

# 基于非线性规划方法的过失速机动轨迹优化

陈永亮

(南京航空航天大学航空宇航学院, 南京, 210016)

**摘要:**发展了一种约束最优控制问题的处理方法,通过引入增广变量,将过程约束转化为终端约束。基于三自由度模型,以迎角、绕速度矢量滚转角和发动机油门系数为优化变量,针对相同的初始条件和两种不同的终端约束,应用文中的方法设计了某战斗机的 Herbst 机动轨迹,并进行了比较分析。结果表明,该方法快速有效,可以推广应用到机动动作库设计。

**关键词:**最优控制;过失速机动;非线性规划;轨迹优化

**中图分类号:**V212.1      **文献标志码:**A      **文章编号:**1005-2615(2013)06-0746-06

## Optimal Design of Post Stall Maneuverable Trajectory Based on Nonlinear Programming Method

Chen Yongliang

(College of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China)

**Abstract:** A new method to deal with the constrained optimal control problems is developed by introducing additional variables. With the additional variables, the process constraints are transformed to terminal constraints. The method is used to design a Herbst maneuver trajectory based on the three-degree-of-freedom flight dynamic model in the same initial condition and two different final conditions. The optimal control variables are the angle-of-attack, the roll angle about the velocity vector and the throttle of the engine. The results show that the method is rapid and effective in processing multivariate optimal control problems, and it can be recommended as a tool to design combat aircraft maneuver trajectory for a trajectory data base.

**Key words:** optimal control; post stall maneuverability; nonlinear programming; trajectory optimization

随着现代武器系统性能和飞机本身机动能力的不断提高,现代近距离空战模式发生了巨大变化,具有快速机头指向能力的飞机占有绝对优势。研究发现,实施快速机头指向机动的最佳飞行范围处在过失速飞行区域,所以,过失速机动能力成了现代高性能战斗机的一项重要指标<sup>[1-3]</sup>。过失速机动不需要很大的机动过载即可实现快速机头指向,有利于快速发射和回避格斗导弹,大大提高空战效果。但是,过失速条件下飞行速度很低,飞机因处于低动能状态而易遭受交叉攻击,不正确的使用过失速机动反

而会使飞机处于危险境地。为充分利用过失速机动能力赢取近距离空战优势,必须在考虑各种初始态势及约束情况下,选择合适时机,以最短时间实施过失速机动进行攻击并退出,快速恢复飞行速度。文献[4,5]采用最大值原理对最佳过失速机动轨迹进行了研究,这种方法求解过程较为复杂,对初值要求较高<sup>[6]</sup>,计算耗时较长。文献[7]采用数值仿真方式对几种典型过失速机动的操纵方式进行了研究。文献[8,9]采用轨迹优化方法对敏捷性进行了研究。文献[10]采用轨迹优化方法设计了机动参考轨迹,用

**基金项目:**江苏高校优势学科建设工程资助项目。

**收稿日期:**2013-08-15; **修订日期:**2013-10-15

**通信作者:**陈永亮,男,讲师,1979年出生,E-mail:chenyl79@nuaa.edu.cn。

非线性动态逆设计了某超机动飞机的飞行控制律,并进行了数值仿真。文献[11]介绍了最优控制问题求解的整个流程,但节点较多时,其过程约束数量较大。文献[12]将过程约束转化为终端约束,可以大大减少过程约束变量。文献[13]采用配点法和间接法对某导弹最短时间攻击轨迹进行了优化设计,其计算过程也较为复杂。

本文采用将过程约束转化为终端约束的方法对文献[11]中的方法进行改进,减少了约束方程的个数,简化了设计过程。通过在导弹最短时间轨迹优化、过失速机动轨迹优化中的应用,检验了该方法的可行性。

## 1 最优控制问题描述

最优化问题是指如何在允许范围内选择参数值或函数的形式使性能指标为最优,即取最大值或最小值。当性能指标仅仅是某些参数的函数时,这样的问题称为静态最优化或参数最优化问题;当性能指标是某些函数的函数(即所谓泛函)时,相应的问题称为动态最优化或最优控制问题。如果控制变量和状态变量都不受任何约束,则称为无约束最优化问题,否则称为约束最优化问题。如果目标函数和所有的约束条件均为线性函数,则称为线性规划问题,否则称为非线性规划问题。

