

六维加速度传感器的性能建模及结构优化

尤晶晶^{1,2} 李成刚^{1,2} 吴洪涛^{1,2}

(1. 南京航空航天大学机电学院, 南京, 210016;

2. 南京航空航天大学江苏省精密与微细制造技术重点实验室, 南京, 210016)

摘要:针对目前六维加速度传感器的性能指标尚无规范的评价标准和理论计算模型现状,从基频、灵敏度、误差区间宽度 3 个方面建立并求解系统的单性能数学模型;对传统理想点法进行改进,给出多性能目标关于矛盾参量的评价函数。研究表明:在六维加速度传感器样机设计阶段,通过以结构矩阵为乘子的矩阵迭代运算,可以得到系统的一阶固有模态;通过构建弹性体内的协调方程,可以解决灵敏度模型中涉及到的超静定反向动力学问题;通过给出经过证明的关于误差区间宽度的 3 个定理,可以揭示并量化传感器的误差传递关系;以提出的一种综合性能函数为指标,可以有效解决多目标优化过程中普遍存在的 3 大问题,并据此绘制六维加速度传感器的综合性能图谱。

关键词:加速度传感器;模态;灵敏度;误差传递;区间分析

中图分类号:TH825 **文献标志码:**A **文章编号:**1005-2615(2013)03-0380-10

Performance Modeling and Structure Optimizing of Six-Axis Accelerometer

You Jingjing^{1,2}, Li Chenggang^{1,2}, Wu Hongtao^{1,2}

(1. College of Mechanical and Electrical Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China; 2. Jiangsu Key Laboratory of Precision and Micro-Manufacturing Technology, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China)

Abstract: According to the present situation that performance index of six-axis accelerometer has no normative evaluation standard and theoretical calculation model, mathematical models of three single performances including fundamental frequency, sensitivity and width of error interval are established. The function of multi-objective on contradictive parameters is given based on modified ideal point method. The results show that at the design stage of six-axis accelerometer, first mode can be calculated using matrix iteration method. The statically indeterminate reverse dynamics equations about sensitivity model are calculated by constructing compatibility equations. Considering the uncertain errors, three theorems about width of interval are proposed and proved to reveal the mechanism of error transmission which can be used to direct the improvement of measuring accuracy. With the function of comprehensive performance, three major issues of multi-objective optimization can be solved effectively, and the map of six-axis accelerometer can be drawn.

Key words: accelerometer; modal; sensitivity; error transfer; interval analysis

基金项目:国家自然科学基金(51175263)资助项目;江苏省普通高校研究生科研创新计划(CXLX11-0176)资助项目;南京航空航天大学基本科研业务费专项科研(NS2011011)资助项目;江苏省高校优势学科建设工程资助项目。

收稿日期:2012-05-09;**修订日期:**2012-11-20

通信作者:吴洪涛,男,教授,博士生导师,1962 年出生,E-mail:mehtwu@126.com。

六维加速度传感器是一类多学科交叉的机电一体化系统,是机器人、航空航天、生物医疗等领域获得动力学参数的一种新型惯性测量仪器^[1]。追求性能优越往往是传感器设计的宗旨^[2-3];然而,由于涉及到复杂的耦合运动以及较多的输入、输出物理量,目前国内外对六维加速度传感器的研究还主要停留在原理论证阶段^[4-5],对其性能建模及结构优化这两方面的研究还不多。文献[6]将六维加速度传感器灵敏度定义为单位加速度下各支链受力绝对值之和,据此推导了传感器的灵敏度模型,并得到弹性体结构参数与传感器灵敏度之间的关系曲线。文献[7]依据弹性体的屈服极限计算质量块质量的上限,据此设计了质量块的3种构型,基于有限元法分别计算弹性体的基频并最终选择基频最大的构型。在传感器的实际使用过程中,许多时候需要综合考虑其各项性能,因此单独分析或比较传感器的某项性能是不合理的,有必要提出其综合性性能指标,建立更为合理的评价标准。六维加速度传感器性能的评价以及结构的优化尚缺乏相关理论的支撑,对此进行深入的理论研究有利于推动其标准化和仪器化进程,具有较大的理论意义和实际价值。

本文以文献[8]中提出的一种六维加速度传感器为研究对象,对其三大主要性能进行理论建模和分析,并据此对其弹性体的五大结构参数进行优化设计。另外,考虑到不同场合下各单性能权重存在差异、各单性能在寻优过程中存在矛盾以及各单性能之间的不可公度性,本文对传统理想点法进行修正,构建六维加速度传感器的综合性能评价函数。

1 性能指标及结构参数

文献[8]设计的六维加速度传感器的弹性体构型为九支链冗余并联机构,如图1所示。通过计算质量块相对于外壳的运动,也即并联机构的运动学正解,进而运用机械多体系统理论建立并解算关于外壳运动参量的动力学方程,可以实现待测六维加速度的完全解耦。

六维加速度传感器最重要的3个性能指标分别为工作频带、灵敏度和精度。压电式加速度传感器工作频带的下限受电荷放大器的下限截止频率限制,上限由机械结构决定,且为避开传感器本身的共振区,一般取基频的 $1/3 \sim 1/5$ 左右^[9]。显然,弹性体结构的基频越大,则设计出的传感器工

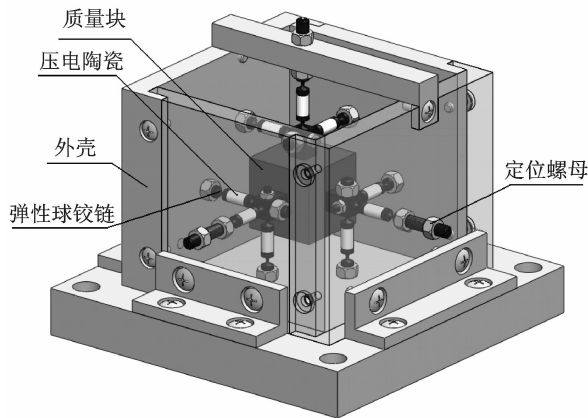


图1 六维加速度传感器三维实体模型

作频带越宽,因此将基频作为六维加速度传感器性能评价的第一个指标。传感器的灵敏度定义为稳定工作时,输出变化量与引起该变化的输入变化量之比,体现了传感器跟踪被测量时的反应能力。传感器的灵敏度越高,反映其对噪声的敏感度就越低,将其作为六维加速度传感器性能评价的第二个指标。由于敏感元件以及信号调理电路的性能限制,测量所得的数据和被测量值的真值之间不可避免地存在一定的偏差。假设数据采集卡每个通道输出的电压值均处于一个有上下界的区间内,那么运动学正解也必然处于某个有界区间内,也即输出误差必然传递至传感器的解耦误差中。显然,误差区间宽度越小,则反映传感器的测量精度越高,将其作为六维加速度传感器性能评价的第3个指标。

