第 45 卷第 6 期
2013 年 12 月

南京航空航天大学学报
Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics

Vol. 45 No. 6
Dec. 2013

FW-H 方程噪声预测的高级时间方法

司海青[1]　石　岩[1]　沈文忠[2]　吴晓军[3]

（1. 南京航空航天大学民航/飞行学院，南京，210016；
2. 丹麦技术大学风能系流体力学教研室，哥本哈根，DK-2800；
3. 中国空气动力研究与发展中心，绵阳，621000）

摘要：研究了 Ffowcs Williams-Hawkings（FW-H）声比拟方法预测噪声的高级时间方法，并对该积分方程及其积分解进行了推导。与延迟时间方法相比，这种方法无需求解超越方程，不需要预先存储大量的气动数据，可以节省大量存储空间。为进一步验证高级时间方法预测噪声的有效性，首先对方柱及 NACA0012 翼型绕流的非定常流场进行数值模拟，然后将非定常流场计算结果作为 FW-H 方程的气动数据输入，运用高级时间方法对方柱涡脱落噪声及 NACA0012 翼型尾缘涡脱落噪声进行了数值预测，最后与延迟时间方法预测结果进行了比较。

关键词：FW-H 方程；声比拟方法；延迟时间方法；高级时间方法

中图分类号：V211.3　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1005-2615(2013)06-0807-06

Advanced Time Approach of FW-H Equations for Predicting Noise

Si Haiqing[1], *Shi Yan*[1], *Shen Wenzhong*[2], *Wu Xiaojun*[3]

(1. College of Civil Aviation and Flight, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China;
2. Fluid Mechanic Section, Department of Wind Energy, Technical University of Denmark, Copenhagen, DK-2800, Denmark;
3. China Aerodynamics Research and Development Center, Mianyang, 621000, China)

Abstract: An advanced time approach of Ffowcs Williams-Hawkings (FW-H) acoustic analogy is developed, and the integral equations and integral solution of FW-H acoustic analogy are derived. Compared with the retarded time approach, the transcendental equation need not to be solved in the advanced time approach, on the other hand, computational cost can be saved using the approach due to no demand of pre-storing lots of aerodynamic data. To further validate the efficiency of the advanced time approach for predicting noise, unsteady flow fields are firstly simulated for air around square cylinder and NACA0012 airfoil, then unsteady calculations are used as input for FW-H equations, and numerical predictions are made for noise induced by vortex shedding of square cylinder and NACA0012 airfoil using the advanced time approach. Finally, the retarded time approach and the advanced time approach are compared.

Key words: FW-H equations; acoustic analogy method; retarded time approach; advanced time approach

基于声比拟理论[1]，1969 年 Ffowcs Williams 和 Hawkings 在连续性方程和 N-S 方程的基础上发展了描述静止介质中运动固壁发声的方程，即 Ffowcs Williams-Hawkings（FW-H）方程。FW-H 方程将流动对噪声的贡献分为 3 部分：分布于物面上的单极源、偶极源以及积分面与观察者间三维空间内的非线性四极源，对于远场观察者，接收到的噪声值是 3 种贡献之和。Farassat 将 FW-H

基金项目：国家自然科学基金(11272151)资助项目；江苏省自然科学基金(BK2011724)资助项目。
收稿日期：2013-08-15；**修订日期**：2013-10-15
通信作者：司海青，男，副教授，1976 年出生，E-mail：sihaiqing@126.com。

方程的积分形式进行巧妙变换后得到了适合于亚声、超声情况下的表达式,并获得了相应的解。不过,由于FW-H方法要求积分面是物面或流体不可穿透面,大大限制了该方法的应用。1996年Francescantonio结合Kirchhoff积分方法的特点,推导了新的FW-H方程,该方程同时具备了Kirchhoff积分和FW-H方程的优点,不仅打破了积分面不可穿透的限制,而且积分面可以位于非线性流动区域,这使得FW-H方程在气动噪声的数值预测中获得广泛的应用[2-4]。目前,利用这种方法解决实际气动噪声问题时,主要采用延迟时间方法[2],这种方法需要数值求解延迟时间方程,它是一个超越方程,另外,延迟时间方法需要存储大量时间段的气动数据,然后,再进行数据查找,因而,为提高计算效率,这种方法有待于进一步改进。利用高级时间方法计算FW-H的积分解,这种方法恰恰能够克服延迟时间方法的一些缺点。由于噪声问题越来越受到足够的重视,因此,准确地预测流动产生的噪声,正确地理解噪声产生和传播的机理[5-7],是有效控制噪声的重要前提。

