

## 不同边界条件下硅橡胶蒙皮的力学性能分析

李杰锋<sup>1,2</sup> 沈星<sup>2</sup> 潘荣华<sup>1</sup>

(1. 南京航空航天大学无人机研究院, 南京, 210016;

2. 南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室, 南京, 210016)

**摘要:**针对超弹性材料硅橡胶作为变体机翼蒙皮的应用需求,给出了具有一致物理量的有限元分析的大变形虚功方程及本构方程;建立了硅橡胶蒙皮的有限元模型,对其本构模型进行模拟和验证;分析了不同边界条件下的硅橡胶蒙皮的力学特性。结果表明:在固定蒙皮一端的拉伸条件下,主应力  $S_{11}$  及  $S_{22}$ ,主应变  $E_{11}$  及  $E_{22}$  在固定端范围内均表现出非均匀性,在  $y$  方向有大的收缩变形,且蒙皮厚度也表现出非均匀性;增加  $y$  方向位移约束后,主应力  $S_{11}$  及  $S_{22}$ ,与主应变  $E_{11}$  具有均匀场,主应变  $E_{22}$  在受力端小范围呈现非均匀性,但量级很小,蒙皮厚度为均匀厚度。

**关键词:**力学性能;硅橡胶;有限元;边界条件;大变形

中图分类号:TB324; TB301

文献标志码:A

文章编号:1005-2615(2013)06-0769-07

## Mechanics Property Analysis of Silicone Rubber Sheet Under Different Boundary Conditions

Li Jiefeng<sup>1,2</sup>, Shen Xing<sup>2</sup>, Pan Ronghua<sup>1</sup>

(1. Research Institute of Unmanned Aerial Vehicle, Nanjing University of Aeronautics &

Astronautics, Nanjing, 210016, China; 2. State Key Laboratory of Mechanics and Control of

Mechanical Structures, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China)

**Abstract:** For the application requirements of hyperelastic material silicone rubber in morphing wing skin sheet, the virtual work equation and the constitutive equation of large deformation with identical variables are presented. A finite element model of wing skin of rubber is developed, and its constitutive relation is simulated and validated. After that, its mechanics properties are calculated under different boundary conditions. The results indicate that, under the condition of fixed one end, the principle stress  $S_{11}$ ,  $S_{22}$  and principle strain  $E_{11}$ ,  $E_{22}$  are non-uniform distribution on the areas near the fixed end, but a large contraction strain is exhibited in  $y$ -direction. Moreover, its section thickness after deformation is also non-uniform. When another boundary condition of the displacement constraint in  $y$ -direction is imposed on the model, the distribution of  $S_{11}$ ,  $S_{22}$  and principle strain  $E_{11}$  represent uniform. The strain  $E_{22}$  is non-uniform on the small area near the loading end, and its value is very small. However, the thickness of deformed model presents uniform under this condition.

**Key words:** mechanics property; silicone rubber; finite element; boundary condition; large deformation

为了提高飞行器的飞行性能,可随飞行条件改变外形的变体机翼已成为航空领域的研究热点<sup>[1]</sup>。

变体机翼的发展促进了柔性蒙皮的研究,起初的柔性蒙皮为树脂基复合材料柔性蒙皮<sup>[2-3]</sup>,但这类蒙

皮所需驱动力大,且变形量小。为了弥补该种蒙皮的不足,研究人员最近提出了一种新型的被动柔性蒙皮<sup>[4]</sup>,可实现大尺度多形态变化,且不需要很大驱动力。该类蒙皮由柔性基体和弹性基表层复合而成,通常所用弹性表层为超弹性材料硅橡胶,为此需对硅橡胶表层的性能进行研究。