考虑到本文旨在从机械结构设计方面寻求提高传感器整体性能的方法,将优化设计变量设定为弹性体的5个结构参数,包括质量块的质量,质量块的边长,压电陶瓷的厚度,压电陶瓷的直径,弹性铰链的轴向长度,它们的初始值及约束条件如表1所示。显然,本文拟定的3个性能指标与5个结构参数之间存在一一对应的关系,这也正是本文研究工作的前提条件。

表1 结构参数的初始值及约束条件

结构参数	初始值	最小值	最大值
质量块的质量/kg	0.7	0.1	1.0
质量块的边长/mm	45	10	60
压电陶瓷的厚度/mm	5	1	10
压电陶瓷的直径/mm	5	1	10
弹性铰链的轴向长度/mm	18	10	20

2 性能建模

2.1 基频模型

系统阻尼对结构基频的影响以及压电陶瓷的质量相对于质量块的质量均可忽略不计,将压电陶瓷等效为弹簧;不考虑质量块、外壳的弹性,将它们均视为刚体;另外,为简化计算,将弹性球铰链视为不计质量和阻尼的理想球铰链。六维加速度传感器的简化模型如图2所示,其中, b_1, b_2, b_3 表示固定在质量块上的3个复合弹性铰链。

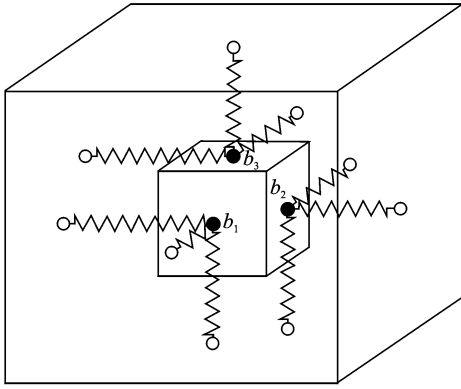


图2 六维加速度传感器简化模型

在外壳上固结坐标系 $\{W\}$,其原点选为初始状态下质量块质心处,3个坐标轴分别平行于质量块的3条共点的棱线。选取描述质量块质心的3个坐标 x, y, z 以及描述姿态的四元数中的3个虚部 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 为系统的广义坐标 \mathbf{p} ,即

$$\mathbf{p} = (x, y, z, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (1)$$

机械系统无阻尼自由振动微分方程的标准表达式为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial p_j} + \frac{\partial U}{\partial p_j} = 0 \quad (j=1 \sim 6) \quad (2)$$

式中: T 表示质量块的动能,包括平动动能和转动动能两部分; U 表示压电陶瓷的弹性势能; p_j 表示 \mathbf{p} 的第 j 个元素。

$$T \approx \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{3} m n^2 (\dot{\lambda}_1^2 + \dot{\lambda}_2^2 + \dot{\lambda}_3^2) \quad (3)$$

$$U \approx k \left(\frac{3}{2} (x^2 + y^2 + z^2) + n^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) + n((y-z)\lambda_1 + (z-x)\lambda_2 + (x-y)\lambda_3) \right) \quad (4)$$

式中: m 为质量块的质量, n 为质量块的边长, k 为压电陶瓷的等效刚度。

$$k = \pi D^2 / (4lS_{33}) \quad (5)$$

式中: D, l, S_{33} 分别为圆柱状压电陶瓷的直径、厚度和弹性柔顺系数。

由式(1~4)并整理后,可得六维加速度传感器系统的无阻尼自由振动微分方程为

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{K} \mathbf{p} = 0 \quad (6)$$

式中: \mathbf{M}, \mathbf{K} 分别表示系统的惯性矩阵和刚度矩阵,是关于弹性体结构参数的函数,反映了系统的固有特性,与其运动形态无关。

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} m n^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} m n^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} m n^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 3k & 0 & 0 & 0 & -nk & nk \\ 0 & 3k & 0 & nk & 0 & -nk \\ 0 & 0 & 3k & -nk & nk & 0 \\ 0 & nk & -nk & 2n^2 k & 0 & 0 \\ -nk & 0 & nk & 0 & 2n^2 k & 0 \\ nk & -nk & 0 & 0 & 0 & 2n^2 k \end{pmatrix}$$

将系统的振动微分方程(6)化为振型方程

$$\mathbf{G} \mathbf{Q}_i = \alpha \mathbf{Q}_i \quad (i=1 \sim 6) \quad (7)$$

式中: $\mathbf{G} = (\mathbf{K})^{-1} \mathbf{M}$ 为弹性体的结构矩阵; \mathbf{Q}_i 为系统的主振型,对于六自由度的系统具有六阶主振型; α 为与系统的固有圆频率 ω 有关的特征值,满足 $\alpha = \frac{1}{\omega^2}$ 。将结构矩阵最大的特征值记为 α_1 ,称为主特征值,与其相对应的 \mathbf{Q}_1 称为主特征向量。

系统的任意一个振型向量 \mathbf{q}_0 都可以表示成六阶主振型 \mathbf{Q}_i 的线性组合,其对应的系数为 c_i 。

$$\mathbf{q}_0 = \sum_{i=1}^6 c_i \mathbf{Q}_i \quad (8)$$

用结构矩阵左乘式(8)等号两端,结合式(7),并将第一个分量归一化,得到新的振型向量。重复该迭代过程 τ 次之后,得到的第 τ 个振型向量为

$$\mathbf{q}_\tau = \frac{c_1 \alpha_1^\tau}{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_\tau} \left(\mathbf{Q}_1 + \sum_{i=2}^6 \frac{c_i}{c_1} \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_1} \right)^\tau \mathbf{Q}_i \right) \quad (9)$$

式中 β_i 为第 i 次迭代之后的归一化因子。

考虑到 α_1 为主特征值,观察式(9)可知随着迭代次数的增加,主特征向量越来越成为主导项。假设 \mathbf{q}_τ 近似等于 $\mathbf{q}_{\tau+1}$ (谱范数之差小于指定精度),再由迭代通式(9)可推出第 τ 个归一化因子正是系统的主特征值,即 $\beta_\tau = \alpha_1$,对应于系统的基频。