1 FW-H 声比拟方法

非定常流动产生的压强脉动,其中部分地以声波的形式在流体介质中传播。Lighthill[1]声比拟方法是将流体控制方程整理成波动方程的形式来描述声音产生的机理。

FW-H方程是Lighthill声比拟方法的最一般形式,它是通过广义函数来描述流场,在无限空间内嵌入外部流体问题。

假设 $f(x,t)=0$ 为控制体表面函数,控制体表面点以速度 $\boldsymbol{v}(x,t)$ 运动。由于 $f=0$,从而有 $\nabla f=\hat{\boldsymbol{n}}$,其中,$\hat{\boldsymbol{n}}$ 为单位外法向量。连续方程以及线性动量方程可以写为

$$\frac{\partial}{\partial t}[(\rho-\rho_0)H(f)]+\frac{\partial}{\partial x_i}[\rho\boldsymbol{u}_iH(f)]=\boldsymbol{Q}\delta(f) \tag{1}$$

式中:$\boldsymbol{Q}=\rho_0\boldsymbol{U}_i\hat{\boldsymbol{n}}_i$;$\boldsymbol{U}_i=(1-\frac{\rho}{\rho_0})\boldsymbol{v}_i+\frac{\rho\boldsymbol{u}_i}{\rho_0}$。

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho\boldsymbol{u}_iH(f)]+\frac{\partial}{\partial x_j}[(\rho\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_j+\boldsymbol{P}_{ij})H(f)]=\boldsymbol{L}_i\delta(f) \tag{2}$$

式中:$\boldsymbol{L}_i=\boldsymbol{P}_{ij}\hat{\boldsymbol{n}}_j+\rho\boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{u}_n-\boldsymbol{v}_n)$;$\boldsymbol{P}_{ij}=(p-p_0)\boldsymbol{\delta}_{ij}-\boldsymbol{\tau}_{ij}$;$\boldsymbol{Q}\delta(f)$ 和 $\boldsymbol{L}_i\delta(f)$ 分别为质量和动量的面源分布。重新整理方程式(1,2)就得到FW-H方程

$$\square^2\{(\rho-\rho_0)c^2H(f)\}=\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\{\boldsymbol{T}_{ij}H(f)\}-\frac{\partial}{\partial x_i}\{\boldsymbol{L}_i\delta(f)\}+\frac{\partial}{\partial t}\{\boldsymbol{Q}\delta(f)\} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{T}_{ij}=\rho\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_j+(p'-c^2\rho')\delta_{ij}-\boldsymbol{\tau}_{ij} \tag{4}$$

式中:$\boldsymbol{T}_{ij}$ 为Lighthill应力张量;$\square^2$ 为波算子。

在方程式(3)的右边存在3个源项:四极子噪声源、载荷噪声源以及厚度噪声源。厚度和载荷噪声源是源项的表面分布,如 $\delta(f)$ 所示。当物体包含在控制表面内时,厚度噪声源项为物体运动引起的流体位移而产生的噪声,载荷噪声源项为流体作用在物体上的非定常气动载荷引起的噪声。除此之外,四极子噪声源表示体积源分布,如 $H(f)$ 所示,它代表了非线性引起的噪声源,这些非线性主要由涡扰动、激波、当地声速变化等造成的。

2 Farassat-Brentner 的延迟时间方法

首先给出Farassat-Brentner的延迟时间方法[2]的详细推导。FW-H方程式(3)实际上是重新整理连续方程和动量方程后而得到的。控制面封闭的流场由流动状态($\rho=\rho_0$,$\boldsymbol{u}_i=0$)替代,流体控制方程的可以通过表面源分布来实现。控制面封闭的物理表面可以去掉,这样,自由空间格林函数就可以用到方程式(3)上。定义 $G=\delta(g)/r$,其中,$g=t-\tau-r/c$,$r=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$,其中,$\boldsymbol{x}$ 及 t 分别为观察者位置、观察者时刻,而 $\boldsymbol{y}$ 及 τ 分别为声源位置、声源时间。方程式(3)的形式解为

$$4\pi p'=\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\iint_{f>0}\frac{\delta(t-\tau-r/c)}{r}\boldsymbol{T}_{ij}\,\mathrm{d}V\mathrm{d}\tau-\frac{\partial}{\partial x_i}\iint_{f=0}\frac{\delta(t-\tau-r/c)}{r}\boldsymbol{L}_i\,\mathrm{d}S\mathrm{d}\tau+\frac{\partial}{\partial t}\iint_{f=0}\frac{\delta(t-\tau-r/c)}{r}\boldsymbol{Q}\,\mathrm{d}S\mathrm{d}\tau \tag{5}$$

