

基于 Nakagami 衰落的分集合并系统性能分析

朱秋明^{1,2} 吕卫华^{1,2} 黄嘉乐¹ 徐大专¹ 陈小敏¹ 唐亚平¹

(1. 南京航空航天大学电子信息工程学院, 南京, 210016; 2. 中国空空导弹研究院, 洛阳, 471009)

摘要:分集技术可有效提高无线通信系统抗衰落性能, 通过将 Nakagami 衰落下的分集系统等效为单输入单输出系统, 推导获得了选择合并 (Selection combining, SC)、等增益合并 (Equal gain combining, EGC) 和最大比合并 (Maximal ratio combining, MRC) 3 种方式下系统的输出信噪比和中断概率等性能表达式, 并提出一种基于改进的 Nakagami 分集信道舍弃法模型用于数值仿真与验证。仿真结果表明, 理论表达式结果与仿真值非常吻合, 可用于辅助瑞利、莱斯和 Nakagami 等多种信道衰落下分集系统的参数选择、算法设计和性能评估。

关键词: Nakagami 衰落; 分集系统; 合并技术; 信道建模

中图分类号: TN911.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-2615(2013)03-0424-05

Performance Analysis of Diversity System over Nakagami Fading Channels

Zhu Qiuming^{1,2}, Lü Weihua^{1,2}, Huang Jiale¹, Xu Dazhuan¹, Chen Xiaomin¹, Tang Yaping¹

(1. College of Electronic Information Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China;

2. China Airborne Missile Academy, Luoyang, 471009, China)

Abstract: Diversity combining is an effective technique to combat signal fading and improve the performance of wireless communication system significantly. The diversity system over Nakagami fading channels is equivalent as a single input and single output (SISO) system. Then, the expressions of system parameter such as signal-to-noise ratio (SNR) distribution and outage probability are derived for selection combining (SC), equal gain combining (EGC) and maximal ratio combining (MRC) schemes under Nakagami fading channels. A modified Nakagami fading model based on rejection method is also presented to numerical simulation and validation. Numerical simulation results show that the theoretical results match the simulation results very well, which is helpful for parameter selection, algorithm design and performance evaluation of diversity system over various fading such as Rayleigh, Rice and Nakagami.

Key words: Nakagami fading; diversity system; combining technique; channel modeling

无线传播环境中的接收信号通常由多条到达路径信号组成, 由于各径信号相位、幅度和到达时间随机变化, 导致接收信号包络呈现快速起伏, 通常称为多径衰落 (快衰落)。Nakagami 分布包含了高斯、瑞利和赖斯等分布, 能够较好地描述无线接收信号的衰落状况, 近年来被广泛用于无线衰落

信道建模^[1-2]。目前常用的抗衰落技术包括信道编码、均衡、扩频和分集, 分集技术由于实现简单且系统性能改善明显已得到广泛应用。常见分集合并技术均为线性合并, 包括选择合并 (Selection combining, SC)、最大比合并 (Maximal ratio combining, MRC) 和等增益合并 (Equal gain combi-

基金项目: 航空科学基金 (20120152001) 资助项目; 中央高校基本科研业务费专项资金 (NS2012075; NZ2012012) 资助项目; 研究生学位论文创新与创优基金 (DZS201103) 资助项目; 江苏高校优势学科建设工程资助项目。

收稿日期: 2012-08-18; **修订日期:** 2013-02-04

通信作者: 朱秋明, 男, 副教授, 1979 年出生, E-mail: zhuqiuming@nuaa.edu.cn。

ning, EGC)等^[3]。

基于 Nakagami 衰落信道的分集系统性能分析比较复杂,文献[4]研究了不同合并器输出信号包络的平均衰落时间和电平通过率概率分布;文献[5-6]分析了 EGC 合并器输出信噪比分布;文献[7-8]则分析了 MRC 合并器输出信号包络的统计参数。本文重点研究了 Nakagami 衰落信道下不同分集合并方式的性能,针对各支路衰落相互独立情况,推导了3种合并器输出等效信噪比分布、中断概率以及系统平均误符号率等表达式,最后基于舍弃法原理构建了 Nakagami 分集衰落信道仿真模型,并利用该模型对本文推导所得结论进行数值验证。