对硅橡胶蒙皮性能的研究需关注3方面的问题:(1)硅橡胶材料自身的性能,包括材料硫化过程的内部机理、性能测试及影响因素<sup>[5-7]</sup>。(2)硅橡胶本构模型<sup>[8]</sup>及有限元分析的研究,在有限元分析中本构方程及虚功方程是分析的核心。由于橡胶的材料非线性及大变形的几何非线性,如何将本构方程、虚功方程、有限元软件的物理量统一,是理解有限元原理和应用有限元软件的重要环节,但相关研究相对较少。另外由文献<sup>[9,10]</sup>可知,在应用软件分析过程中获取性能参数通常比较繁琐,需进行不同类型的试验。因此如何简化或减少试验类型和次数是有限元分析的另一要点。(3)考虑蒙皮应用中的状态,分析不同约束或外力驱动力条件下的力学性能,这方面研究鲜有报道。

本文针对以上第(2,3)条,给出了大变形条件下基于物质描述的具有一致物理量的虚功方程和本构方程,并与有限元软件中的物理量统一;在此基础上建立有限元分析模型,通过单向拉伸试验对其本构模型进行拟合获得性能参数;分析了不同约束条件下硅橡胶蒙皮力学性能。

## 1 有限元分析原理

橡胶材料通常认为是不可压缩超弹性材料,其变形包括几何非线性和材料非线性。在变形前的构形是已知的,对应的应力和应变为零,要确定的是在载荷和约束作用下变形后的构形。选择固定不动的直角坐标系,在变形前物体内一点的坐标 $\mathbf{X}_i$ 是已知的,变形后该质点的坐标 $\mathbf{x}_i$ 是待求的。未知量可用质点的位移表示 $\mathbf{u}_i = \mathbf{x}_i(\mathbf{X}_j) - \mathbf{X}_i$ ,即把 $\mathbf{u}_i$ 看作 $\mathbf{X}_i$ 的函数,这种处理问题的方法即物质描述方法,采用的度量是克希荷夫应力 $\mathbf{S}_{ij}$ 和格林应变 $\mathbf{E}_{ij}$ 。

### 1.1 大变形条件下物质描述的虚功方程

有限元分析时需要物质描述下位移形式的虚功方程,已知空间描述的虚功方程

$$\int_V \boldsymbol{\tau}_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V \mathbf{p}_i \delta \mathbf{u}_i dV + \int_{A_i} \mathbf{q}_i \delta \mathbf{u}_i dA \quad (1)$$

空间描述中单位体积的变形功率 $\dot{\omega}$ 为

$$\dot{\omega} = \boldsymbol{\tau}_{ij} \mathbf{V}_{ij} \quad (2)$$

式中: $\mathbf{V}_{ij}$ 为变形率张量,利用 $\mathbf{E}_{ij}$ 的物质导数 $\dot{\mathbf{E}}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial \mathbf{X}_i} \frac{\partial \mathbf{x}_l}{\partial \mathbf{X}_j} \mathbf{V}_{kl}$ 及欧拉应力 $\boldsymbol{\tau}_{ij}$ 与克希荷夫应力 $\mathbf{S}_{lm}$ 的关系式: $\mathbf{S}_{lm} = J \frac{\partial \mathbf{X}_l}{\partial \mathbf{x}_i} \frac{\partial \mathbf{X}_m}{\partial \mathbf{x}_j} \boldsymbol{\tau}_{ij}$ ,则 $\dot{\omega}$ 可写为

$$\dot{\omega} = J^{-1} \mathbf{S}_{mn} \dot{\mathbf{E}}_{mn} \quad (3)$$

于是得物质描述中单位体积功率

$$\dot{W} = \dot{\omega} \frac{dV}{dV_0} = \dot{\omega} J = \mathbf{S}_{ml} \dot{\mathbf{E}}_{ml} \quad (4)$$

将式(4)两端乘以无限小时间间隔 $dt$ ,得变形能增量表达式

$$dW = \mathbf{S}_{mn} d\mathbf{E}_{mn} \quad (5)$$

利用式(5)并考虑变形过程中载荷不变,可将式(1)转换为物质描述的虚功方程

$$\int_{V_0} \mathbf{S}_{ij} \delta \mathbf{E}_{ij} dV_0 = \int_{V_0} \mathbf{p}_{oi} \delta \mathbf{u}_i dV_0 + \int_{A_0} \mathbf{q}_{oi} \delta \mathbf{u}_i dA_0 \quad (6)$$