为将体积分转换成表面积分,必须运用 δ 函数的特性。对积分表达式中的积分变量进行转换,需要采用以下公式

$$\int\vartheta(\tau)\ \delta(g(\tau))=\sum_{n=1}^{N}\frac{\vartheta}{\partial g/\partial\tau}(\tau_{\mathrm{ret}}^{n}) \tag{6}$$

当源作亚声速运动时,延迟时间方程存在唯一的解。相反地,当源作超声速运动时,不存在唯一解,从物理的角度,这可以解释为,不同时刻的声源信号可以在同一时刻接收到。g 的时间源导数为

$$\frac{\partial g}{\partial\tau}=-1+Ma_r \tag{7}$$

式中：$Ma_r = Ma_i \hat{\boldsymbol{r}}_i$ 为观察者方向的源马赫数向量；$\hat{\boldsymbol{r}}_i = (x_i - y_i)/r$ 为声源与观察者之间距离的单位向量。$|1 - Ma_r|$ 代表观察者时间尺度与声源时间尺度之间的压缩或膨胀，它依赖于声源是否远离或接近观察者。这种影响为多普勒因子。

假定方程式(5)中的声面源作亚声速运动，延迟时间定义如下

$$\tau_{\mathrm{ret}} = t - \frac{|x - y(\tau_{\mathrm{ret}})|}{c} \tag{8}$$

然后，将方程式(6,7)应用到积分表达式(5)后得到

$$\begin{aligned}4\pi p' = &\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\int_{f>0}\left[\frac{\boldsymbol{T}_{ij}}{r(1 - Ma_r)}\right]_{\mathrm{ret}} \mathrm{d}V - \\ &\frac{\partial}{\partial x_i}\int_{f=0}\left[\frac{\boldsymbol{L}_i}{r(1 - Ma_r)}\right]_{\mathrm{ret}} \mathrm{d}S + \\ &\frac{\partial}{\partial t}\int_{f=0}\left[\frac{\boldsymbol{Q}}{r(1 - Ma_r)}\right]_{\mathrm{ret}} \mathrm{d}S\end{aligned} \tag{9}$$

式(9)即为 FW-H 方程式(3)的延迟时间解。由该公式可以看到，当 $Ma_r = 1$ 时，解中存在奇性问题。然而，奇性问题可以通过一种变量替换解决。

从方程式(9)可知，为改进 FW-H 声比拟方法的实用性，延迟时间方程可以有不同的表示方式。首先，将空间导数转换为时间导数，这需要以下关系

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_i}\int_{f=0}\left[\frac{\boldsymbol{L}_i}{r(1 - Ma_r)}\right]_{\mathrm{ret}} \mathrm{d}S = \\ &-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_{f=0}\left[\frac{\boldsymbol{L}_i \hat{\boldsymbol{r}}_i}{r(1 - Ma_r)}\right]_{\mathrm{ret}} \mathrm{d}S - \\ &\int_{f=0}\left[\frac{\boldsymbol{L}_i \hat{\boldsymbol{r}}_i}{r^2(1 - Ma_r)}\right]_{\mathrm{ret}} \mathrm{d}S\end{aligned} \tag{10}$$

将以上关系式应用于载荷噪声以及四极子噪声，得到

$$\begin{aligned}4\pi p' = &\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{f>0}\left[\frac{\boldsymbol{T}_{rr}}{r(1 - Ma_r)}\right]_{\mathrm{ret}} \mathrm{d}V + \\ &\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_{f>0}\left[\frac{3\boldsymbol{T}_{rr} - \boldsymbol{T}_{ii}}{r^2(1 - Ma_r)}\right]_{\mathrm{ret}} \mathrm{d}V + \\ &\int_{f>0}\left[\frac{3\boldsymbol{T}_{rr} - \boldsymbol{T}_{ii}}{r^3(1 - Ma_r)}\right]_{\mathrm{ret}} \mathrm{d}V + \\ &\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_{f=0}\left[\frac{\boldsymbol{L}_i \hat{\boldsymbol{r}}_i}{r(1 - Ma_r)}\right]_{\mathrm{ret}} \mathrm{d}S + \\ &\int_{f=0}\left[\frac{\boldsymbol{L}_i \hat{\boldsymbol{r}}_i}{r^2(1 - Ma_r)}\right]_{\mathrm{ret}} \mathrm{d}S + \\ &\frac{\partial}{\partial t}\int_{f=0}\left[\frac{\boldsymbol{Q}}{r(1 - Ma_r)}\right]_{\mathrm{ret}} \mathrm{d}S\end{aligned} \tag{11}$$