1 系统模型

基于 Nakagami 衰落的典型分集接收系统如图1(a)所示,发射端信号经过若干个独立 Nakagami 衰落子信道到达接收端,接收信号通过不同天线接收并被合并为一个总接收信号。假设第 l 分集支路的 Nakagami 衰落信道 h_l 的衰落包络分布为

$$f_{h_l}(r) = \frac{2}{\Gamma(m_l)} \left(\frac{m_l}{\Omega_l}\right)^{m_l} r^{2m_l-1} e^{-\frac{m_l}{\Omega_l} r^2}, r \geq 0 \quad (1)$$

式中: $\Gamma(m_l)$ 和 $\Omega_l = E[r^2]$ 分别表示 Gamma 函数和信道衰落功率; $m_l \geq 0$ 表示衰落系数用于描述信道衰落的恶劣程度。此时,该支路输出瞬时信噪比服从如下 Gamma 分布

$$f_{R_l}(\gamma_l) = \left(\frac{m_l}{\gamma_l}\right)^{m_l} \frac{\gamma_l^{m_l-1}}{\Gamma(m_l)} e^{-m_l \gamma_l / \bar{\gamma}_l}, \gamma_l \geq 0 \quad (2)$$

式中, $\bar{\gamma}_l$ 表示平均比特信噪比

$$\bar{\gamma}_l = E(h_l^2) E_b / N_0 = \Omega_l E_b / N_0 \quad (3)$$

式中, E_b / N_0 表示无衰落情况下的比特信噪比。

Nakagami 衰落分集接收系统可等效为图1(b)所示的单输入单输出系统,此时各分集支路输出信噪比的研究可转化为等效系统的输出信噪比 γ_b 的研究。常见的单输入单输出(Singal input and singal output, SISO)通信系统的性能参数包括输出信噪比分布、中断概率和平均错误率。其中,中断概率等于输出瞬时信噪比低于指定门限信噪比 γ_{th} 的概率,即

$$P_{out}(\gamma_{th}) = F_{\gamma_b}(\gamma_{th}) = \int_0^{\gamma_{th}} f(\gamma_b) d\gamma_b \quad (4)$$

假设接收端完全估计并补偿衰落相移,则系统平均误符号率可表示为

$$\bar{P}_s = \int_0^{\infty} P_s(\gamma_b) f(\gamma_b) d\gamma_b \quad (5)$$

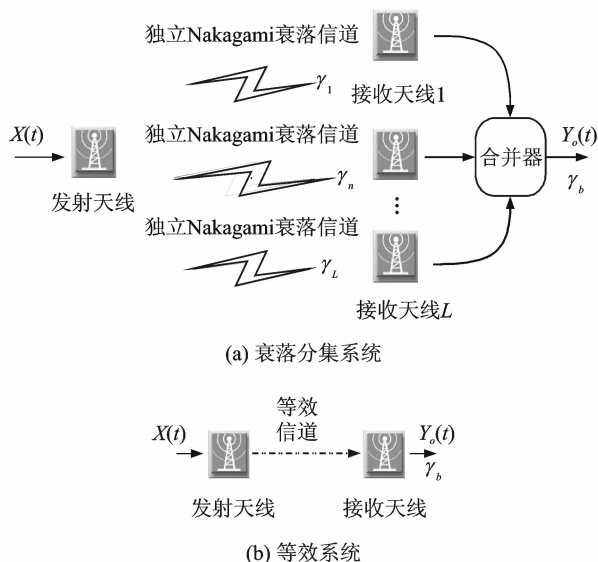


图1 Nakagami 衰落分集系统及等效系统

式中, $f(\gamma_b)$ 表示瞬时等效信噪比分布, $P_s(\gamma_b)$ 对应高斯白噪声信道下误符号率。对于相干 MPSK 系统而言, $P_s(\gamma_b)$ 可近似表示为

$$P_s(\gamma_b) = \begin{cases} Q(\sqrt{2\gamma_b}) & M=2 \\ 2Q\left(\sqrt{2\gamma_b \log_2 M} \sin \frac{\pi}{M}\right) & M \geq 4 \end{cases} \quad (6)$$