虚功方程是以积分形式描述物体各点应力的平衡和连续的方程,是位移有限单元分析的基础。

### 1.2 Mooney-Rivlin 模型及本构方程

工程中广泛应用的橡胶材料本构关系为 Mooney-Rivlin 模型,即应变能函数 $W$ 是应变不变量 $I_i$ 的函数

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) \quad (7)$$

式中: $\mathbf{C}_{ij}$ 为 Rivlin 系数, $I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$ ;  $I_2 = (\lambda_1 \lambda_2)^2 + (\lambda_2 \lambda_3)^2 + (\lambda_3 \lambda_1)^2$ ,  $\lambda_i (i=1,2,3)$ 为伸长比。又格林应变 $\mathbf{E}_{ij}$ 与伸长比的关系为 $\lambda_i = (1 + 2\mathbf{E}_{ii})^{1/2}$ ,因此可用 $\mathbf{E}_{ij}$ 表示应变能密度

$$\dot{W} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}_{ij}} \dot{\mathbf{E}}_{ij} \quad (8)$$

将式(8)与 $\dot{W} = \mathbf{S}_{ml} \dot{\mathbf{E}}_{ml}$ 相减,得

$$(\mathbf{S}_{ij} - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}_{ij}}) \dot{\mathbf{E}}_{ij} = 0 \quad (9)$$

又不可压缩条件为变形率张量 $\mathbf{V}_{ii} = 0$ ,即

$$\frac{\partial \mathbf{X}_i}{\partial \mathbf{x}_k} \frac{\partial \mathbf{X}_j}{\partial \mathbf{x}_k} \dot{\mathbf{E}}_{ij} = \mathbf{V}_{kk} = 0 \quad (10)$$

将式(9)与式(10)相比较,可得 $\mathbf{S}_{ij} - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}_{ij}}$ 与

$\frac{\partial \mathbf{X}_i}{\partial \mathbf{x}_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}_j}{\mathbf{x}_k}$ 成比例,取比例因子为 $(-p)$ ,得到橡胶

材料的本构方程

$$\mathbf{S}_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}_{ij}} - p \frac{\partial \mathbf{X}_i}{\partial \mathbf{x}_k} \frac{\partial \mathbf{X}_j}{\partial \mathbf{x}_k} \quad (11)$$

式中: $p$ 通常被看作静水压力,需通过平衡方程和力的边界条件确定,物质描述的平衡方程及应力边界条件为

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}_k} (\mathbf{S}_{lk} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \mathbf{X}_l}) + \mathbf{p}_{0i} = 0 \quad (12)$$

$$\mathbf{S}_{lk} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \mathbf{X}_l} N_k = \mathbf{q}_{0i} \quad (13)$$

式中:  $\mathbf{p}_{0i}$ ,  $\mathbf{q}_{0i}$  分别表示初始构型中单位体积的体力和面力载荷。该本构方程与虚功方程及平衡方程具有一致性物理量纲,且与有限元软件 ABAQUS 中的物理量统一,即用物质描述的格林应变和克希荷夫应力描述。

## 2 有限元分析模型

### 2.1 几何模型

利用 ABAQUS 有限元软件建立单向拉伸分析模型。分析中使用国际单位(SI)一致性量纲系统,几何模型为 600 mm×300 mm×5 mm(长×宽×厚)的薄板。

### 2.2 本构模型的模拟

对于橡胶超弹性材料本构模型中的材料参数是通过向 ABAQUS 软件提供试验数据,ABAQUS 计算后与其中本构模型比较,给出材料常数及本构模型,并分析其稳定性。本文模拟橡胶在拉伸条件下的变形,通过输入单向拉伸试验数据即可获得材料常数及相应的本构模型。试验所用试样由本实验室制备并按 GB527 要求采用数控切割设备切出标准试样,测试获得的名义应力应变见表 1。

将表 1 中数据输入软件中材料属性进行评估,以模拟本构模型的多项式应变能函数并获得材料常数,模拟时分别取多项式阶数  $N=1, 2$ ,应变范围为 0~2.5。模拟后曲线及与试验数据比较见图 1,材料参数及稳定性见表 2。