然后，将时间导数放在积分号内，这需要运用以下公式

$$\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_x = \left[\frac{1}{1 - Ma_r}\frac{\partial}{\partial \tau}\bigg|_x\right]_{\mathrm{ret}} \tag{12}$$

以及

$$\frac{\partial r}{\partial \tau} = -cMa_r \tag{13}$$

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \tau} = \frac{\hat{\boldsymbol{r}}_i cMa_r - cMa_i}{r} \tag{14}$$

$$\frac{\partial Ma_r}{\partial \tau} = \frac{1}{r}\left\{\hat{\boldsymbol{r}}_i \frac{\partial Ma_i}{\partial \tau} + c(Ma_r^2 - Ma^2)\right\} \tag{15}$$

最后得到

$$p'(x,t) = p'_Q(x,t) + p'_L(x,t) + p'_T(x,t) \tag{16}$$

式中：厚度噪声 Q，载荷噪声 L 以及四极子噪声 T 的表达式分别如下：

厚度噪声

$$\begin{aligned}4\pi p'_Q(x,t) = &\int_{f=0}\left[\frac{\rho_0(\dot{\boldsymbol{U}}_n + \boldsymbol{U}_{\dot{n}})}{r(1 - Ma_r)^2}\right]_{\mathrm{ret}} \mathrm{d}S + \\ &\int_{f=0}\left[\frac{\rho_0 \boldsymbol{U}_n(r\dot{M}a_r + c(Ma_r - Ma^2))}{r^2(1 - Ma_r)^3}\right]_{\mathrm{ret}} \mathrm{d}S\end{aligned} \tag{17}$$

式中：

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{U}_n = \boldsymbol{U}_i \hat{\boldsymbol{n}}_i, \quad \boldsymbol{U}_{\dot{n}} = \boldsymbol{U}_i \dot{\hat{\boldsymbol{n}}}_i, \quad \dot{\boldsymbol{U}}_n = \dot{\boldsymbol{U}}_i \hat{\boldsymbol{n}}_i, \\ &Ma_r = Ma_i \hat{\boldsymbol{r}}_i, \quad \dot{M}a_r = \dot{M}a_i \hat{\boldsymbol{r}}_i\end{aligned} \tag{18}$$

与时间有关的导数都是基于源时间的计算。

载荷噪声

$$\begin{aligned}4\pi p'_L(x,t) = &\frac{1}{c}\int_{f=0}\left[\frac{\dot{\boldsymbol{L}}_r}{r(1 - Ma_r)^2}\right]_{\mathrm{ret}} \mathrm{d}S + \\ &\int_{f=0}\left[\frac{\boldsymbol{L}_r - \boldsymbol{L}_M}{r^2(1 - Ma_r)^2}\right]_{\mathrm{ret}} \mathrm{d}S + \\ &\frac{1}{c}\int_{f=0}\left[\frac{\boldsymbol{L}_r(r\dot{M}a_r + c(Ma_r - Ma^2))}{r^2(1 - Ma_r)^3}\right]_{\mathrm{ret}} \mathrm{d}S\end{aligned} \tag{19}$$

式中：

$$\boldsymbol{L}_r = \boldsymbol{L}_i \hat{\boldsymbol{r}}_i, \quad \dot{\boldsymbol{L}}_r = \dot{\boldsymbol{L}}_i \hat{\boldsymbol{r}}_i, \quad \boldsymbol{L}_M = \boldsymbol{L}_i Ma_i \tag{20}$$

四极子噪声

$$4\pi p'_T(x,t) = \int_{f>0}\left[\frac{\boldsymbol{K}_1}{c^2 r} + \frac{\boldsymbol{K}_2}{cr^2} + \frac{\boldsymbol{K}_3}{r^3}\right]_{\mathrm{ret}} \mathrm{d}V \tag{21}$$