将弹性体的 5 个结构参数设置成表 1 中的初始值,基于上述推导出的矩阵迭代算法编写 MATLAB 程序,经过 28 次迭代,打印出六维加速度传感器的基频为 2 563.536 7 Hz。为验证矩阵迭代法的可靠性,在动力学软件 ADAMS 中进行系统振动特性分析,得到系统基频(2 563.536 9 Hz)及一阶主振型,如图 3 所示,可见,两者结果吻合得较好。

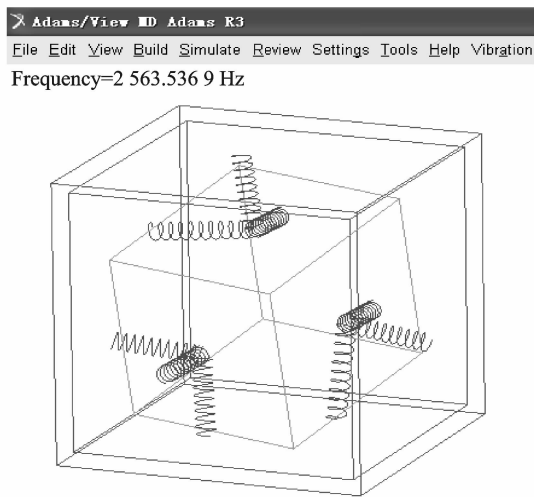


图 3 六维加速度传感器一阶模态

2.2 灵敏度模型

参照文献[6]的定义建立灵敏度模型,同时考虑到线加速度和角加速度的量纲不同,将它们分开研究;另外,在建立灵敏度模型时,不考虑除结构参数之外的因素(如重力加速度、调理电路等)。当外壳以加速度 a_x 做 X 方向的匀线加速平动时,质量块在惯性力下压缩或拉伸 9 条支链使其产生轴向力,9 个轴向力反作用于质量块上的 3 个复合弹性球铰链上,受力情况如图 4 所示。

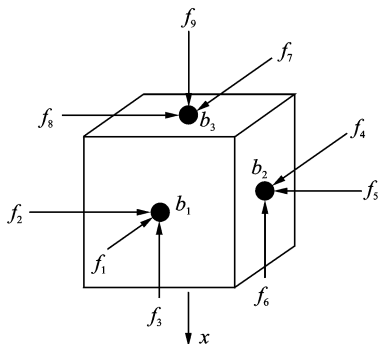


图 4 质量块的受力分析

通过外壳的加速度来计算各支链的受力,属于反向动力学问题。由于不考虑重力加速度的影响,

且外壳以某恒定加速度运动,故运动稳定后质量块的加速度近似等于外壳的加速度^[6]。根据牛顿第二定律、达朗贝尔原理以及支链轴向力大小 f_i 与实际长度 l_i 的关系式(10),列写质量块的 6 个运动独立平衡方程式(11)

$$f_i = k(L - l_i) \tag{10}$$

$$\begin{cases} h_1 = l_2 - l_4 = 0 \\ h_2 = l_3 - l_7 = 0 \\ h_3 = l_6 - l_8 = 0 \\ h_4 = L - l_3 - l_6 + l_9 + ma_x/k = 0 \\ h_5 = L - l_2 - l_8 + l_5 = 0 \\ h_6 = L - l_4 - l_7 + l_1 = 0 \end{cases} \tag{11}$$

$$L = l + v \tag{12}$$

式中 v 表示弹性球铰链的轴向长度。

方程组(11)中未知长度的数目多于独立平衡方程数目,属于三阶超静定问题。考虑到质量块上 3 个复合弹性铰链之间始终存在 3 个固有的几何约束关系式(13),且复合弹性铰链几何中心在坐标系 $\{W\}$ 下的坐标 b_i 可以用支链实际长度表示为式(14),将式(13)用作为该超静定问题的协调方程。

$$\begin{cases} h_7 = |b_1 - b_2|^2 - n^2/2 = 0 \\ h_8 = |b_2 - b_3|^2 - n^2/2 = 0 \\ h_9 = |b_3 - b_1|^2 - n^2/2 = 0 \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} b_1 = \begin{pmatrix} \frac{L}{2} - \frac{1}{2L}l_3^2 - d_1 \\ \frac{L}{2} - \frac{1}{2L}l_2^2 - d_1 \\ -\frac{L}{2} + \frac{1}{2L}l_1^2 + d_1 - n \end{pmatrix} \\ b_2 = \begin{pmatrix} \frac{L}{2} - \frac{1}{2L}l_6^2 - d_2 \\ -\frac{L}{2} + \frac{1}{2L}l_5^2 + d_2 - n \\ \frac{L}{2} - \frac{1}{2L}l_4^2 - d_2 \end{pmatrix} \\ b_3 = \begin{pmatrix} -\frac{L}{2} + \frac{1}{2L}l_9^2 + d_3 - n \\ \frac{L}{2} - \frac{1}{2L}l_8^2 - d_3 \\ \frac{L}{2} - \frac{1}{2L}l_7^2 - d_3 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{14}$$

式中:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{l_1^2 l_2^2 + l_1^2 l_3^2 + l_2^2 l_3^2 - l_1^4 - l_2^4 - l_3^4}{12L^3} \\ d_2 &= \frac{l_4^2 l_5^2 + l_4^2 l_6^2 + l_5^2 l_6^2 - l_4^4 - l_5^4 - l_6^4}{12L^3} \\ d_3 &= \frac{l_7^2 l_8^2 + l_7^2 l_9^2 + l_8^2 l_9^2 - l_7^4 - l_8^4 - l_9^4}{12L^3} \end{aligned}$$

联立方程(11, 13, 14), 并运用 Newton-Raphson 迭代公式(15)进行数值迭代运算。

$$\mathbf{X}^{(\sigma+1)} = \mathbf{X}^{(\sigma)} - (\mathbf{H}'(\mathbf{X}^{(\sigma)}))^{+} \mathbf{H}(\mathbf{X}^{(\sigma)}) \quad (15)$$

式中: $\mathbf{X}^{(\sigma)} = (l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7, l_8, l_9)^{(\sigma)}$ 表示第 σ 次迭代时的未知向量, $\mathbf{H}(\mathbf{X}^{(\sigma)}) = (h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9)^{(\sigma)}$ 表示第 σ 次迭代时的函数值, $\mathbf{H}'(\mathbf{X}^{(\sigma)})$ 表示 $\mathbf{H}(\mathbf{X}^{(\sigma)})$ 的雅可比矩阵, 上标“+”表示矩阵的加号逆。