表 1 单向拉伸试验数据

参数	数值									
应力/MPa	0.053	0.149	0.253	0.361	0.426	0.570	0.626	0.740	0.853	0.971
应变	0.039	0.134	0.219	0.343	0.459	0.624	0.848	1.427	1.957	2.468

表 2 不同多项式本构模型参数下应变稳定性极限模拟结果

模拟状态	N=1		N=2	
		$C_{10}=92\ 593.662\ 2$ $C_{01}=179\ 868.782$	$C_{01}=-196\ 473.303$ $C_{10}=401\ 829.750$	$C_{20}=16\ 172.645\ 6$ $C_{11}=-71\ 086.396\ 3$ $C_{02}=-12\ 599.355\ 6$
单轴拉伸	评估应变范围内均稳定		最大应变 0.340 0,超过该值不稳定	
单轴压缩	评估应变范围内均稳定		最小应变 -0.216 9,超过该值不稳定	
双轴拉伸	评估应变范围内均稳定		最大应变 0.130 0,超过该值不稳定	
双轴压缩	评估应变范围内均稳定		最小应变 -0.136 1,超过该值不稳定	
平面拉伸	评估应变范围内均稳定		最大应变 0.250 0,超过该值不稳定	
平面压缩	评估应变范围内均稳定		最小应变 -0.200 0,超过该值不稳定	

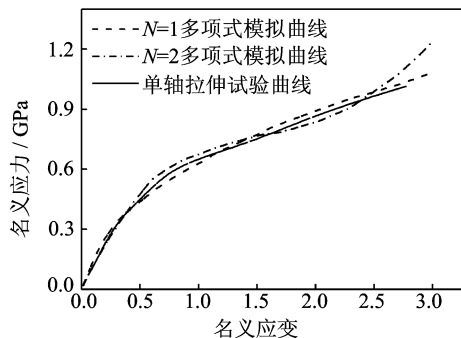


图 1 橡胶材料本构模型模拟曲线

从分析结果看出,当  $N=1$  时的材料常数在评估的应变范围内均稳定,因此取  $N=1$  多项式即 Mooney-Rivlin 应变能函数作为该材料的本构模

型是合理的。而采用  $N=2$  多项式应变能函数,材料常数在超过一定的应变后,模型不稳定。

### 2.3 条件设置

分析中采用的单元类型为 4 节点有限变形壳单元,为提高计算效率采用减缩积分,并通过沙漏控制限制沙漏扩展。分析为通用静力几何非线性分析,采用牛顿法直接求解。

分析模型在两种约束条件下的力学特性。条件一:模型在  $x$  轴方向左端固定, $y$  方向自由,如图 2 所示;条件二:模型在  $x$  轴方向左端固定,并约束  $y$  方向位移,如图 3 所示。两种条件下施加的载荷相同,即在  $x$  轴右端边上施加 5 kPa 均布拉力。



图2 条件一下的分析模型

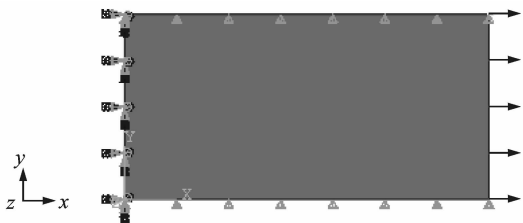


图3 条件二下的分析模型

### 3 结果及讨论

#### 3.1 条件一下的分析结果

分析结果中的应变为格林应变,应力为克希希夫应力。由于为平面应力,存在的应力分量为  $S_{11}$ ,  $S_{22}$ ,  $S_{12}$  (图中用 S11, S22, S12 表示), 应变分量为  $E_{11}$ ,  $E_{22}$ ,  $E_{12}$  (图中用 EE11, EE22, EE12 表示)。分析结果见图 4~10。