式中：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}_1 = &\frac{\ddot{\boldsymbol{T}}_{rr}}{(1 - Ma_r)^3} + \\ &\frac{\ddot{M}a_r \boldsymbol{T}_{rr} + 3\dot{M}a_r \dot{\boldsymbol{T}}_{rr}}{(1 - Ma_r)^4} + \frac{3\dot{M}a_r^2 \boldsymbol{T}_{rr}}{(1 - Ma_r)^5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}_2 = &\frac{-\dot{\boldsymbol{T}}_{ii}}{(1 - Ma_r)^2} - \frac{4\dot{\boldsymbol{T}}_{Ma_r} + 2\boldsymbol{T}_{\dot{M}a_r} + \dot{M}a_r \boldsymbol{T}_{ii}}{(1 - Ma_r)^3} + \\ &\frac{3[(1 - Ma^2)\dot{\boldsymbol{T}}_{rr} - 2\dot{M}a_r \boldsymbol{T}_{Ma_r} - Ma_i \dot{M}a_i \boldsymbol{T}_{rr}]}{(1 - Ma_r)^4} +\end{aligned}$$

$$\frac{6\dot{M}a_r(1-Ma^2)\boldsymbol{T}_{rr}}{(1-Ma_r)^5}$$

$$\boldsymbol{K}_3=\frac{2\boldsymbol{T}_{MaMa}-(1-Ma^2)\boldsymbol{T}_{ii}}{(1-Ma_r)^3}-\frac{6(1-Ma^2)\boldsymbol{T}_{Ma_r}}{(1-Ma_r)^4}+\frac{3(1-Ma^2)^2\boldsymbol{T}_{rr}}{(1-Ma_r)^5} \tag{22}$$

式中：$\boldsymbol{T}_{rr}=\boldsymbol{T}_{ij}\hat{\boldsymbol{r}}_i\hat{\boldsymbol{r}}_j$ 为 Lighthill 应力张量的双压缩。

$$\boldsymbol{T}_{MaMa}=\boldsymbol{T}_{ij}Ma_iMa_j,\quad \boldsymbol{T}_{Ma_r}=\boldsymbol{T}_{ij}Ma_i\hat{\boldsymbol{r}}_j,$$
$$\boldsymbol{T}_{\dot{M}a_r}=\boldsymbol{T}_{ij}\dot{M}a_i\hat{\boldsymbol{r}}_j,\quad \dot{\boldsymbol{T}}_{Ma_r}=\dot{\boldsymbol{T}}_{ij}Ma_i\hat{\boldsymbol{r}}_j,$$
$$\dot{\boldsymbol{T}}_{rr}=\dot{\boldsymbol{T}}_{ij}\hat{\boldsymbol{r}}_i\hat{\boldsymbol{r}}_j,\quad \ddot{\boldsymbol{T}}_{rr}=\ddot{\boldsymbol{T}}_{ij}\hat{\boldsymbol{r}}_i\hat{\boldsymbol{r}}_j \tag{23}$$

最后，将积分方程推广到以速度 cMa_0 的运动观察者的情况，这可以通过把方程式(11)中与厚度噪声有关的时间导数看作为拉格朗日导数来实现。其他的时间导数，可以通过关系式(12)处理，此时，可以认为观察者是不动的。这样，就有

$$4\pi p'_Q(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_{f=0}\left[\frac{\rho_0\boldsymbol{U}_n}{r(1-Ma_r)}\right]_{\rm ret}\mathrm{d}S-\frac{\partial}{\partial t}\int_{f=0}\left[\frac{\rho_0\boldsymbol{U}_nMa_{or}}{r(1-Ma_r)}\right]_{\rm ret}\mathrm{d}S-c\int_{f=0}\left[\frac{\rho_0\boldsymbol{U}_nMa_{or}}{r^2(1-Ma_r)}\right]_{\rm ret}\mathrm{d}S \tag{24}$$

对于运动的观察者，厚度噪声的表达式为

$$4\pi p'_Q(x,t)=\int_{f=0}\left[\frac{\rho_0(\dot{\boldsymbol{U}}_n+\boldsymbol{U}_{\dot{n}})}{r(1-Ma_r)^2}\right]_{\rm ret}\mathrm{d}S+\int_{f=0}\left[\frac{\rho_0\boldsymbol{U}_n(r\dot{M}a_r+c(Ma_r-Ma^2))}{r^2(1-Ma_r)^3}\right]_{\rm ret}\mathrm{d}S-\int_{f=0}\left[Ma_{or}\frac{\rho_0(\dot{\boldsymbol{U}}_n+\boldsymbol{U}_{\dot{n}})}{r(1-Ma_r)^2}\right]_{\rm ret}\mathrm{d}S-\int_{f=0}\left[Ma_{or}\frac{\rho_0\dot{M}a_r\boldsymbol{U}_n}{r(1-Ma_r)^3}\right]_{\rm ret}\mathrm{d}S-\int_{f=0}\left[Ma_{or}\frac{\rho_0c\{2Ma_{or}Ma_r-Ma_{or}Ma^2-Ma_{oi}Ma_i(1-Ma_r)-Ma_{or}Ma_r^2\}}{r^2(1-Ma_r)^3}\right]_{\rm ret}\mathrm{d}S-\int_{f=0}\left[\frac{Ma_{or}\rho_0c\boldsymbol{U}_n}{r^2(1-Ma_r)}\right]_{\rm ret}\mathrm{d}S \tag{25}$$