式中: $Q(\cdot)$ 表示 Q 函数。由式(4~6)可知 Nakagami 衰落分集系统性能分析关键是求等效后的输出等效信噪比分布 $f(\gamma_b)$ 。

2 不同合并方式输出等效信噪比

2.1 无分集情况(No combining, NC)

当天线数目 $L=1$ 时,分集系统退化为无分集的单天线系统,此时接收天线输出信号瞬时信噪比服从式(2)的 Gamma 分布,对应累积概率分布可表示为

$$F_{\gamma_b}(\gamma_b) = \frac{\Gamma(m, m\gamma_b / \bar{\gamma}_l)}{\Gamma(m)} \quad (7)$$

式中, $\bar{\gamma}_l = \Omega_l E_b / N_0$ 表示支路平均比特信噪比。

2.2 选择合并情况(SC)

对于 SC 分集合并系统,合并器输出信号包络为各支路的最大值即

$$r = \max\{h_l, l=1, \dots, L\} \quad (8)$$

当各分集支路信道衰落功率和噪声均一致时,合并后输出瞬时信噪比满足

$$\gamma_b = \max\{\gamma_l, l=1, \dots, L\} \quad (9)$$

对应累积概率分布可表示为 L 支路联合概率分布形式

$$F_{\gamma_b}(\gamma_b) = P\{\gamma_1 < \gamma_b, \gamma_2 < \gamma_b, \dots, \gamma_L < \gamma_b\} \quad (10)$$

当各支路衰落相互独立时,上式可简化为

$$F_{\gamma_b}(\gamma_b) = \prod_{l=1}^L F_{\gamma_l}(\gamma_b) = \prod_{l=1}^L \frac{\Gamma(m_l, m_l \gamma_b / \bar{\gamma}_l)}{\Gamma(m_l)} \quad (11)$$

最后,对式(11)求导可得输出瞬时信噪比的概率分布为

$$f(\gamma_b) = \sum_{j=1}^L \frac{(m_j \gamma_b / \bar{\gamma}_j)^{m_j-1} e^{-m_j \gamma_b / \bar{\gamma}_j}}{\Gamma(m_j)} \prod_{l=1, l \neq j}^L \frac{\Gamma(m_l, m_l \gamma_b / \bar{\gamma}_l)}{\Gamma(m_l)} \quad (12)$$

2.3 等增益合并(EGC)

对于 EGC 分集合并系统,合并器输出信号包络为各支路之和即

$$r = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{l=1}^L h_l \quad (13)$$

对应输出瞬时信噪比可表示为

$$\gamma_b = \frac{E_b}{N_0} \frac{\left(\sum_{l=1}^L h_l\right)^2}{L} \quad (14)$$

式中, h_l 表示第 l 支路 Nakagami 信道衰落。令

$$S = \sum_{l=1}^L h_l \quad (15)$$

大量文献研究表明,各支路 Nakagami 衰落相关情况下随机变量 S 的分布不存在简单解析式^[5,6]。假设各支路衰落相互独立,则由随机变量之和分布的定义可知

$$f_S(r) = \int_0^r \int_0^{r-r_1} \cdots \int_0^{r-\sum_{i=3}^L r_i} f_{h_1}(r - \sum_{i=2}^L r_i) \prod_{l=2}^L f_{h_l}(r_l) dr_2 \cdots dr_L \quad (16)$$