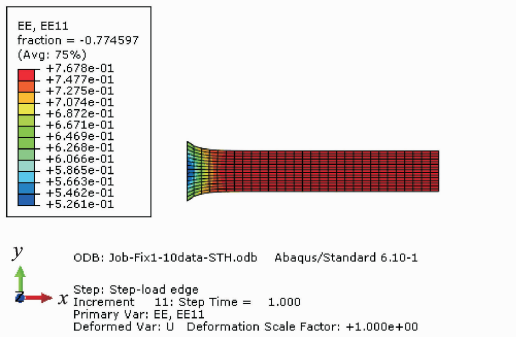


图4 应变分量  $E_{11}$  云纹图

从以上结果云纹图中可看出,在条件一下,所考察的应力、应变分量在固定端小范围内呈现非均匀场,而其余的大部分范围则为均匀场。变形后的横截面厚度 (Section thickness, STH) 也具有相似规律,各部分的量值变化见表 3。

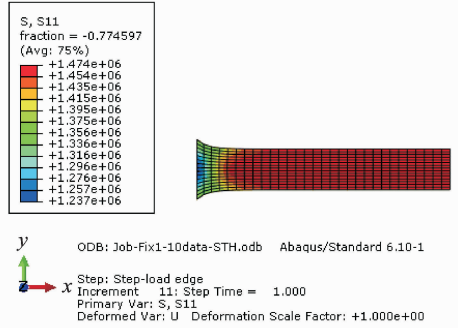


图5 应力分量  $S_{11}$  云纹图

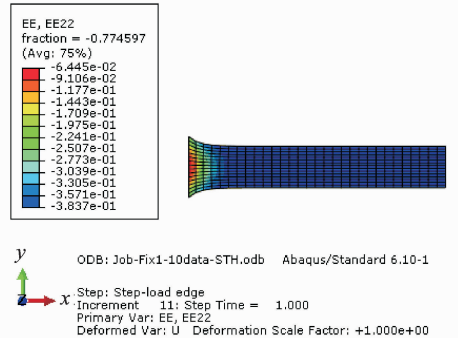


图6 应变分量  $E_{22}$  云纹图

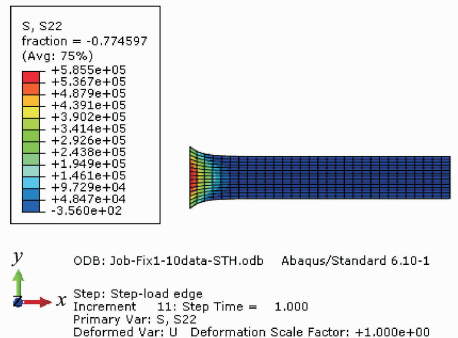


图7 应力分量  $S_{22}$  云纹图

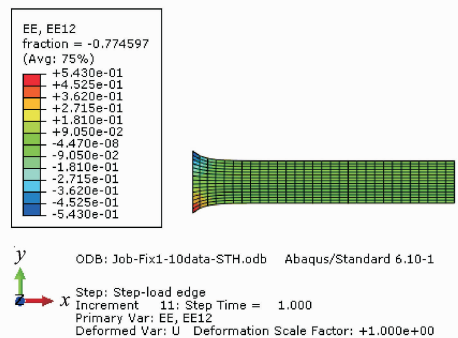


图8 应变分量  $E_{12}$  云纹图

表3 条件一下的分析结果

性能分布	应变分量			应力分量/kPa			STH/mm
状态	$E_{11}$	$E_{22}$	$E_{12}$	$S_{11}$	$S_{22}$	$S_{12}$	
非均匀场	0.526 1~	-0.064 45~	$\pm 0.090 5\sim$	1 237~	48.47~	$\pm 111.8\sim$	3.151~
	0.747 7	-0.3571	$\pm 0.543$	1 454	585.5	$\pm 335.4$	3.425
均匀场	0.767 8	-0.383 7	$-4.47\times 10^{-8}$	1 474	-0.356	$7.813\times 10^{-6}$	3.45

