 曲线

Fig. 3 Low-speed HV diagram

图 4 给出了高悬停点处发动机失效的最优自转着陆过程,图中总距  $\theta_{.75}$  表示桨叶展向 0.75 站位处的安装角。从图中可以看出,发动机失效后经

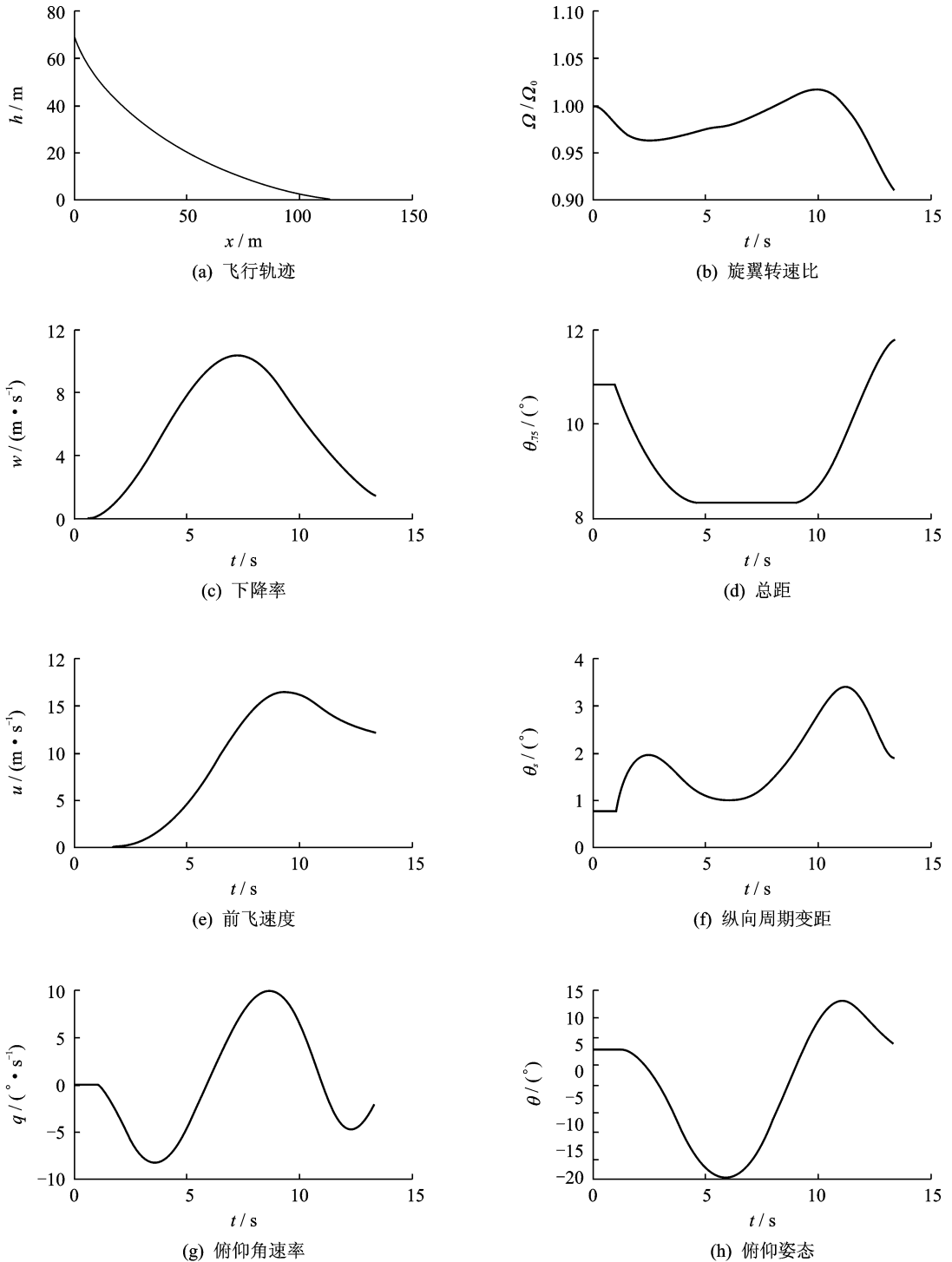


图4 高悬停点处最优自转着陆过程

Fig. 4 Optimal autorotation landing for high hover point

过 1 s 时间延迟, 驾驶员立即降低总距来阻止旋翼转速的衰减, 同时前推驾驶杆, 使直升机低头加速。在 2.5 s 时驾驶员后拉驾驶杆以避免出现过大的低头角速度。随着前飞速度和下降率的逐渐增加, 旋翼转动能量逐渐积累, 拉力增大; 在旋翼拉力的