压电陶瓷的等效刚度很大, 因此工作过程中支链的实际长度与其初始长度 L 很接近, 将后者作为前者的迭代初值。当 $\mathbf{X}^{(\sigma+1)}$ 与 $\mathbf{X}^{(\sigma)}$ 的谱范数之差小于指定精度时, 迭代结束。通过式(10), 将数值计算结果 l_i 转换为 f_i , 再代入定义式(16)中计算六维加速度传感器的 X 向线加速度灵敏度。

$$S_{a_x} = \sum_{i=1}^9 |f_i| / a_x \quad (16)$$

传感器在 Y 向和 Z 向线加速度灵敏度的推导过程与 X 向完全相同, 不再重复。需要强调的是, 3 个方向线加速度灵敏度的推导结果也相同, 表明该传感器的线加速度灵敏度在空间 3 个正交方向上满足各向同性。另外, 由式(10, 11)可知, 若加速度以任意比例因子放大后, 各支链的轴向力也相应地放大同样大小比例因子, 再结合式(16)可知, 传感器的线加速度灵敏度与加速度大小无关。

当外壳以加速度 ϵ_x 做 X 方向的匀角加速转动时, 同样有 9 个轴向力反作用于质量块上的 3 个复合弹性球铰链上。待运动稳定后, 质量块的加速度可近似等于外壳的加速度。根据动量矩定理, 达朗贝尔原理以及式(10), 列写质量块的 6 个运动独立平衡方程式

$$\begin{cases} h_{10} = l_4 - l_2 + 4mn\epsilon_x / (3k) = 0 \\ h_{11} = l_3 - l_7 = 0 \\ h_{12} = l_6 - l_8 = 0 \\ h_{13} = L - l_3 - l_6 + l_9 = 0 \\ h_{14} = L + l_1 - l_4 - l_7 = 0 \\ h_{15} = L - l_2 + l_5 - l_8 = 0 \end{cases} \quad (17)$$

同样, 将式(17)与协调方程(13)联立, 运用 Newton-Raphson 迭代公式(15)进行数值迭代, 并根据定义式(18)计算六维加速度传感器的 X 向角加速度灵敏度。传感器在 Y 向和 Z 向角加速度灵敏度的推导过程和结果与 X 向完全相同, 表明传感器的 3 个角加速度灵敏度也满足各向同性。由式(10, 17)可知, 角加速度灵敏度与加速度大小也无关。

$$S_{\epsilon_x} = \sum_{i=1}^9 |f_i| / \epsilon_x \quad (18)$$

将弹性体的 5 个结构参数设置成表 1 中的初始值, 基于上述推导出的灵敏度求解算法编写 MATLAB 程序。不失一般性, 设定外壳沿 X 向平动的线加速度为 $10 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-2}$, 在给定的计算精度内, 仅迭代 3 次即打印出线加速度灵敏度为 $0.0013 \text{ N}/(\text{mm} \cdot \text{s}^{-2})$; 设定外壳沿 X 向转动的角加速度为 $50 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$, 仅迭代 4 次即打印出角加速度灵敏度为 $0.0245 \text{ N}/(\text{rad} \cdot \text{s}^{-2})$ 。为了验证灵敏度模型及其求解算法的可靠性, 在软件 ADAMS 中对虚拟样机进行动力学仿真。给外壳施加相同加速度的驱动, 并按照灵敏度定义式(16, 18)设置测量函数, 输出其跟踪曲线, 如图 5, 6 所示, 理论推导结果与软件仿真结果吻合得很好。

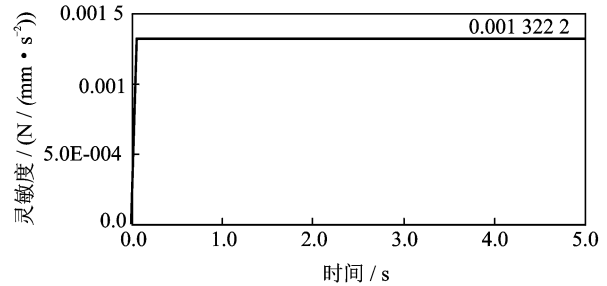


图 5 线加速度灵敏度仿真结果

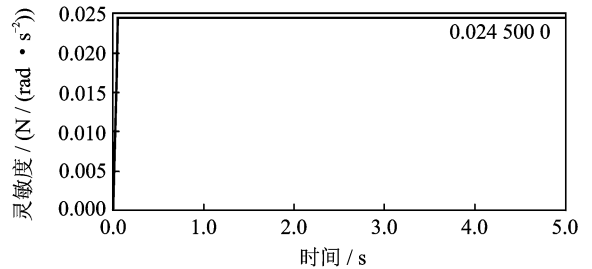


图 6 角加速度灵敏度仿真结果

2.3 误差区间宽度模型

Moore 于 1962 年在其博士论文中首次提出区间算法的概念, 并于 1966 年出版专著《区间分析》^[10], 建立了系统的区间运算理论。区间分析的基本思想是采用一段区间来代替取值不精确的浮点数进行计算, 有界区间数 $X = \{x \in R | \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\} = [\underline{x}, \bar{x}]$ 中 \underline{x} 称为下端点, \bar{x} 称为上端点, 它们的距离称为区间宽度, 即 $W(X) = \bar{x} - \underline{x}$ 。分量是区间的向量、矩阵分别称为区间向量和区间矩阵, 它们的宽度有很多种定义^[11-12], 本文将其定义为各分量的区间宽度之和, 即

$$W(X) = \sum_{i=1}^n W(X_i) \quad (19)$$

考虑到电压值与对应支链的轴向力成正比例关系^[8],不妨假设九条支链的轴向力分别位于 9 个区间数内,再由式(10)将轴向力区间数转换成支链长度区间数 Il_i ,即

$$Il_i \in \left[L - \frac{\bar{f}_i}{k}, L - \frac{\underline{f}_i}{k} \right] \quad (i=1 \sim 9) \quad (20)$$