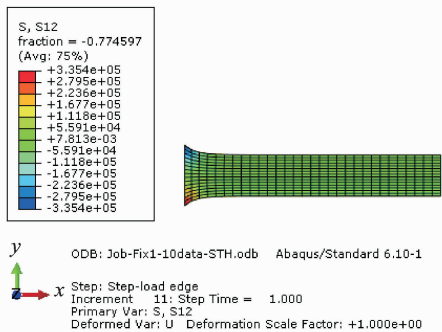


图 9 应力分量  $S_{12}$  云纹图

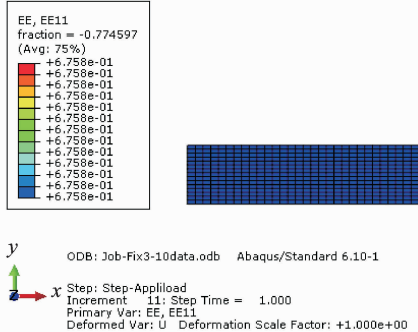


图 11 应变分量  $E_{11}$  云纹图

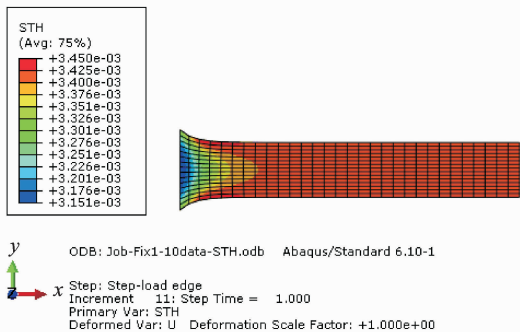


图 10 横截面厚度云纹图

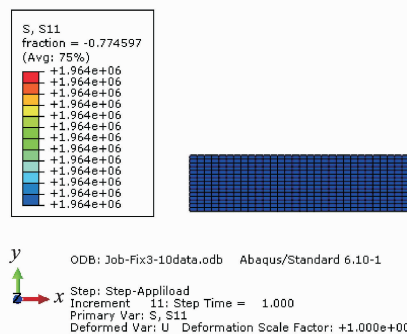


图 12 应力分量  $S_{11}$  云纹图

从表 3 中可以看出,应变分量  $E_{11}$  与应力分量  $S_{11}$ ,即沿  $x$  方向的变形及应力是主要的,且固定端小范围的非均匀场与均匀场的量值相差不大,最大应变为 76%,最大应力为 1 474 kPa。

应变分量  $E_{22}$  和应力分量  $S_{22}$  的非均匀场与均匀场的数值相差较大,非均匀场最大应力为 585.5 kPa,最大应变为 0.357 1。由于没有  $y$  方向约束,均匀场的应力仅有  $-0.356$  kPa,但应变为 0.383 7,将导致蒙皮在伸缩过程中沿  $y$  方向产生收缩。

由于固定端的约束,应变分量  $E_{12}$  及应力分量  $S_{12}$  在固定端小范围呈现非均匀性,应变的最大值 0.543,应力的最大值 335.4 kPa,因此非均匀变形对蒙皮性能影响较大。而均匀场量值很小,对蒙皮性能的影响可以忽略。