令变量代换 $K = N_0 L / E_b$, 结合式(14)可得 EGC 合并后输出瞬时信噪比分布

$$f(\gamma_b) = \int_0^{\sqrt{K\gamma_b}} \cdots \int_0^{\sqrt{K\gamma_b} - \sum_{i=3}^K r_i} f_{h_1}(\sqrt{K\gamma_b} - \sum_{i=2}^K r_i) \prod_{l=2}^K f_{h_l}(r_l) dr_2 \cdots dr_K / 2\sqrt{\gamma_b/K} \quad (17)$$

然而,即使各支路相关独立时求解 $f_S(r)$ 仍非常困难,仅文献[5]推导给出了 L 较小时 $f_S(r)$ 的闭式解。据此,利用式(17)获得低分集数情况下 EGC 合并器输出的等效信噪比分布为

$$f_2(\gamma_b) = \frac{2K\sqrt{\pi}\Gamma(2m)(m/\Omega)^{2m}(K\gamma_b)^{2m-1}}{\Gamma^2(m)\Gamma(2m+0.5)2^{4m-1}} e^{-mK\gamma_b/\Omega} F(2m; 2m+0.5; mK\gamma_b/2\Omega) \quad (18)$$

$$f_3(\gamma_b) = \frac{4K\sqrt{\pi}\Gamma(2m)(m/\Omega)^{3m}}{\Gamma^3(m)2^{4m-1}} e^{-mK\gamma_b/\Omega}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2m+n)\Gamma(4m+2n)(m/\Omega)^n (K\gamma_b)^{3m+n-1}}{\Gamma(2m+n+0.5)\Gamma(6m+2n)\Gamma(n+1)2^n} F_2(2m, 4m+2n; 3m+n+0.5, 3m+n; mK\gamma_b/2\Omega) \quad (19)$$

式中, $F_2(a; b, c; d)$ 表示超几何函数。

2.4 最大比合并(MRC)

对于 MRC 分集合并系统,合并器输出信号包络为各支路加权之和即

$$r = \sum_{l=1}^L \alpha_l h_l \quad (20)$$

式中,权重系数与该支路接收信号电平成正比即 $\alpha_l = |h_l|$ (假设信道衰落功率归一化)。因此,合并后输出瞬时信噪比可表示为

$$\gamma_b = \frac{E_b}{N_0} \sum_{l=1}^L h_l^2 \quad (21)$$

易证 $E_b h_l^2 / N_0$ 服从 Gamma 分布,此时合并器输出瞬时信噪比可转换为 L 个 Gamma 随机变量之和,由文献[7]可得

$$f(\gamma_b) = B \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta_k \gamma_b^{\rho+k-1} e^{-\gamma_b/b_1}}{\Gamma(\rho+k) b_1^{\rho+k}} \quad (22)$$

式中, $B = \prod_{i=1}^L (b_i/b_i)^{a_i}$, $a_i = m_i$, $b_i = \Omega_i/m_i$, $b_1 = \min\{b_i\}$, $\rho = \sum_{i=1}^L a_i > 0$, δ_k 可表示为如下递归形式

$$\delta_{k+1} = \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} i r_i \delta_{k+1-i} \quad (23)$$

式中, $\delta_0 = 1$, $r_k = \sum_{i=1}^n a_i (1 - b_i/b_i)^k / k$ 。当各支路 Nakagami 衰落分布相同时,该式可进一步简化为如下形式

$$f(\gamma_b) = \frac{\gamma_b^{mL-1}}{\Gamma(mL)} \left(\frac{m}{\gamma_b}\right)^{mL} e^{-m\gamma_b/\bar{\gamma}_b} \quad (24)$$

对应累积概率函数则为

$$F(\gamma_b) = \frac{\Gamma(mL, m\gamma_b/\bar{\gamma}_b)}{\Gamma(mL)} \quad (25)$$