在求解难度上,非线性规划难于线性规划问题,有约束最优化问题难于无约束最优化问题,最优控制问题难于参数最优化问题,其中最难的是约束非线性最优控制问题。

### 1.1 约束非线性最优控制问题描述

设系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) & t \in [t_0, t_f] \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (1)$$

令量纲一时间

$$\tau = t/\zeta, \zeta = (t_f - t_0) \quad (2)$$

式(1)可改写为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(\tau) = \zeta \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau) & \tau \in [0, 1] \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (3)$$

则约束非线性最优控制问题的一般描述为:寻找控制规律  $\mathbf{u}(\tau)$ , 使系统从初始状态  $\mathbf{x}(0)$  转移到终端状态  $\mathbf{x}(1)$  过程中标量目标函数

$$J = \Phi(\mathbf{x}(1)) \quad (4)$$

在满足控制变量约束

$$\mathbf{u}_l \leq \mathbf{u}(\tau) \leq \mathbf{u}_h \quad (5)$$

过程约束

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) \geq 0 \quad (6)$$

和终端约束

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}(1)) = 0 \quad (7)$$

的情况下取最小值。式中:  $\mathbf{x} \in R^n$  为状态变量;  $\mathbf{u} \in R^m$  为控制变量;  $\mathbf{u}_l, \mathbf{u}_h$  为控制量下界和上界;  $\mathbf{f}$  为  $n$  维向量函数;  $t$  为时间;  $t_0$  为起始时间;  $t_f$  为终端时间;  $\mathbf{c}$  为  $s$  维向量函数;  $\mathbf{g}$  为  $k$  维向量函数。通常将非线性最优控制问题转化为参数最优化问题求解。

根据目标函数不同,通常将最优控制问题分为3类:

#### (1) Mayer 问题

目标函数仅仅是终端状态的函数,与系统动态过程无关,如式(4)所示。

#### (2) Lagrange 问题

与 Mayer 问题相反,目标函数

$$J = \int_0^1 F(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau) d\tau \quad (8)$$

是某一函数的积分,系统的性能指标与动态过程有关,与终端状态无关。

#### (3) Bolza 问题

目标函数是前两者的综合

$$J = \Phi(\mathbf{x}(1)) + \int_0^1 F(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau) d\tau \quad (9)$$

通过适当的变换,可将后两种目标函数转换为 Mayer 型问题求解。

### 1.2 过程约束转换为终端不等式约束

在将约束最优控制问题转换为非线性规划问题时,过程约束会增加大量的约束方程。为了减少约束方程数目,可以通过引入增广变量的方式,将过程约束转换为终端不等式约束<sup>[12]</sup>。

对任意过程约束  $c_i(\tau) \geq 0$ , 如果存在不满足约束的情况,在区间  $0 \leq \tau \leq 1$  内对  $c_i(\tau) < 0$  部分的平方进行积分,则  $c_i(\tau) \geq 0$  的要求等价于

$$C_i = - \int_0^1 [\min(c_i, 0)]^2 d\tau \geq 0 \quad (10)$$

设

$$\begin{cases} \dot{y}_i(\tau) = -[\min(c_i, 0)]^2, y_i(0) = 0 \\ i = 1, 2, \dots, s \end{cases} \quad (11)$$

则将过程约束式(6)转换为终端约束

$$y_i(1) \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (12)$$

引入增广变量  $\mathbf{z} = \mathbf{x} \cup \mathbf{y}$ , 则式(12)表示为

$$\mathbf{h}(\mathbf{z}(1)) \geq 0 \quad (13)$$

式中  $\mathbf{h}$  为  $s$  维向量函数。至此,已将原始的约束最优控制问题转换为只有终端约束的非线性最优控制问题,其中式(4)为目标函数,式(3, 11)为状态方程,式(7, 13)分别描述终端等式和不等式约束。

### 1.3 最优控制问题的参数化与计算

采用直接打靶法,按如下步骤将约束非线性最优控制问题转换为约束非线性规划问题<sup>[11]</sup>:

**第1步** 控制变量参数化。在式(5)描述的值域内,将连续无限维的控制量用有限个离散点代替,不在离散节点上的控制量采用插值方法得到。

假设将量纲一时间分为  $N$  个区间(视具体情况可以是等间隔或非等间隔的)

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{N-1} < \tau_N = 1 \quad (14)$$

任意区间  $i(i=1,2,\dots,N)$  上的控制量可按线性插值计算

$$\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u}_{i-1} + \frac{\tau - \tau_{i-1}}{\tau_i - \tau_{i-1}} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i-1}) \quad \tau \in [\tau_{i-1}, \tau_i] \quad (15)$$

对于终端时间未知的最优控制问题,将  $\zeta$  作为一个优化变量,得最终待优化控制变量序列为

$$\mathbf{U} = [u_{10}, u_{12}, \dots, u_{1N}, \dots, u_{m0}, u_{m2}, \dots, u_{mN}, \zeta] \quad (16)$$

待优化参数总数为  $m \times N + 1$  个。

**第2步** 求解初值问题。根据第1步中的控制变量,采用龙格库塔积分方法计算式(3)和式(11)构成的微分方程初值问题,得到增广状态变量  $(n+s)$  维。

**第3步** 参数优化。事实上,目标函数式(4)、终端等式约束式(7)和不等式约束式(13)都可看成是  $\mathbf{U}$  的函数。根据第1,2步得到的控制量和增广状态变量,如果终端约束条件满足则结束,否则,采用相应的参数优化方法,求解下面的非线性规划问题

$$\begin{cases} J = \min \Phi(\mathbf{U}) \\ \mathbf{g}(\mathbf{U}) = 0 \\ \mathbf{h}(\mathbf{U}) \geq 0 \end{cases} \quad (17)$$

对控制变量序列  $\mathbf{U}$  进行调整和优化。重复第2步和第3步,直到达到最大迭代步数限制或者满足约束条件为止。本文采用序列二次规划方法(Sequential quadratic programming, SQP)作为参数优化方法。

本文将上述方法在文献[13]中的算例和Herbst机动优化上进行了应用。导弹最短时间攻击轨迹优化结果与文献[13]的结果非常接近,但优化的实现过程更为简单。限于篇幅,这里没有给出相关结果。Herbst机动是在过失速条件下小半径

快速完成  $180^\circ$  机头转向的机动动作,是检验现代高性能战斗机过失速机动能力和敏捷性的典型综合机动,由于控制变量多,该机动过程也是优化设计较难的动作。为检验本文方法的有效性,文中着重介绍某战斗机的快速Herbst机动轨迹优化设计过程。

## 2 最优Herbst机动轨迹设计

### 2.1 飞行动力学模型

不计飞机的侧滑角、侧力、操纵力,飞机的质点运动方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{v} &= \frac{1}{m} (-D - mg \sin \gamma + T \cos \alpha) \\ \dot{\chi} &= \frac{1}{mv \cos \gamma} (L \sin \mu + T \sin \mu \sin \alpha) \\ \dot{\gamma} &= \frac{1}{mv} (L \cos \mu - mg \cos \gamma + T \cos \mu \sin \alpha) \\ \dot{x} &= v \cos \gamma \cos \chi \\ \dot{y} &= v \cos \gamma \sin \chi \\ \dot{h} &= v \sin \gamma \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\begin{cases} L = \frac{1}{2} \rho v^2 S C_L \\ D = \frac{1}{2} \rho v^2 S C_D \\ T = \delta_T T_{\max} \end{cases} \quad (19)$$

式中:  $v, \chi, \gamma, x, y, h$  分别表示飞行速度、航迹偏航角、航迹爬升角、前向位移、侧向位移和飞行高度;  $L, D, T, T_{\max}$  分别为气动升力、阻力、发动机推力和最大推力;  $m, S$  分别为飞机质量和参考面积;  $g, \rho$  分别为重力加速度和大气密度;  $C_L$  为升力系数,  $C_D$  为阻力系数;  $\alpha, \mu, \delta_T$  为控制量,分别为迎角、速度矢量滚转角和发动机油门系数。

为了计算方便,将标准大气模型数据表拟合成多项式形式

$$\rho = 2.11 \times 10^{-7} h_1^4 - 5.418 \times 10^{-5} h_1^3 + 3.967 \times 10^{-3} h_1^2 - 0.116 2 h_1 + 1.225$$