增加和后重心的共同作用下, 引起直升机迅速抬头, 为了避免过大的抬头角速度, 驾驶员前推驾驶杆。直升机下降到 20 m 高度时驾驶员开始提总距, 利用旋翼转动能量和直升机抬头姿态来减小下降率和前飞速度。随着旋翼转速的降低和直升机

接近地面,旋翼拉力开始减小,驾驶员适当地后拉驾驶杆来调整直升机着陆时的姿态,最终以下降率  $1.400 \text{ m/s}$ ,水平速度  $12.192 \text{ m/s}$  安全着陆。对于高悬停点的最优自转着陆,驾驶员不仅使用迅速降距和瞬时增距,还通过纵向周期变距调整直升机俯仰姿态,来实现能量转换与利用以及利用抬头姿态减小下降率和前飞速度实现安全着陆。

图 5 给出了拐点处发动机失效的最优自转着陆过程。从图中可以看出,发动机失效后经过  $1 \text{ s}$  时间延迟,驾驶员尽量降低总距来阻止旋翼转速的衰减,同时适当前推驾驶杆减小直升机抬头姿态来保持足够的前飞速度。由于直升机飞行高度低且有足够的前飞速度,在  $1.5 \text{ s}$  时驾驶员后拉驾驶杆及时调整俯仰姿态。直升机下降到  $10 \text{ m}$  高度时