3 分集系统性能仿真与验证

3.1 Nakagami 分集系统仿真模型

独立 Nakagami 随机序列产生是 Nakagami 分集信道仿真的基础,目前常见方法包括 Brute force 及其改进模型,逆变换模型和组合法模型等,上述方法虽实现简单但仅适用于特定 m 值。舍弃法是一种通用的随机变量产生方法,基本原理如下:

(1) 寻找帽子函数 $p(x)$ 满足 $Cp(x) \geq q(x)$, 其中 $q(x)$ 表示目标概率分布即 Nakagami 分布, C 为常数。

(2) 产生一个随机变量 X 服从 $p(x)$ 分布,另

一个随机变量 G 服从 $[0, C p(X)]$ 的均匀分布;

(3) 如果 $G \leq q(X)$, 随机变量 X 保留, 否则舍弃, 重复步骤(2)。

舍弃法模型的本质是对简单随机变量以一定的概率进行舍弃和接受, 舍弃后随机序列服从目标概率分布。由于舍弃效率由帽子函数决定, 大量文献针对 Nakagami 分布的帽子函数进行了研究^[9-11]。在早期研究中发现, 可采用如下截断高斯分布作为帽子函数

$$p(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-x_0)^2/2\sigma^2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x_0}{\sqrt{2}\sigma}\right)}, x \geq 0 \quad (26)$$

式中, $\operatorname{erf}(\cdot)$ 表示误差函数。易证常数 C 可表示为

$$C = b\sqrt{2\pi}\sigma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x_0}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right) \quad (27)$$

式中

$$b = 2^{3/2-m} \left(\frac{m}{\Omega}\right)^m \left(\frac{\Omega(2m-1)}{m}\right)^{m-1/2} e^{1/2-m} / \Gamma(m) \quad (28)$$

式中, $x_0 = \sqrt{(2m-1)\Omega/2m}$, $\sigma^2 = \Omega/2m$ 。

图 2 仿真了不同 m 值 ($\Omega=1$) 时仿真模型输出幅值的概率分布, 仿真序列长度为 10^5 。由图可看出对于任意衰落系数情况, 该仿真模型输出序列的幅值分布与理论值非常吻合。值得强调的是, 截断高斯变量可由传统高斯随机变量直接产生, 因而采用该帽子函数产生 Nakagami 随机过程实现简单高效。