式中  $h_1$  为海拔高度。

飞机参数及气动模型取自文献[14]。为方便起见,将表格数据拟合为多项式

$$\begin{aligned} C_L &= 7.225 \alpha^7 - 40.031 \alpha^6 + 83.91 \alpha^5 - 79.99 \alpha^4 + \\ &\quad 31.97 \alpha^3 - 6.397 \alpha^2 + 4.603 \alpha + 0.018 23 \\ C_D &= 5.691 \alpha^7 - 34.71 \alpha^6 + 83.34 \alpha^5 - 97.06 \alpha^4 + \\ &\quad 52.24 \alpha^3 - 8.159 \alpha^2 + 0.445 2 \alpha + 0.045 23 \end{aligned}$$

飞机参数:  $m = 9\,295.4\text{ kg}$ ,  $S = 27.87\text{ m}^2$ ,  
 $T_{\max} = 142\,954\text{ N}$ .

优化指标为完成机动动作的时间最短,即

$$J = t_f \rightarrow \min \quad (20)$$

机动初始条件:  $v_0 = 100\text{ m/s}$ ,  $\chi_0 = \gamma_0 = 0$ ,  $x_0 = y_0 = 0$ ,  $h_0 = 2\,000\text{ m}$ .

控制约束:  $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$ ,  $|\mu| \leq 180^\circ$ ,  $0 < \delta_T \leq 1$ .

过程约束:  $0 \leq n \leq 7.5$ ,  $v > 0$ ,  $h \geq 2\,000$ , 其中  $n$  为过载。

终端约束:

本文针对两种不同的终端约束对 Herbst 机动进行优化和比较。

(1) 飞机航迹偏转角  $|\chi_f| = 180^\circ$ , 速度、空间位置、航迹爬升角恢复初始值;

(2) 对侧向位移  $y_f$  不加约束, 其他条件同(1)。

### 2.2 轨迹优化结果

Herbst 机动是个典型的终端时间未知约束非线性最优控制问题, 可以按照 1.3 节的方法将其转换为非线性规划问题求解。初始条件不变, 终端约束(1)的情况下的部分计算结果如图 1~6 所示, 终端约束(2)的情况下的部分计算结果如图 7~12 所示。两种终端约束下的机动时间和计算耗时如表 1 所示。