本文涉及到的并联机构具有封闭形式的位移正解 \mathbf{O} 和 \mathbf{R} ^[8],如式(21)所示;由式(14)并借助于 MATLAB 中的 INTLAB 工具箱将位置矢量和姿态矩阵分别扩展成位置区间向量和姿态区间矩阵,如式(22)所示;再根据定义式(19),计算其宽度,从而量化输出误差与解耦位移误差之间的传递关系。

$$\begin{cases} \mathbf{O} = \frac{1}{3}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3) + \frac{2}{3n}((\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3) \times (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_3)) \\ \mathbf{R} = \frac{2}{n}(\mathbf{O} - \mathbf{b}_3, \mathbf{O} - \mathbf{b}_2, \mathbf{O} - \mathbf{b}_1) \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} \mathbf{IO} = \begin{bmatrix} [\underline{o}_x, \bar{o}_x] \\ [\underline{o}_y, \bar{o}_y] \\ [\underline{o}_z, \bar{o}_z] \end{bmatrix} \\ \mathbf{IR} = \begin{bmatrix} [\underline{r}_{11}, \bar{r}_{11}] & [\underline{r}_{12}, \bar{r}_{12}] & [\underline{r}_{13}, \bar{r}_{13}] \\ [\underline{r}_{21}, \bar{r}_{21}] & [\underline{r}_{22}, \bar{r}_{22}] & [\underline{r}_{23}, \bar{r}_{23}] \\ [\underline{r}_{31}, \bar{r}_{31}] & [\underline{r}_{32}, \bar{r}_{32}] & [\underline{r}_{33}, \bar{r}_{33}] \end{bmatrix} \end{cases} \quad (22)$$

为便于建立解耦速度、加速度的误差区间,首先给出并证明如下 3 个定理。

定理 1 区间函数 $IF(s, t)$ 为连续函数 $f(s, t)$ 的区间扩展,且 $W(IF(s, t))$ 为关于变量 s 的单调函数,那么, $W(\partial(IF(s, t))/\partial t)$ 也为关于 s 的单调函数,且其单调性与 $W(IF(s, t))$ 的单调性保持一致。

证明:

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\partial f(s, t)}{\partial t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(s, t + \Delta t) - f(s, t)}{\Delta t} \\ \therefore \frac{\partial IF(s, t)}{\partial t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta t} [\underline{f}(s, t + \Delta t) - \underline{f}(s, t), \bar{f}(s, t + \Delta t) - \bar{f}(s, t)] \right) \end{aligned}$$

$$\therefore W\left(\frac{\partial IF(s, t)}{\partial t}\right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta t} (W(IF(s, t + \Delta t)) + W(IF(s, t))) \right)$$

又 $\therefore W(IF(s, t))$ 为关于 s 的单调函数

$\therefore W\left(\frac{\partial IF(s, t)}{\partial t}\right)$ 也为关于 s 的单调函数,

且单调性与 $W(IF(s, t))$ 的单调性一致。

定理 2 如果 $Y_1 = A + B, Y_2 = A - B$, 其中, $A, B, Y_1, Y_2 \in I(R)$, 那么, $W(Y_1) = W(Y_2) = W(A) + W(B)$ 。

证明:

$$\begin{aligned} \therefore Y_1 &= [\underline{A} + \underline{B}, \bar{A} + \bar{B}], Y_2 = [\underline{A} - \underline{B}, \bar{A} - \bar{B}] \\ W(Y_1) &= (\bar{A} - \underline{A}) + (\bar{B} - \underline{B}) = W(A) + W(B) \\ W(Y_2) &= (\bar{A} - \underline{A}) + (\bar{B} - \underline{B}) = W(A) + W(B) \\ \therefore W(Y_1) &= W(Y_2) = W(A) + W(B) \end{aligned}$$

定理 3 如果 $Y_1 = A_1 + B_1, Y_2 = A_2 + B_2$, 其中, $A_1, A_2, B_1, B_2, Y_1, Y_2 \in I(R)$, 且满足 $W(A_2) > W(A_1)$ 和 $W(B_2) > W(B_1)$, 那么, $W(Y_2) > W(Y_1)$ 。

证明:

$$\begin{aligned} Y_1 &= [\underline{A}_1 + \underline{B}_1, \bar{A}_1 + \bar{B}_1], Y_2 = [\underline{A}_2 + \underline{B}_2, \bar{A}_2 + \bar{B}_2] \\ W(Y_1) &= (\bar{A}_1 - \underline{A}_1) + (\bar{B}_1 - \underline{B}_1) = W(A_1) + W(B_1) \\ W(Y_2) &= (\bar{A}_2 - \underline{A}_2) + (\bar{B}_2 - \underline{B}_2) = W(A_2) + W(B_2) \\ \therefore W(A_2) &> W(A_1) \text{ 且 } W(B_2) > W(B_1) \\ \therefore W(Y_2) &> W(Y_1) \end{aligned}$$

并联机构的线速度区间向量是位置向量对时间求一阶导数后的区间扩展,即

$$\mathbf{IV} = \partial(\mathbf{IO}(s, t))/\partial t \quad (23)$$

式中 s 表示弹性体的结构参数。

运动的连续性保证位置函数连续,根据定理 1 以及式(23)可以得出解耦线速度矢量的误差区间宽度关于 5 个结构参数的单调性关系。

用四元数及其导数描述并联机构的角速度

$$\omega = 2 \begin{bmatrix} \lambda_0 \dot{\lambda}_1 - \lambda_3 \dot{\lambda}_2 + \lambda_2 \dot{\lambda}_3 - \lambda_1 \dot{\lambda}_0 \\ \lambda_3 \dot{\lambda}_1 + \lambda_0 \dot{\lambda}_2 - \lambda_1 \dot{\lambda}_3 - \lambda_2 \dot{\lambda}_0 \\ -\lambda_2 \dot{\lambda}_1 + \lambda_1 \dot{\lambda}_2 + \lambda_0 \dot{\lambda}_3 - \lambda_3 \dot{\lambda}_0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

将式(24)所示的矢量扩展为区间向量 $I\omega$, 并由定义式(19)计算并联机构角速度区间向量宽度

$$\begin{aligned} W(I\omega) &= 2W\left(\frac{\partial}{\partial t}(\lambda_0 \lambda_1 + \lambda_0 \lambda_2 + \lambda_0 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3)\right) \end{aligned} \quad (25)$$

用四元数描述的姿态矩阵为

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 2(\lambda_0^2 + \lambda_1^2) - 1 & 2(\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_0 \lambda_3) & 2(\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_0 \lambda_2) \\ 2(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_0 \lambda_3) & 2(\lambda_0^2 + \lambda_2^2) - 1 & 2(\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_1) \\ 2(\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_2) & 2(\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_0 \lambda_1) & 2(\lambda_0^2 + \lambda_3^2) - 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