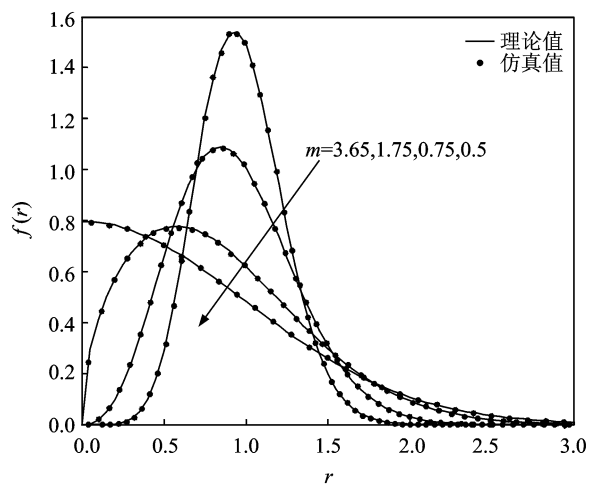


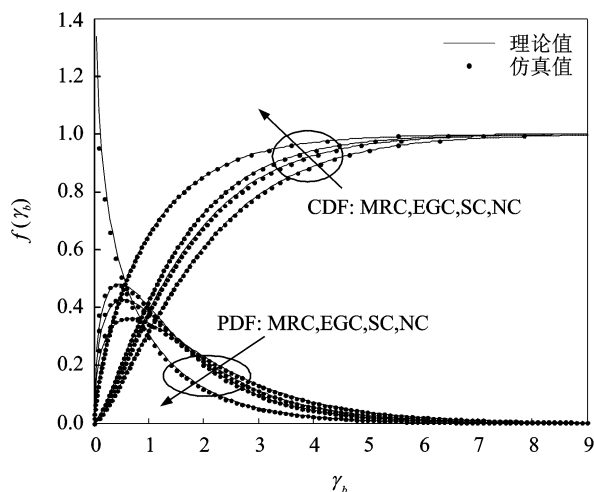
图 2 信道衰落包络分布比较

3.2 性能仿真验证

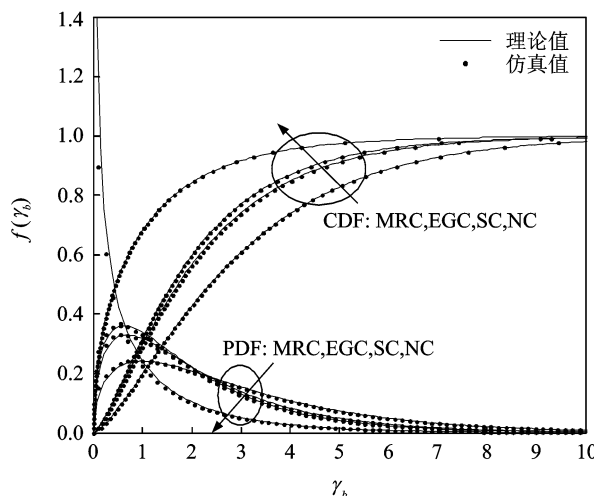
为了验证不同分集合并方式下输出等效信噪比表达式的正确性, 下面首先利用 Nakagami 舍弃

法模型模拟产生 Nakagami 分集衰落信道, 然后对合并器输出的瞬时信噪比进行统计验证。图 3 分别给出了 $L=2, 3$ 两种情况下, 不同系统输出瞬时信噪比分布 (Probability distribution function, PDF) 和累积概率分布 (Cumulative distribution function, CDF) (即系统中断概率)。仿真中对各支路比特信噪比进行归一化即 $E_b/N_0=1$, 仿真样点数 10^6 。由图可见: (1) 当 $m < 1$ 时, Nakagami 信道衰落比较恶劣, NC 情况下接收端瞬时信噪比大部分都小于 1; (2) 如果采用分集技术, 即使分集支路数目比较小, 合并后输出信噪比可得到明显改善; (3) 3 种合并方式中, MRC 合并方式改善性能最好, EGC 次之。

图 4 仿真比较了 MPSK 系统在各种分集合并方式下的误符号性能, 图中仿真值表示基于舍弃法模型的蒙特卡罗数值仿真结果。由图可看出, 对于



(a) 双支路情况 ($m=0.75, \Omega=1, L=2$)



(b) 三支路情况 ($m=0.5, \Omega=1, L=3$)

图 3 不同合并方式等效信噪比分布

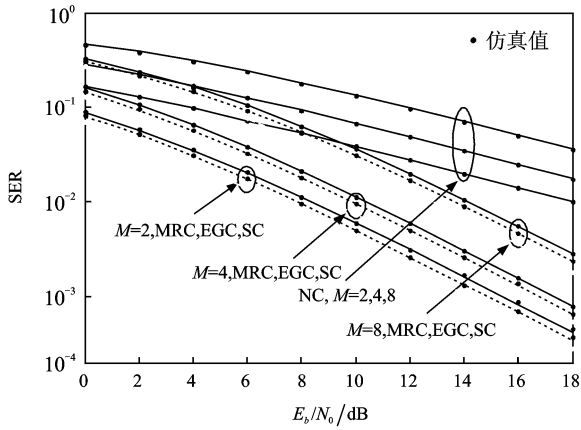
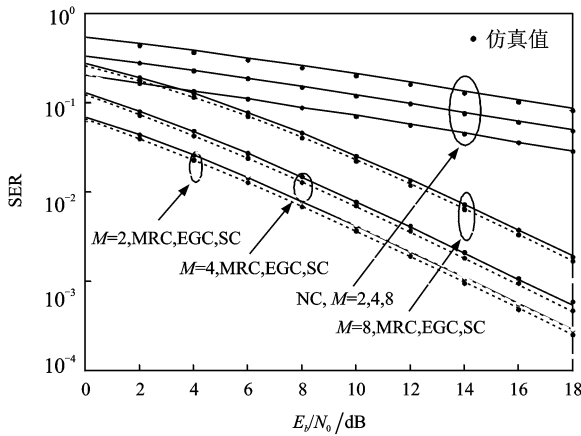
(a) 双支路情况 ($m=0.75, \Omega=1, L=2$)(b) 三支路情况 ($m=0.5, \Omega=1, L=3$)