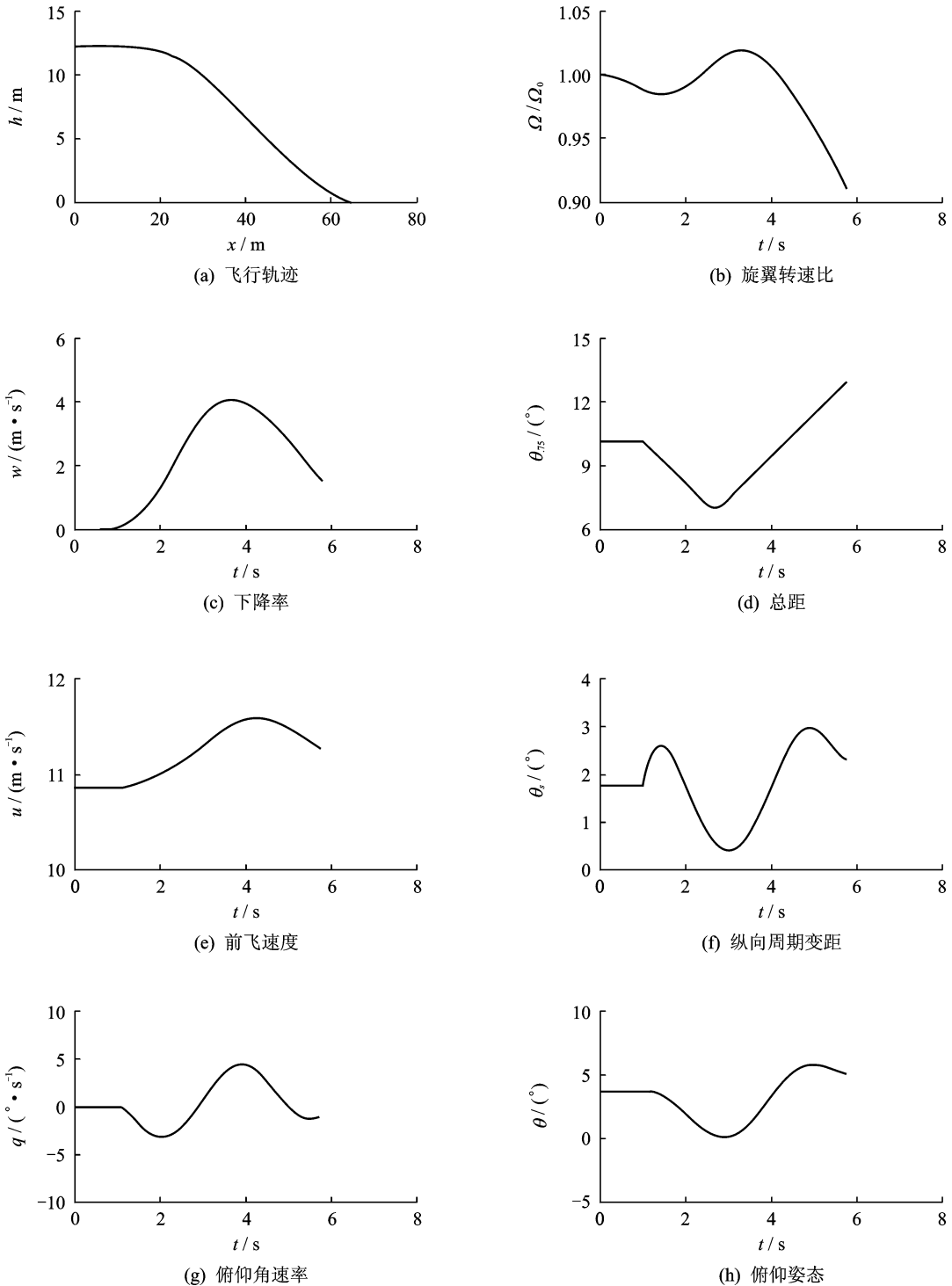


图 5 拐点处最优自转着陆过程

Fig. 5 Optimal autorotation landing for knee point

驾驶员迅速提总距,利用旋翼转动能和抬头姿态来减小下降率和前飞速度,并通过纵向操纵调整直升机俯仰姿态满足安全着陆要求,最终以下降率  $1.511 \text{ m/s}$ ,水平速度  $11.265 \text{ m/s}$  安全着陆。对于拐点的最优自转着陆,驾驶员主要通过降距和增距来实现能量管理和安全着陆,纵向周期变距起到

调整俯仰姿态的作用。

图6给出了低悬停点处发动机失效的最优自转着陆过程。从图中可以看出,发动机失效后经过  $1 \text{ s}$  时间延迟,驾驶员尽量降低总距来阻止旋翼转速的衰减,同时适当前推驾驶杆调整直升机俯仰姿态。在  $2 \text{ s}$  时驾驶员迅速提总距利用旋翼转动能