由式(26)以及定理2可得

$$W(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_0\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 +$$

$$\lambda_2\lambda_3) = \frac{1}{4}(W(\mathbf{IR}) + W(\mathbf{IR}^*)) \quad (27)$$

式中 $W(\mathbf{IR}^*)$ 表示姿态矩阵中3个对角元素的误差区间宽度之和。

由式(25,27)、定理1及定理3可以获得解耦角速度矢量误差区间宽度关于5个结构参数的单调性关系,具体结果在3.1节中给出。

3 结构优化

3.1 单性能优化

由式(6)以及系统惯性矩阵、刚度矩阵元素的表达式可知,弹性体的不同结构参数对应着传感器的不同基频。参照表1中的约束条件,在MATLAB中,通过五重循环语句依次改变各个结构参数,并依照2.1节基频模型的求解算法逐个计算系统基频,能够得到基频与5个结构参数之间的影响关系曲线,即关于基频的性能图谱,如图7所示,具体表现为:基频关于质量块的质量和压电陶瓷的厚度为单调递减函数,关于压电陶瓷的直径为单调递增函数,与质量块的边长以及弹性铰链的轴向长度无关。

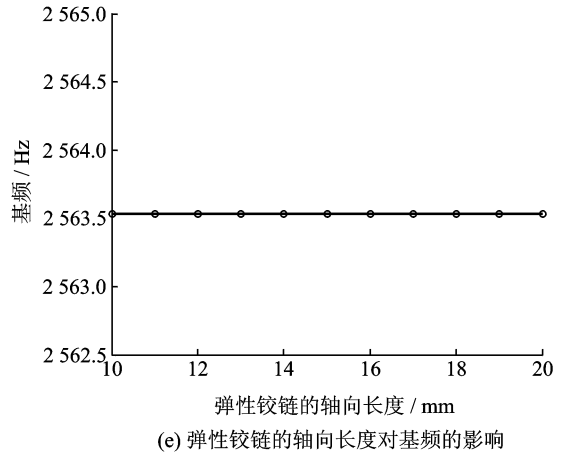
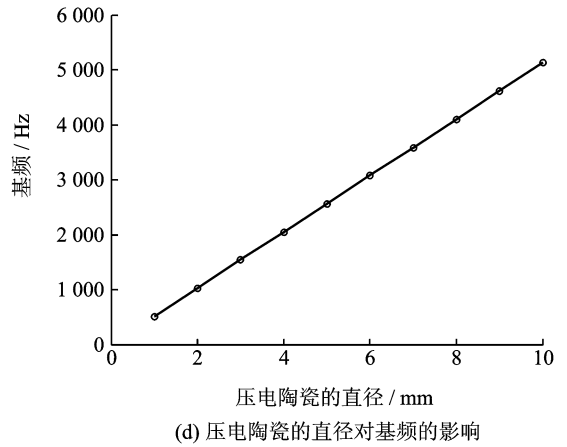
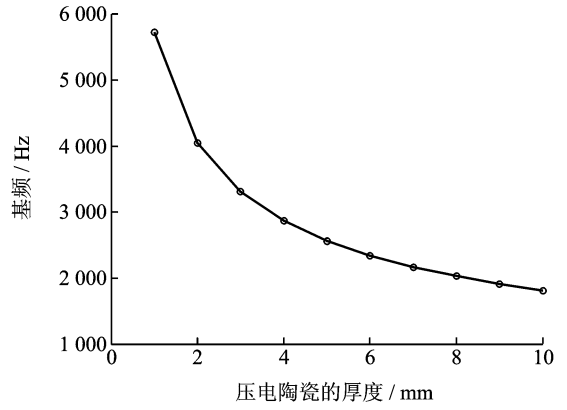
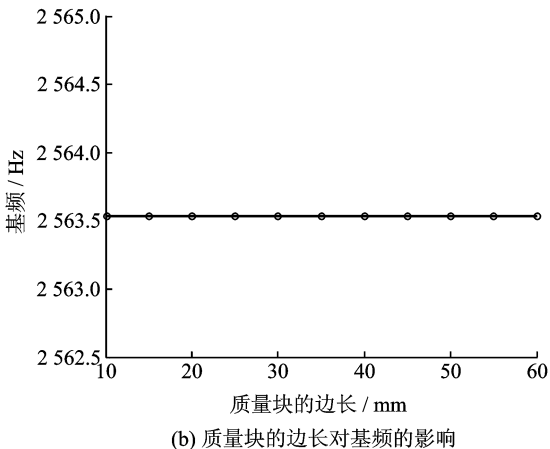
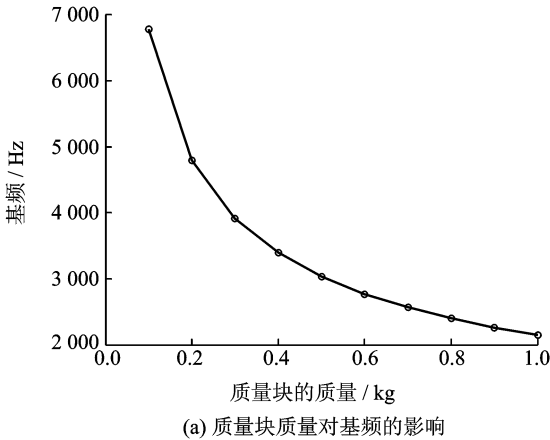


图7 关于基频的性能图谱

由式(11,13,16~18)可知,不同的结构参数对应着传感器不同的灵敏度。依次改变5个结构参数,并依照2.2节灵敏度模型的求解算法逐个计算灵敏度,能够得到灵敏度与结构参数之间的影响关系。关系曲线与图7类似,限于篇幅,这里仅给出文字说明,表现为:线加速度灵敏度仅受质量块质量的影响,角加速度灵敏度受质量块质量和质量块边长的影响,它们均表现为线性递增的函数关系;欲提高传感器的灵敏度,可以选择增大质量块的质量或边长,其他3个结构参数对灵敏度没有影响。

由式(20~22)可知,解耦位移误差区间宽度与弹性体结构参数满足一一对应的关系。依次改变 5 个结构参数,并依照 2.3 节数学模型逐个计算区间宽度,得到的位置误差区间宽度与姿态误差区间宽度关于结构参数呈现一致的变化趋势,表现为:区间宽度关于质量块的边长以及压电陶瓷的直径呈单调递减,关于压电陶瓷的厚度以及弹性铰链的轴向长度呈单调递增,与质量块的质量大小无关。另外,姿态矩阵中 3 个对角元素的误差区间宽度之和关于 5 个结构参数的单调性质与上述性质一致。根据 2.3 节中给出并经过证明的 3 个定理以及式(23~27)可知,上述结论同样适合于速度和加速度的误差区间宽度。