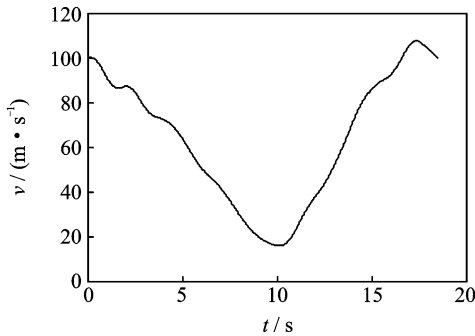


图 1 约束(1)下速度随时间变化曲线

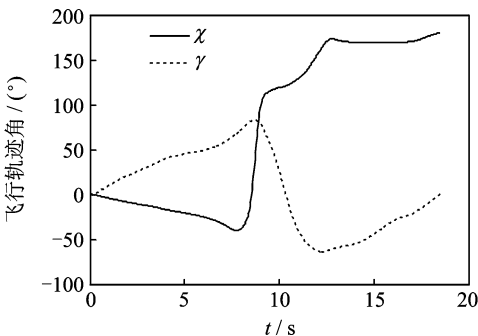


图 2 约束(1)下飞行轨迹角随时间变化曲线

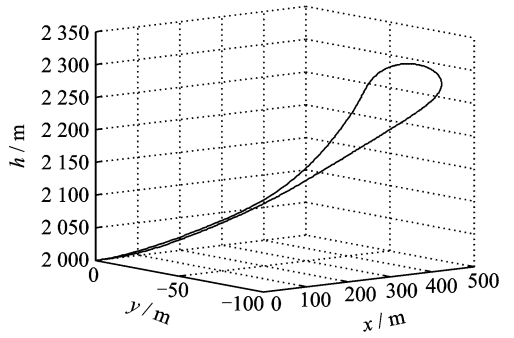


图 3 约束(1)下空间飞行轨迹及其投影

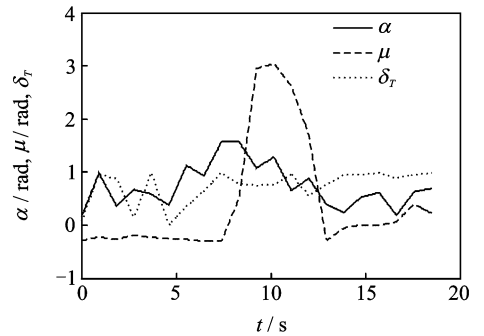


图 4 约束(1)下控制量随时间变化曲线

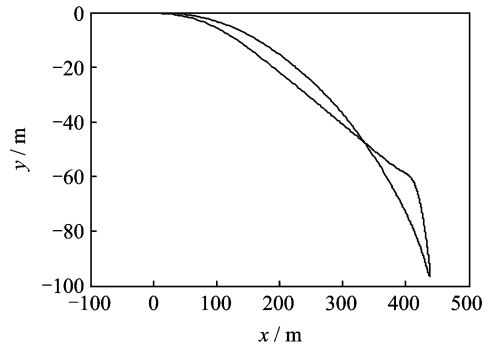


图 5 约束(1)下空间轨迹在水平面上的投影

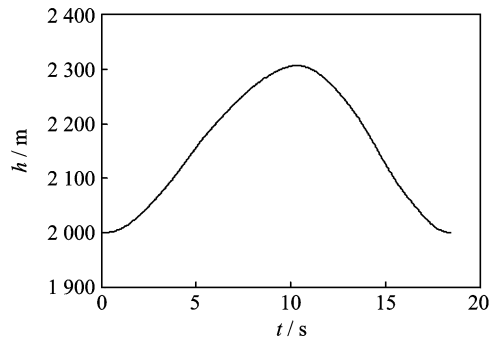


图 6 约束(1)下高度随时间变化曲线

终端约束(1)情况下, 从图 1~4 可以看出, 飞机先抬头, 迎角迅速增大, 在失速迎角附近减速飞行一段时间后继续增大迎角, 速度继续减小, 然后

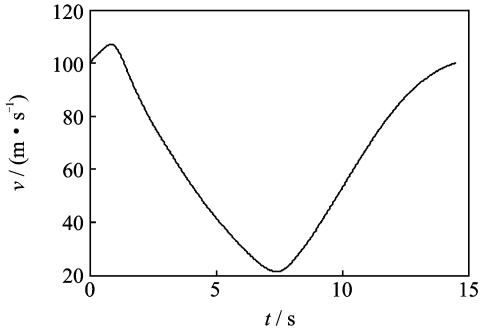


图7 约束(2)下速度随时间变化曲线

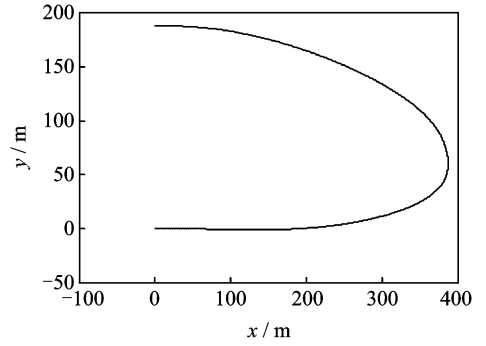


图11 约束(2)下空间轨迹在水平面上的投影

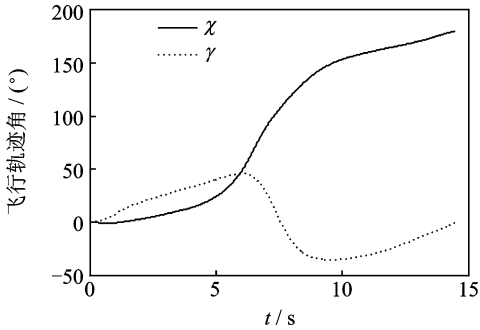


图8 约束(2)下飞行轨迹角随时间变化曲线

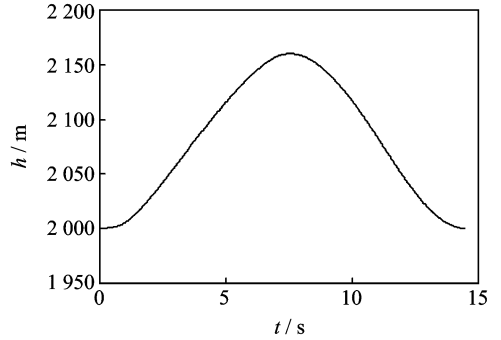


图12 约束(2)下高度随时间变化曲线

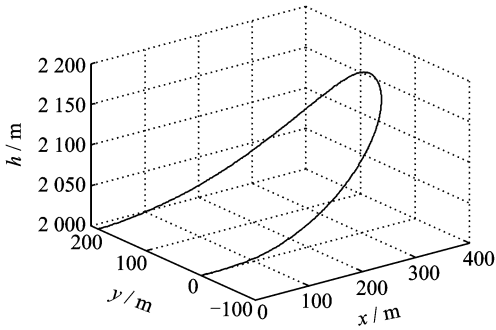


图9 约束(2)下空间飞行轨迹

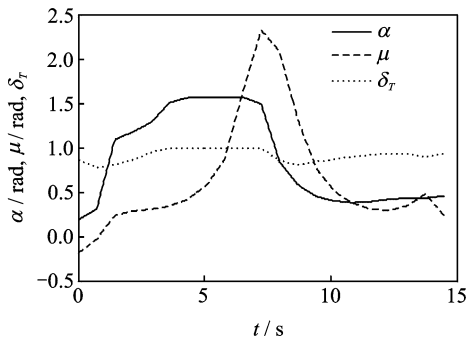


图10 约束(2)下控制量随时间变化曲线

终端约束	(1)	(2)
机动耗时	18.495	14.493
计算耗时	23.766	0.453