图4 Nakagami衰落分集系统误符号率

$m < 1$ 的恶劣衰落 Nakagami 信道, 当信噪比高达 18 dB 时, 无分集 BPSK 系统的误符号率仍高于 1%, 以至于无法实际应用。分集技术抗衰落效果非常明显, 对于 3 种合并方式, MRC 性能最佳, SC 性能最差, EGC 性能居中。然而, EGC 系统性能虽略逊于 MRC, 但不需要知道信道状态信息且实现复杂度较小。

4 结束语

Nakagami 分布已被广泛用于无线衰落信道建模和仿真, 而分集技术作为一种简单高效的抗多径衰落技术也得到了广泛应用。本文通过将 Nakagami 衰落分集系统等效为 SISO 系统, 推导了 SC、EGC 和 MRC 3 种方式下系统等效输出信噪比分布、中断概率和平均误符号率性能, 最后利用改进的 Nakagami 衰落分集信道仿真模型验证上述结论的正确性。分析和仿真结果表明, 分集技术的抗衰落效果非常明显, 在恶劣衰落信道情况下, 即

使最简单的双支路分集 3 种方式都可大幅度提高系统性能。

参考文献:

- [1] Nakagami M. The m -Distribution: A general formula of intensity distribution of rapid fading statistical methods of radio wave propagation[M]. Japan: W C Hoffman, 1960.
- [2] Ning Kong, Milstein L B. Simple closed-form asymptotic symbol error rate of selection combining and its power loss compared to the maximal ratio combining over nakagami fading channels[J]. IEEE Transactions on Communications, 2010, 58(4):1142-1150.
- [3] Simon M K, Alouini M S. Digital communication over fading channels[M]. New York: Wiley, 2000.
- [4] Iskander C D, Mathiopoulos P T. Analytical level crossing rates and average fade durations for diversity techniques in Nakagami fading channels[J]. IEEE Transactions on Communications, 2002, 50(8):1301-1309.
- [5] Dharmawansa P, Rajatheva N, Ahmed K. On the distribution of the sum of Nakagami- m random variables[J]. IEEE Transactions on Communications, 2007, 55(7):1407-1416.
- [6] Rahman M A, Harada H. New exact closed-form PDF of the sum of Nakagami random variables with applications[J]. IEEE Transactions on Communications, 2011, 59(2):395-401.
- [7] Moschopoulos P G. The distribution of the sum of independent Gamma random variables[J]. Annals of Institute of Statistical Mathematics (Part A), 1985, 37:541-544.
- [8] Yacoub M D, Da Silva C R C M, Bautista J E V. Second-order statistics for diversity combining techniques in Nakagami-fading channels[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2001, 50(11):1464-1470.
- [9] Cao L, Beaulieu N C. Simple efficient methods for generating independent and bivariate Nakagami- m fading envelope samples[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2007, 56(4):1573-1579.
- [10] Matthaiou M, Laurenson D I. Rejection method for generating Nakagami- m independent deviates[J]. Electronics Letters, 2007, 43(25):1474-1475.
- [11] Zhu Qiuming, Dang Xiaoyu, Xu Dazhuan, et al. High efficient rejection method for generating Nakagami- m sequences[J]. Electronic Letters, 2011, 47(19):1100-1101.