上述结论表明:3 个单性能指标关于 5 个结构参数均表现为单调递增或递减的关系,也即性能最佳时结构参数处于其约束条件的上限或下限。分别列出各单性能指标的优化结果,如表 2 所示,其中,“↓”表示取下限,“↑”表示取上限,“—”表示无影响。

表 2 单性能优化结果

性能	质量块的质量	质量块的边长	压电陶瓷的厚度	压电陶瓷的直径	弹性铰链的轴向长度
基频	↓	—	↓	↑	—
线加速度灵敏度	↑	—	—	—	—
角加速度灵敏度	↑	↑	—	—	—
误差区间宽度	—	↑	↓	↑	↓

3.2 综合性能优化

针对不同的测量环境,人们对传感器各个指标的要求也不尽相同,有时需要重点考虑某些指标,即单目标优化设计问题^[13];有时需要综合考虑各个性能指标,即多目标优化设计问题^[14-16]。六维加速度传感器 3 个单性能目标之间存在着矛盾关系,即一个目标函数值的最佳往往会引起其他目标函数值的最劣。除此之外,综合优化过程中还存在两个问题:(1)不同的使用场合对各分目标有着不同的权重要求;(2)各分目标函数没有统一的量纲和数量级。分析表 2 可知,后 4 个结构参数对性能指标的影响不存在矛盾,也即对它们的优化很明确;只有质量块的质量对基频和灵敏度的影响关系是矛盾的。这样,该多目标优化问题就转化为单参数对三目标的综合优化问题。不妨将基频、线加速度灵敏度、角加速度灵敏度关于质量块质量的性能函数分别记为 $F_1(m)$, $F_2(m)$ 和 $F_3(m)$ 。它们均是单

调函数,且表 1 中已经确定了质量块质量的约束条件,因此,以上 3 个目标函数的理想值很明确。考虑到它们的单调性不一致、各性能的权重和量纲也不一致,基于传统的理想点法,本文给出一种新的综合性能目标函数式(28),用以解决六维加速度传感器结构优化设计过程中遇到的多目标优化设计问题。

$$F(m) = \omega_1 \times \left(\frac{F_1(m) - F_1(0.1)}{F_1(1) - F_1(0.1)} \right)^2 + \omega_2 \times \left(\frac{F_2(m) - F_2(1)}{F_2(0.1) - F_2(1)} \right)^2 + \omega_3 \times \left(\frac{F_3(m) - F_3(1)}{F_3(0.1) - F_3(1)} \right)^2 \quad (28)$$

式中: $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 分别对应于 3 个性能指标的加权因子,它们的和等于 1。

本文涉及到的综合优化问题就转化为求解式(28)所示的综合性能函数在其定义域上的最小值。综合性能加权系数依据测量场合对传感器各单性能的具体要求来确定,例如,当对基频和灵敏度同等程度要求,且线加速度灵敏度和角加速度灵敏度也同等程度要求时,3 个加权因子分别取为 0.5, 0.25 和 0.25;当对传感器的基频要求较高,而对灵敏度的要求不高时,3 个加权因子可以分别取为 0.8, 0.1 和 0.1;当对灵敏度要求较高,而对基频要求不高时,3 个加权因子可以分别取为 0.1, 0.45 和 0.45。利用目标函数式(28)可以对六维加速度传感器的综合性能进行优化,同时考虑到选取不同的加权因子,综合效果可能会不相同,不失一般性,选取上述 3 组加权因子并结合系统基频和灵敏度的解算程序,绘制六维加速度传感器的 3 条综合性能图谱,如图 8 所示。观察可知,这 3 组加权因子所对应的综合性能与矛盾参量之间满足不同的影响关系。在变量的约束条件范围内,第 1, 2, 3 组

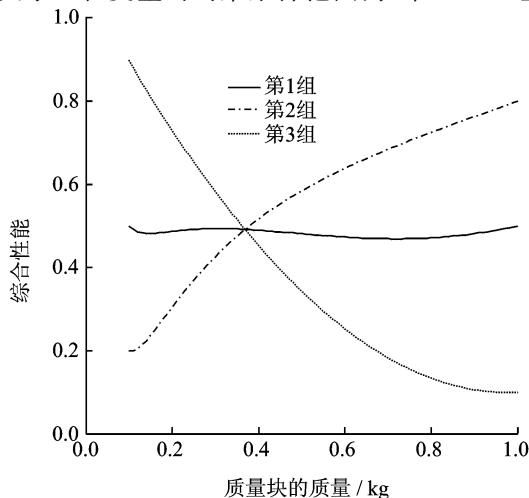


图 8 六维加速度传感器综合性能图谱

加权因子所对应的综合性能取最优值时,质量块的质量分别为 0.72,0.11 和 0.98 kg。

3.3 应用实例

为顺应传感器的微型化发展趋势,在确保综合性能优越、加工及装拆方便的前提下,应尽量减少传感器的体积和质量。综合考虑以上因素,对表 1 所示的六维加速度传感器的原始结构参数进行优化,优化后的结构参数依次为:0.72 kg,45.1 mm,1 mm,8 mm,12 mm。运用本文第 2 节建立的性能模型及其求解算法解算参数优化前后对应的各单性能函数值以及综合性能函数值(3 个加权因子分别取为 0.5,0.25 和 0.25),对比结果列于表 3 中。

表 3 结构参数优化前后各性能指标对比

性能	优化前	优化后
基频/Hz	2 563.536 7	9 043.307 5
线加速度灵敏度/(N/(mm·s ⁻²))	0.001 3	0.001 4
角加速度灵敏度/(N/(rad·s ⁻²))	0.024 5	0.025 3
位置误差区间宽度/(10 ⁻⁶ mm)	7.687 5	0.600 6
姿态误差区间宽度/10 ⁻⁶	1.386 3	0.108 1
综合性能	0.469 4	0.469 2