后面的机动耗时主要是用于恢复初始能量和初始位置,该过程耗时约为6 s左右。由于在失速迎角附近飞行时间较长,爬升角变得很大,整个机动过程最大高度变化量超过了300 m,  $x$  方向最大位移约为450 m,  $y$  方向最大位移不到100 m,但机动半径不大。尽管各种约束严格满足,但迎角和发动机油门变化规律较为复杂,实现该机动过程的操纵动作较难。

终端约束(2)情况下,不仅各种约束严格满足,迎角和发动机油门变化规律相较于约束情况(1)要简单。从图8~12可以看出,飞机在整个过程中保持较大推力,一边缓慢滚转,一边迅速增大迎角以减速,在保持最大迎角飞行一段时间后,快速绕速度矢量滚转,改变航向,在10 s左右恢复到失速迎角以下,然后缓慢调整航向,整个机动耗时约为14.5 s左右,该过程比文献[4,5]的结果还要快,计算机耗时也要短得多。虽然飞机的侧向位移没有恢复到初始值,但是其节约了4 s的机动耗时。由于在增大迎角的过程中,很快通过失速迎角,因此航迹爬升角较约束(1)情况下要小,飞行高度增量

快速绕速度矢量滚转,在12.8 s左右飞机已基本完成180°航向改变,迎角减小,机翼水平。但是,飞机的速度、航迹爬升角和空间位置尚未恢复初始值。

也小,仅为约束(1)下的一半左右, $x$ 方向位移略小,最大滚转角较小,对滚转性能要求降低,机动时间更短,计算耗时大为缩减,机动过程的可行性更好。

从计算结果看,在大迎角过失速机动过程中,对推力需求比较大。原因是在大迎角情况下,气动力的铅垂分量不足以平衡重力,为了飞机不掉高度,需要推力来平衡部分重力。同时,大的发动机推力也有利于退出机动时恢复能量。

### 3 结束语

本文发展和改进的方法可以快速设计 Herbst 过失速机动飞行轨迹,在其他条件相同情况下,不考虑侧向位移约束时,机动过程更快,机动动作的可实现性更好,且机动轨迹的计算速度更快。本文的优化结果可以作为过失速机动仿真时的机动指令,也可以为大迎角过失速机动试飞时驾驶员操纵动作设计提供参考。文中方法可推广应用到其他机动轨迹设计上,可作为战斗机机动动作库设计的工具。