3 FW-H 方程的高级时间方法

延迟时间方法是在给定的观察者时刻记录感受到的声音扰动信号。这些扰动依赖于声源和观察者的位置及速度，它们是在不同的延迟时间向周围辐射噪声，在到达观察者位置之前跨过不同的距离。而高级时间方法[2]是基于给定的声源时间计算积分区域内的声音扰动信号，这些扰动的计算需要当前的气动数据以及动能。在每一个计算时间步，针对每一个声源单元，扰动到达观察者的时间定义为高级时间。在高级时刻观察者的位置用作计算观察者与点源之间的相对距离。最后，统计所有声源单元的声扰动贡献作为观察者时刻的信号。

考虑延迟时间方程

$$\tau_{\rm ret}=t-\frac{|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{y}(\tau_{\rm ret})|}{c} \tag{26}$$

在观察者时刻 $t+\Gamma$，得到

$$\tau'_{\rm ret}=t+\Gamma-\frac{|\boldsymbol{x}(t+\Gamma)-\boldsymbol{y}(\tau'_{\rm ret})|}{c} \tag{27}$$

这样，设定 $\tau'_{\rm ret}\equiv t$，可以得到

$$\Gamma=\frac{|\boldsymbol{x}(t+\Gamma)-\boldsymbol{y}(t)|}{c} \tag{28}$$

式中：$t+\Gamma$ 是由在时刻 t 声源单元 y 产生的扰动到达观察者 x 的时间。因此，高级时间定义为

$$t_{\rm adv}=t+\Gamma \tag{29}$$

假定观察者以常数速度 $cMa_{\rm o}$ 运动。求解方程式(27)就可以得到

$$\Gamma^{\pm}=\frac{\boldsymbol{r}_iMa_{oi}\pm\sqrt{(\boldsymbol{r}_iMa_{oi})^2+\boldsymbol{r}^2(1-Ma_{\rm o}^2)}}{c(1-Ma_{\rm o}^2)}=\frac{\boldsymbol{r}}{c}\left\{\frac{Ma_{or}\pm\sqrt{Ma_{or}^2+1-Ma_{\rm o}^2}}{1-Ma_{\rm o}^2}\right\} \tag{30}$$

式中：$\boldsymbol{r}_i=x_i(t)-y_i(t)$ 为声辐射向量，$Ma_{or}=\hat{\boldsymbol{r}}_iMa_{oi}$ 为观察者马赫数向量。由于信号在辐射之前是不能被观察者收到，所以 Γ 可能为负。有趣的是，Γ 仅依赖于观测者速度，和声源速度无关。下面分情况讨论：

(1)观察者没有运动的情况：$Ma_{\rm o}=0$。仅有 $\Gamma^+=r/c$ 是物理解。

(2)观察者作亚声速运动的情况：$Ma_{\rm o}<1$。

$$Ma_{or}+\sqrt{Ma_{or}^2+\alpha^2}>0 \tag{31}$$

式中：$\alpha^2=1-Ma_{\rm o}^2$。因此，仅有 Γ^+ 为物理解。

(3) 观察者作超声速运动：$Ma_{\rm o}>1$。

$$Ma_{or}\pm\sqrt{Ma_{or}^2-\alpha^2}<0 \tag{32}$$

式中：$\alpha^2=-1+Ma_{\rm o}^2$。因此，又可分为2种情况：

① 观察者作远离声源的运动：$Ma_{or}>0$。两个解 $\Gamma^{\pm}$ 都不满足条件 $\Gamma>0$。

② 观察者作接近声源的运动：$Ma_{or}<0$。假定 $Ma_{or}<-\sqrt{M_{or}^2-1}$，则两个解 $\Gamma^{\pm}$ 都是物理解。

4 高级时间方法计算中的插值格式

在利用 FW-H 声比拟高级时间方法预测气动噪声时，计算中的插值格式[3]至关重要，特别是插值格式的精度尤其重要。本文给出两种不同精度的插值格式。假定 t^n 为离散的高级时间，在这个

时刻，在观察者位置要收集的声压信号为 p^n。在声源产生的声压信号 p_*^n 在 t_*^n 时刻到达观察者。对于 t_*^n，关系式 $t^n \leqslant t_*^n < t^{n+1}$ 成立。记 $\delta^+ t = (t_*^n - t^n)/\Delta t$，$\delta^- t = 1 - \delta^+ t$，则有 $0 \leqslant \delta^+ t < 1$ 成立。