针对同一种构型的六维加速度传感器,作者加工制作了两台实物样机,如图 9,10 所示,它们对应的结构参数分别是优化前和优化后的。将两台实物样机安装在课题组自行研发的六维标定平台^[17]上进行了试验,测量数据经过分析处理后得到了传感器的实际性能,试验结果与表 3 中的理论计算结果相吻合。可见,运用 3.1,3.2 节的结论对六维加速度传感器 5 个结构参数进行优化之后,传感器的几大主要性能以及综合性能均得到了一定程度的提升,进一步有效验证了本文研究结果的可靠性和可行性。

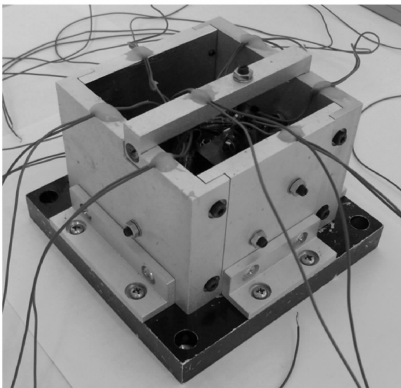


图 9 结构参数优化前的实物样机

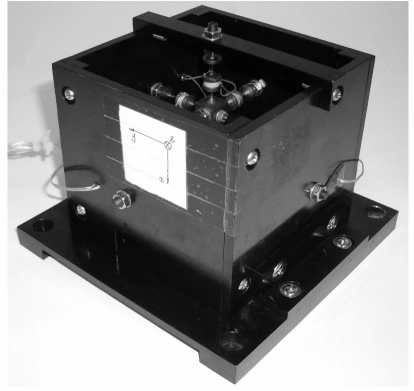


图 10 结构参数优化后的实物样机

4 结 论

(1)利用 2.1 节给出的矩阵迭代法,可解算六维加速度传感器的振型方程,保证任意设定的初始振型向量均能收敛到结构矩阵的主特征向量,且最后一个归一化因子对应系统的基频。

(2)六维加速度传感器的灵敏度模型为一组超静定反向动力学方程,通过添加系统内的协调方程,并运用 Newton-Raphson 迭代法可解算各加速度分量的灵敏度。

(3)误差区间宽度可用于评估六维加速度传感器的理论精度,利用 2.3 节给出的 3 个关于区间宽度的定理能够量化传感器的误差传递关系。

(4)利用给出的综合性能目标函数(28),分析出在各性能指标同等重要的前提下,文献[8]中六维加速度传感器的质量块质量取 0.72 kg 时,其综合性能最佳。该目标函数同样可用于解决其他领域中的多目标优化问题。

参考文献:

- [1] Wang Daihua, Yuan Gang. A six degree of freedom acceleration sensing method based on six coplanar single axis accelerometers[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2011, 60 (4): 1433-1442.
- [2] Dong Y, Zwahlen P, Nguyen A M, et al. High performance inertial navigation grade sigma-delta MEMS accelerometer[C]//Position, Location and Navigation Symposium(PLANS), 2010 IEEE/ION. Indian Wells, CA, United States: [s. n.]. 2010:32-36.
- [3] Pedro B, Carlos S, Paulo O, et al. Accelerometer calibration and dynamic bias and gravity estimation: analysis, design, and experimental evaluation [J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2011,19(5):1128-1137.

- [4] 吴仲城,孟明,申飞,等. 一体化结构六维加速度传感器设计[J]. 仪器仪表学报,2004,25(4):302-303.
Wu Zhongcheng, Meng Ming, Shen Fei, et al. Design of a monolithic six-axis accelerometer based on single inertial mass[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument,2004,25(4):302-303.
- [5] Chen T L. Design and analysis of a fault-tolerant coplanar gyro-free inertial measurement unit[J]. Journal of Microelectromechanical Systems,2008,17(1):201-212.
- [6] 尤晶晶,李成刚,胡家奇,等. 六维加速度传感器结构参数对其灵敏度的影响[J]. 压电与声光,2010,32(6):995-998.
You Jingjing, Li Chenggang, Hu Jiaqi, et al. Effects of structural parameters on sensitivity of six-axis accelerometer [J]. Piezoelectrics & Acoustooptics, 2010,32(6):995-998.
- [7] 许益明,赵现朝,高峰,等. 一种新型六维加速度传感器的结构设计与分析[J]. 机械设计与研究,2009,25(1):48-52.
Xu Yiming, Zhao Xianchao, Gao Feng, et al. Design and analysis of a novel 6-axis acceleration sensor[J]. Machine Design and Research,2009,25(1):48-52.
- [8] 李成刚,吴洪涛,尤晶晶. 冗余并联式六维加速度传感器及其测量方法[P]. 中国:CN101949954A,2011-01-19.
- [9] 赵勇,胡涛. 传感器与检测技术[M]. 北京:机械工业出版社,2010.
- [10] Moore R E. Interval analysis[M]. New York:Prentice-Hall,1966.
- [11] 关欣,衣晓,何友,等. 一种区间属性值离散化的新方法[J]. 宇航学报,2009,30(3):1164-1168.
Guan Xin, Yi Xiao, He You, et al. A new discretization algorithm for continuous interval-valued attributes[J]. Journal of Astronautics,2009,30(3):1164-1168.
- [12] 申培萍,张可村. 一类非光滑全局优化问题的区间展开方法[J]. 应用数学学报,2005,28(1):11-19.
Shen Peiping, Zhang Kecun. An interval expansion method of a kind of nonsmooth global optimization [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica,2005,28(1):11-19.
- [13] Xu Kejun, Li Cheng. Dynamic decoupling and compensating methods of multi-axis force sensors [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement,2000,49(5):935-941.
- [14] 周杰,张渝,安治国,等. 基于遗传算法的锻模阻力墙结构多目标优化设计[J]. 机械工程学报,2010,46(14):85-90.
Zhou Jie, Zhang Yu, An Zhiguo, et al. Multi-objective optimization design of forging-die resistance wall structure based on genetic algorithm[J]. Journal of Mechanical Engineering,2010,46(14):85-90.
- [15] Deb K, Pratap A, Agrwal S, et al. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation,2002,6(2):182-197.
- [16] 王珑,王同光,吴江海,等. 基于改进 NSGA-II 算法的风力机叶片多目标优化设计[J]. 南京航空航天大学学报,2011,43(5):672-676.
Wang Long, Wang Tongguang, Wu Jianghai, et al. Multi-objective optimization design of wind turbine blades based on improved NSGA-II[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2011,43(5):672-676.
- [17] 李成刚,尤晶晶,陈鹏,等. 六维加速度传感器标定平台及标定方法[P]. 中国:CN102680739A,2012-09-19.