研究还发现,在过失速机动过程中,推重比有着重要影响。为顺利完成过失速机动飞行,现代高性能飞机需要安装大推重比发动机。文中假设飞机角速度和操纵效能足够大,在仿真和试飞过程中,需要增加推力矢量等附加操纵装置,且飞机具有大迎角过失速控制律,保证在机动过程中的稳定性。

#### 参考文献:

- [1] Herbst W B. Future fighter technologies[J]. Journal of Aircraft, 1980, 17(8): 561-566.
- [2] 曲东才. 战斗机过失速机动与近距离格斗空战[J]. 航空兵器, 2000(4): 12-14.  
Qu Dongcai. Fighter stall maneuver and combat dog-fight[J]. Aero Weaponry, 2000(4): 12-14.
- [3] 孙金标, 张曙光, 张建康, 等. 过失速机动对抗战法研究[J]. 飞行力学, 2003, 21(3): 10-13.  
Sun Jinbiao, Zhang Shuguang, Zhang Jiankang, et al. Research on anti-poststall maneuver tactics[J]. Flight Dynamics, 2003, 21(3): 10-13.
- [4] 胡孟权, 李晓勇, 张美忠. 过失速机动的优化[J]. 空军工程大学学报: 自然科学版, 2001, 2(4): 1-3.  
Hu Mengquan, Li Xiaoyong, Zhang Meizhong. Research on optimal post-stall maneuvers[J]. Journal of Air Force Engineering University: Natural Science Edition, 2001, 2(4): 1-3.
- [5] 张曙光, 韩彦东, 王永正, 等. 高性能战斗机机动动作优化控制研究[J]. 飞行力学, 1997, 15(1): 50-55.  
Zhang Shuguang, Han Yandong, Wang Yongzheng, et al. The research of optimal control for high performance aircraft[J]. Flight Dynamics, 1997, 15(1): 50-55.
- [6] 雍恩米, 陈磊, 唐国金. 飞行器轨迹优化数值方法综述[J]. 宇航学报, 2008, 29(2): 397-406.  
Yong Enmi, Chen Lei, Tang Guojin. A survey of numerical methods for trajectory optimization of spacecraft[J]. Journal of Astronautics, 2008, 29(2): 397-406.
- [7] 许洲, 高浩. 三种典型过失速机动的仿真[J]. 飞行力学, 1999, 17(3): 11-16.  
Xu Zhou, Gao Hao. Mathematical simulations of three typical post stall maneuvers[J]. Flight Dynamics, 1999, 17(3): 11-16.
- [8] 田勇, 严重中, 刘昶. 用最优轨迹分析法研究战斗机的敏捷性[J]. 南京航空航天大学学报, 2001, 33(2): 191-193.  
Tian Yong, Yan Zhongzhong, Liu Chang. Evaluation of several functional fighter agility metrics using optimal trajectory analysis[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2001, 33(2): 191-193.
- [9] 胡孟权, 王建培, 林国华. 考虑敏捷性的过失速机动优化研究[J]. 飞行力学, 2002, 20(1): 14-16.  
Hu Mengquan, Wang Jianpei, Lin Guohua. Optimal post-stall maneuvers in counting agility[J]. Flight Dynamics, 2002, 20(1): 14-16.
- [10] Snell S A, Enns D F. Nonlinear inversion flight control for a supermaneuverable aircraft[R]. AIAA-90-3406, 1990: 808-825.
- [11] Kraft D. Algorithm 733: TOMP—Fortran modules for optimal control calculations[J]. ACM Transactions on Mathematical Software, 1994, 20(3): 262-281.
- [12] 刘同仁. 用参数最优化方法计算最优飞行轨迹[J]. 航空学报, 1994, 15(11): 1298-1305.  
Liu Tongren. A calculation of optimal flight trajectory using the parameterized optimization method[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 1994, 15(11): 1298-1305.
- [13] Subchan S, Zbikowski R. Minimum-time optimal trajectories for the terminal bunt manoeuvre [R]. AIAA 2005-5968, 2005.
- [14] Nguyen L T, Ogburn M E, Gilbert W P, et al. Simulator study of stall/post-stall characteristics of a fighter airplane with relaxed longitudinal static stability[R]. NASA-TP-1538, 1979.