(1) 0 阶插值

在 0 阶插值格式中，最近的时刻，最先收集到声音信号。也即，如果 $\delta^+ t \leqslant 0.5$，则 p_*^n 为 p^n 的声音信号贡献。反之，如果 $\delta^+ t > 0.5$，则 p_*^n 为 p^{n+1} 的声音信号贡献。

(2) 线性插值

对于每个声源扰动 p_*^n，它分别对 p^n 及 p^{n+1} 的声扰动贡献，即

$$p^n = \delta^- t p_*^n, p^{n+1} = \delta^+ t p_*^n \tag{33}$$

5　结果与验证

5.1　方柱涡脱落噪声模拟

将 FW-H 声比拟方法应用于方柱涡脱落产生噪声的数值预测研究中。方柱绕流模拟的流动状态：来流的马赫数为 $Ma=0.2$，雷诺数为 $Re=150$，雷诺数是基于来流速度 $\boldsymbol{U}_\infty$、方柱高度 D 以及运动黏性 v。方柱表面的气动数据由格子 Boltzmann 方法(Lattice Boltzmann method, LBM)方法计算得到[8]。然后，这些气动数据作为输入，代入 FW-H 声比拟的计算程序中。声源的时间步长与观察者处的时间步长是一致的。图 1 给出了利用延迟时间与高级时间方法计算得到的声压信号，其中，横坐标为量纲一的时间步数，纵坐标为量纲一的声压系数。由图 1 可知，高级时间方法计算得到的解能够和延迟时间方法的解吻合，除此之外，高级时间方法的另一个优势在于，它不需要事先存储大量的声源数据，可以和声源计算同时进行，这位三维噪声问题的数值预测节省很大的计算成本。

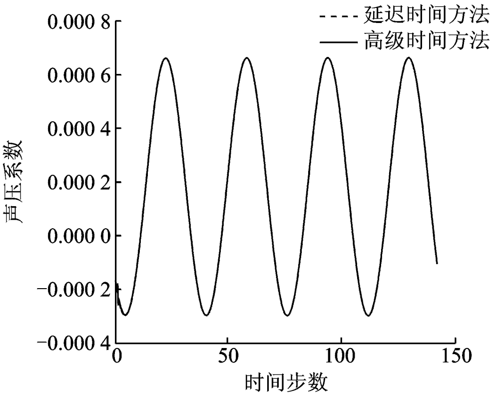

图 1　高级时间与延迟时间方法下声压系数计算结果比较

5.2　NACA0012 翼型噪声模拟

NACA0012 翼型绕流模拟的来流状态为：马赫数 $Ma=0.2$，迎角为 $20°$，雷诺数为 $Re=10\ 000$，雷诺数是基于来流速度 $\boldsymbol{U}_\infty$、翼型弦长以及运动黏性 v。这种大迎角情况下翼型尾部会出现涡脱落，从而产生涡脱落噪声。非定常流场计算采用二维 EllipSys2D 程序[9]，它是由丹麦科技大学风能系流体力学教研室开发的，其可靠性已被验证。本文计算中湍流模型采用 k-ω 模型。图 2 为某时刻压力等值线，图 3 为某时刻的翼型绕流的流线谱，由图可以清楚地看到翼型尾缘附近的涡脱落现象。图 4，5 分别为涡脱落引起的升力系数脉动曲线及阻力系数脉动曲线，其中，横坐标为量纲一的时间步数，纵坐标为量纲一的升力系数。可以看出，这种涡脱落是单周期性的。然后，将该翼型非定常计算