变形后截面厚度在固定端附近出现非均匀性,厚度范围 3.151~3.425 mm,这对蒙皮应用是不利的。

### 3.2 条件二下的分析结果

改变约束条件(即条件二)的分析结果云纹图见图 11~17。从云纹图中可看出增加  $y$  方向位移约束后,变形后的应变、应力场发生明显变化。其

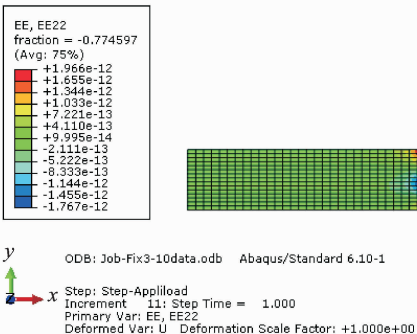


图 13 应变分量  $E_{22}$  云纹图

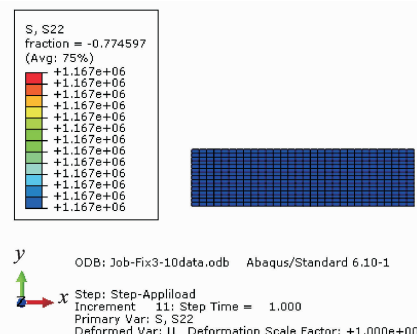


图 14 应力  $S_{22}$  云纹图

表 4 条件二下的分析结果

性能分布	应变分量			应力分量/kPa			STH/mm
状态	$E_{11}$	$E_{22} \times 10^{-13}$	$E_{12} \times 10^{-13}$	$S_{11}$	$S_{22}$	$S_{12}$	
非均匀场		$-8.333 \sim 19.66$	$-4.981 \sim 31.72$			$(-6.543 \sim 18.7) \times 10^{-10}$	
均匀场	0.675 8	0.999 5	1.136	1.964	1.167	$0.669 7 \times 10^{-11}$	2.544

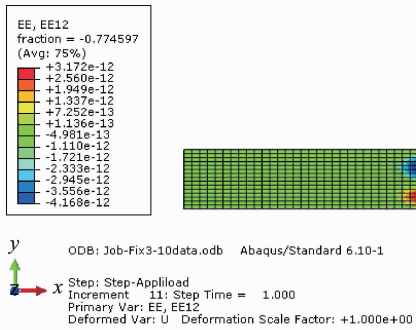
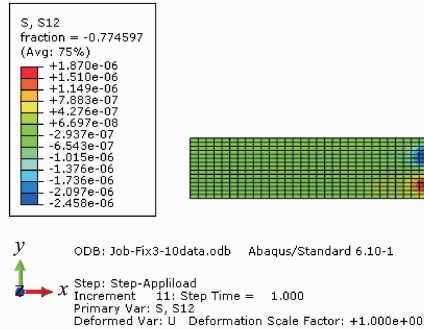
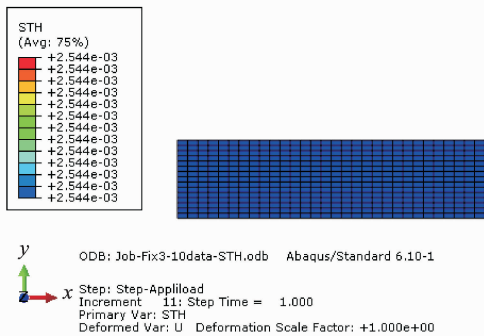
图15 应变分量  $E_{12}$  云纹图图16 应力分量  $S_{12}$  云纹图

图17 横截面厚度云纹图

中应变分量  $E_{11}$ 、应力分量  $S_{11}$  为均匀场；应变分量  $E_{22}$  在受力端小范围出现非均匀场，但应力分量  $S_{22}$  为均匀场；应变分量  $E_{12}$ 、应力分量  $S_{12}$  也在受力端小范围内出现非均匀场；蒙皮厚度则为均匀场。各部分量值见表4。

从表4中可看出：在条件二下，应变  $E_{11}$  为均匀场，应变值为0.6758，相应的应力  $S_{11}$  也为均匀场，其值为1.964 kPa；而应变  $E_{22}$  在受力端小范围出现非均匀场，且均匀场与非均匀场的应变都很小，但应力分量  $S_{22}$  为均匀场，其值为1.167 kPa，这是由于材料非线性及约束影响；应变  $E_{12}$ 、应力  $S_{12}$  也在受力端小范围出现非均匀场，但量级都很小，对性能的影响可以不计；变形后的厚度为均匀厚度，其值为2.544 mm，约为原厚度5 mm的一半。