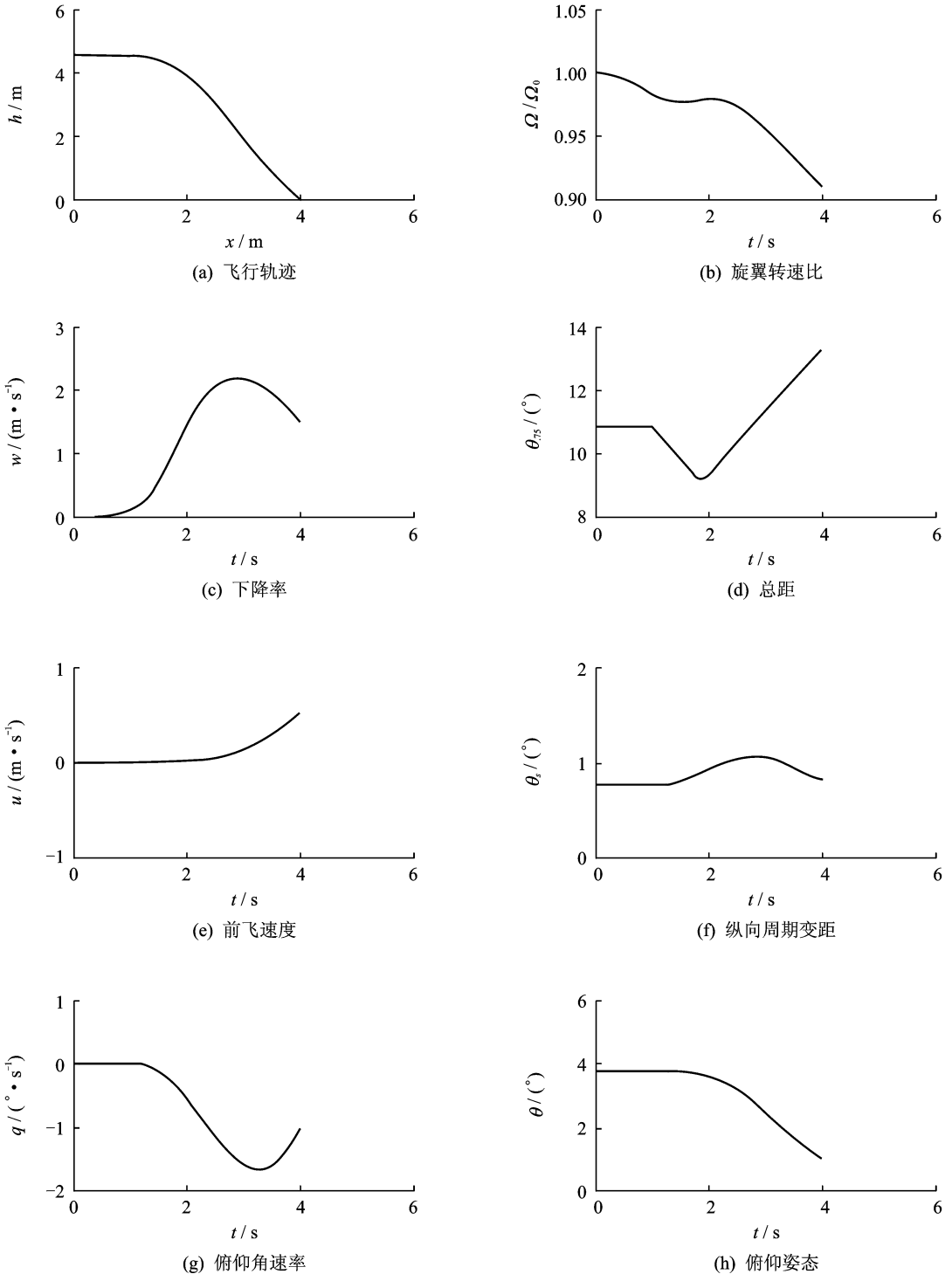


图6 低悬停点处最优自转着陆过程

Fig. 6 Optimal autorotation landing for low hover point

来减小下降率,然后适当后拉驾驶杆减小低头角速度满足安全着陆要求,最终以下降率 1.498 m/s,水平速度 0.527 m/s 安全着陆。对于低悬停点的最优自转着陆,直升机几乎垂直降落,驾驶员通过降距和增距来利用势能和旋翼转动能实现安全着陆,纵向周期变距只用来调整着陆时直升机的姿态。

## 4 结 论

(1)本文基于增广的纵向三维刚体飞行动力学模型和最小化回避区面积的思想提出了一种预测直升机低速 HV 曲线的分析方法,得到边界点上的最优自转着陆过程与驾驶员的实际操纵程序一致。

(2)直升机在低速 HV 曲线上不同位置出现发动机失效时得到的最优自转着陆过程有所不同。在高悬停点处,驾驶员不仅使用迅速降距和瞬时增距,还通过纵向周期变距调整直升机俯仰姿态,来实现能量转换与利用以及利用抬头姿态减小下降率和前飞速度实现安全着陆。在拐点处,驾驶员主要通过降距和增距来实现能量管理和安全着陆,纵向周期变距起到调整俯仰姿态的作用。在低悬停点处,直升机几乎垂直降落,驾驶员通过降距和增距来利用势能和旋翼转动能实现安全着陆,纵向周期变距只用来调整着陆时直升机的姿态。

### 参考文献:

- [1] Johnson W. Helicopter optimal descent and landing after power loss[R]. NASA TM-73244, 1977.
- [2] Lee A L, Bryson A E, Hindson W S. Optimal landing of a helicopter in autorotation[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1988, 11(1): 7-12.
- [3] 张余华. 直升机自转着陆过程的最优控制[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2004.  
Zhang Yuhua. Optimal control for helicopter autorotational landing[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2004.
- [4] 席华彬. 直升机单台发动机停车后的飞行轨迹优化[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2006.  
Xi Huabin. Research on optimization of helicopter flight following one-engine failure [D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2006.
- [5] 曾洁. 发动机失效后直升机轨迹优化研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2007.  
Zeng Jie. Investigation on helicopter flight trajectory optimization after engine failure[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2007.
- [6] Okuno Y, Keiji K, Akira A. Analytical prediction of height-velocity diagram of a helicopter using optimal control theory[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1991, 14(2): 453-459.
- [7] 孟万里, 陈仁良. 直升机单发失效后自转着陆轨迹优化[J]. 航空学报, 2011, 32(9): 1599-1607.  
Meng Wanli, Chen Renliang. Trajectory optimization of helicopter autorotation landing after one engine failure[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2011, 32(9): 1599-1607.
- [8] Johnson W. Helicopter theory[M]. Princeton: Princeton University Press, 1980.
- [9] 高正, 陈仁良. 直升机飞行动力学[M]. 北京: 科学出版社, 2003.  
Gao Zheng, Chen Renliang. Helicopter flight dynamics[M]. Beijing: Science Press, 2003.
- [10] Bryson A E. Aerospace trajectory optimization using direct transcription and collocation[EB/OL]. (2009-05-07) [2010-06-12]. <http://www.cdeagle.com/freeware/>.
- [11] John T B. Survey of numerical methods for trajectory optimization[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1998, 2(2): 193-207.
- [12] Shinseki E K. Operator's manual for UH-60A helicopter, UH-60L helicopter, EH-60A helicopter[R]. DA TM-1-1520-237-10. Washington, D. C.: Department of the Army, 1996.