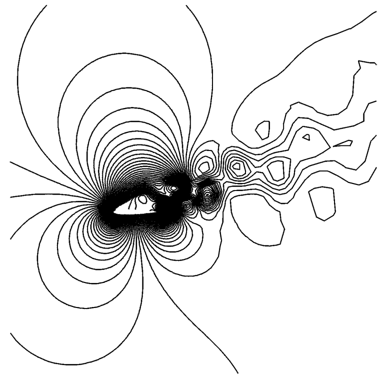

图 2　某时刻的压力等值线

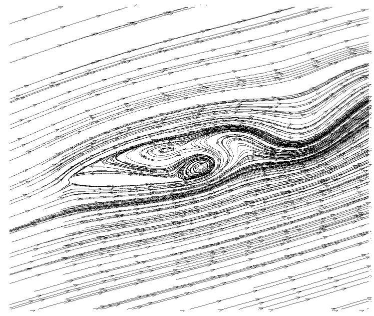

图 3　流线谱

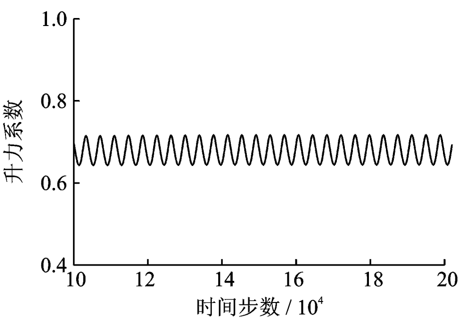

图 4　升力系数脉动曲线

得到的气动数据作为输入，代入FW-H方程中进行噪声的预测。图6为FW-H方程的高级时间方法和延迟时间方法计算得到的翼型远场某点处的声压脉动信号，其中，横坐标为量纲一的时间步数，纵坐标为量纲一的声压系数，由此图可以得到，这两种方法计算所得结果基本吻合，进一步说明，高级时间方法不但可以节省存储成本，而且非常有效。

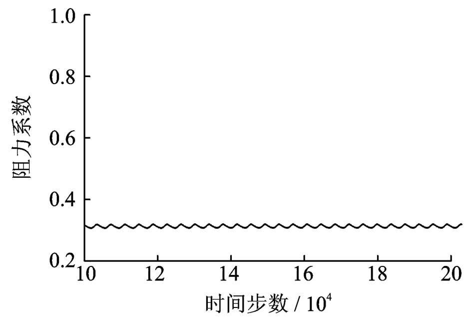

图5 阻力系数脉动曲线

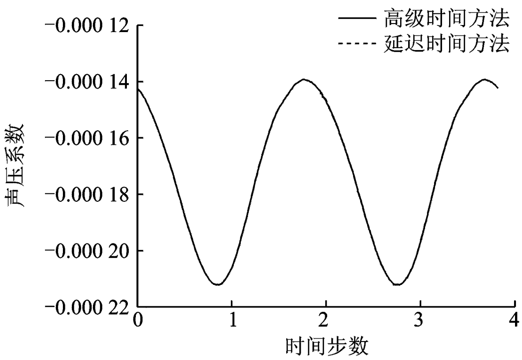

图6 两种时间方法下声压脉动信号的计算值比较

6 结束语

本文研究了FW-H声比拟方法预测噪声的高级时间方法。将该方法应用于方柱绕流涡脱落噪声以及NACA0012翼型尾缘涡脱落噪声的模拟，研究表明，与延迟时间方法相比，高级时间方法预测单频涡脱落噪声的计算结果能够保持一致，它的有效性得到了验证，但对于多个频率涡脱落情况，还需要进一步的研究确认。

参考文献：

[1] Lighthill M J. On sound generated aerodynamically: I. General theory[J]. Proceeding of The Royal Society of London, 1952,211A(1107): 564-578.

[2] Casalino D. An advanced time approach for acoustic analogy predictions[J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, 261(4): 583-612.

[3] Kierkegaard A, Efraimsson G. A numerical investigation of interpolation methods for acoustic analogies [R]. AIAA 2010-3997, 2010.

[4] Shen W Z, Zhu W J, Sørensen J N. Aero-acoustic computaions for turbulent airfoil flows[J]. AIAA Journal, 2009, 47(6):1518-1527.

[5] Si Haiqing, Wang Bing, Wu Xiaojun. Study on acoustic propagation in sheared mean flow using computational aeroacoustics[J]. Transactions of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2013, 30(1):33-38.

[6] 司海青，王兵. 气动声学计算中一种声扰动方程的改进[J]. 航空计算技术，2012,42(5):1-3,8.
Si Haiqing, Wang Bing. An improved acoustic perturbation equation for computational aeroacoustics [J]. Aeronautical Computing Technique, 2012, 42 (5):1-3,8.

[7] 司海青，石岩，王兵，等. 基于格子Boltzmann方法的气动声学计算[J]. 南京航空航天大学学报，2013,45(5):616-620.
Si Haiqing, Shi Yan, Wang Bing, et al. Computational aeroacoustics based on the lattice Boltzmann method[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2013, 45(5): 616-620.

[8] Si Haiqing, Wang Bing, Shi Yan, et al. Aero-acoustics computations of square cylinder using the lattice Boltzmann method[J]. Applied Mechanics and Materials, 2013, 444/445: 400-405.

[9] Zhu W J, Shen W Z, Sørensen J N. High-order numerical simulations of flow-induced noise[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2011, 66(1): 17-37.