比较条件一及条件二下的分析结果，可看出两种条件下变形的相同点是：都以主应变  $E_{11}$ 、 $E_{22}$  和主应力  $S_{11}$ 、 $S_{22}$  为主；两种条件下应变  $E_{12}$ 、应力  $S_{12}$  都出现均匀场和非均匀场，但均匀场对蒙皮性能的影响很小。不同点是：(1) 条件一的  $E_{11}$ 、 $S_{11}$  在固定端出现非均匀场，而条件二下为均匀场。(2) 条件一下  $E_{22}$ 、 $S_{22}$  在固定端出现非均匀场，且  $E_{22}$  量值较大。条件二下的  $E_{22}$  在受力端出现非均匀场，但量值很小；而  $S_{22}$  为均匀应力场，且其值与  $S_{11}$  具有相同的量级。(3) 条件一下的应变  $E_{12}$ 、应力  $S_{12}$  的非均匀场出现在固定端，且量值较大；而条件二下非均匀场出现在受力端，且量值很小，对蒙皮性能的影响可以不计。(4) 厚度方面，条件一下变形后为非均匀厚度，而条件二则为均匀厚度。由此可见，条件二下的变形结果：具有均匀的  $E_{11}$  应变场、 $S_{11}$  应力场、 $S_{22}$  应力场及均匀的厚度更符合变体机翼对蒙皮变形的要求，是应用中理想的约束方式。

## 4 结 论

(1) 以硅橡胶柔性蒙皮为研究对象，针对其超弹性大变形问题，给出了具有一致物理量的物质描述有限元分析的虚功方程及本构方程。

(2) 当仅固定蒙皮一端时，在外力作用下，蒙皮的应力、主应及厚度均为非均匀场，且应变  $E_{12}$ 、应力  $S_{12}$  的非均匀场对蒙皮性能产生影响。

(3) 增加  $y$  方向的位移约束后，蒙皮的主应力  $S_{11}$  与  $S_{22}$ ，及主应变  $E_{11}$  为均匀场，且蒙皮变形后的厚度为均匀厚度。而  $E_{22}$ 、 $E_{12}$  及  $S_{12}$  出现小范围非均匀场，但量值很小，对蒙皮性能的影响可以不计。

## 参考文献：

- [1] Sofla A Y N, Meguid S A, Tan K T, et al. Shape morphing of aircraft wing: Status and challenges [J]. Materials and Design, 2010, 31(3): 1284-1292.
- [2] Yin W L. Stiffness requirement of flexible skin for variable trailing-edge camber wing [J]. Science China: Technological Sciences, 2010, 53(4): 1077-1081.
- [3] Mattioni F, Weaver P M, Potter K D, et al. Analysis of thermally induced multistable composites [J]. International Journal of Solids and Structures, 2008, 45(2): 657-675.
- [4] Olympio K R, Gandhi F. Flexible skins for morphing aircraft using cellular honeycomb cores [J]. Journal of Intelligent Material Systems and Structures

- tures, 2010, 21(17): 1719-1735.
- [5] Jia Yuxi, Wang Xiaoxia, Feng Ligang, et al. Integrated processing-structure-property analysis on rubber in-mold vulcanization [J]. *European Polymer Journal*, 2009, 45(6): 1759-1764.
- [6] Korochkina T V, Jewell E H, Claypole T C, et al. Experimental and numerical investigation into nonlinear deformation of silicone rubber pads during ink transfer process [J]. *Polymer Testing*, 2008, 27(6): 778-791.
- [7] 郭建华, 曾幸荣, 罗权焜. 复合硫化剂对氟橡胶/硅橡胶共混物结构和性能的影响[J]. *高分子材料科学与工程*, 2011, 27(11): 92-96.
- Guo Jianhua, Zeng Xingrong, Luo Quankun. Effect of compound curing systems on morphology and properties of fluororubber/silicone rubber blends[J]. *Polymer Materials Science and Engineering*, 2011, 27(11): 92-96.
- [8] Boyce M, Arruda E. Constitutive models of rubber elasticity: a review [J]. *Rubber Chemistry and Technology*, 2000, 73(3): 505-523.
- [9] Genovesea K, Lambertib L, Pappalettere C. Mechanical characterization of hyperelastic materials with fringe projection and optimization techniques [J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2006, 44(5): 423-442.
- [10] Khajehsaeid H, Arghavani J, Naghdabadi R. A hyperelastic constitutive model for rubber-like materials [J]. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2013, 38(2): 144-151.