

一种有限体积-边界嵌入方法及其向三维 复杂动边界流动问题的推广

张 扬¹ 周春华¹ 艾俊强²

(1. 南京航空航天大学航空宇航学院, 南京, 210016; 2. 中国航空工业第一飞机设计研究院, 西安, 710089)

摘要:发展了一种不可压 N-S 方程的有限体积边界嵌入解法并将其推广到求解三维复杂几何外形的动边界绕流问题。数值计算中,所有网格点分为解域内部的计算点和边界嵌入点以及不参与计算的解域外的点。通过与无滑移边界条件和当地简化动量方程相关的物面法向上的二次多项式近似,确定边界嵌入点上的流动变量值。当模拟包含运动边界的流场时,网格可以是固定的,无需进行网格的实时更新,计算效率获得了提高。采用 Galerkin 有限体积近似进行控制方程的空间离散。为验证该方法的可靠性,模拟了圆柱、圆球等固定物体的绕流以及自由来流中垂直振荡圆柱和游动的类鱼体等运动物体的绕流,并将计算结果与参考文献的结果进行了比较。

关键词:有限体积法; 边界嵌入方法; 动边界流动; 边界非协调类方法; 非定常流

中图分类号:O35 **文献标志码:**A **文章编号:**1005-2615(2013)03-0322-07

Finite Volume Immersed Boundary Method and Its Extension to Simulate 3-D Flows with Complex Moving Boundaries

Zhang Yang¹, Zhou Chunhua¹, Ai Junqiang²

(1. College of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016, China;
2. The First Aircraft Institute, Aviation Industry Corporation of China, Xi'an, 710089, China)

Abstract: A finite volume immersed boundary method for incompressible Navier-Stokes (N-S) equations is developed and extended to solve three-dimensional geometrically complex moving-boundary problems. All mesh nodes are classified into the three categories: internal computed points, immersed boundary points and external points that are blanked out of computation. The flow-variables at an immersed boundary point are evaluated via an approximation of quadratic polynomial in normal direction to wall, which is associated with no-slip boundary condition and the simplified local momentum equation. In the simulation of flow-field containing moving boundaries, the grid can be fixed and there is no need to update it. Therefore, the computational efficiency can be improved significantly. Spatial discretization is achieved with the help of Galerkin finite volume approximation. In order to validate the present method, two groups of flow phenomena are simulated; (1) flows over a stationary circular cylinder and a stationary sphere; (2) a transversely oscillating cylinder in uniform flow and a fish-like swimming. The predictions show good agreement with the reference results.

Key words: finite volume method; immersed boundary method; moving-boundary flows; non-boundary-conforming method; unsteady flows

基金项目:国家自然科学基金(11072113)资助项目。

收稿日期:2012-07-12; **修订日期:**2013-10-29

通信作者:周春华,男,教授,博士生导师,1965 年出生, chzhou@nuaa.edu.cn。

边界嵌入方法(Immersed boundary method, IBM)是当前计算流体力学领域的研究热点之一。此类方法中,网格边界与解域边界不必一致,网格生成变得非常容易。动边界流动的模拟可以在固定网格上进行,无需进行网格的实时更新和网格之间的数据插值传递,提高了计算效率和精度。

原始的 IBM 方法是由 Peskin 于 20 世纪 70 年代初提出的^[1],并获得了不断的改进和发展^[2-3]。IBM 的本质是将一个附加力项引入到动量方程中,从而在固壁边界上强加流动的无滑移条件。文献^[4]在最靠近物体边界的流场内网格点上应用边界条件,提出了一种混合直角网格边界嵌入方法(Hybrid cartesian immersed boundary, HCIB),克服了 IBM 方法中边界被抹平的弱点。Gilmanov 等人^[5]通过沿物面法向解的重构,对 HCIB 进行了进一步改进,使之适用于复杂外形绕流的模拟。舒昌和周春华等人提出了一种自由域离散方法(Domain-free discretization, DFD)^[6]。DFD 方法中,解域内部节点上微分方程的离散形式可以涉及解域外的某些点。在确定这些域外点上的流动变量时,边界条件将被嵌入。

受文献^[4,5]的启发,方安石针对有限体积空间离散,初步发展了一种有限体积边界嵌入法并应用于简单二维流动的模拟^[7]。该方法中,通过与无滑移边界条件和当地简化动量方程相关的物面法向上的线性插值,确定边界嵌入点上的流动变量值。在此基础上,本文将插值方式改进为二次多项式插值以进一步提高数值解的精度,并将该方法推广到三维复杂几何外形动边界绕流问题的求解。与 HCIB 相比,本文方法的应用不限于 Cartesian 网格,也适用于非结构网格;若流场中既有运动边界又有静止边界,仍可以采用传统的边界协调网格处理静止边界。DFD 在处理薄物体绕流问题时会多值点的情况,方法的程序实现比较复杂;本文所发展的有限体积边界嵌入法与解域外的网格节点无关,不存在多值点问题,方法的实现要简单得多。

1 控制方程与数值方法

不考虑质量力作用,控制非定常、等密度、等粘性系数层流的量纲一的三维 N-S 方程可写成

$$\mathbf{I}^m \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{s}_i}{\partial x_i}, \quad i=1,2,3 \quad (1)$$

式中: \mathbf{w} 为流动变量矢, \mathbf{f}_i 和 \mathbf{s}_i 分别为对流通量矢和粘性通量矢

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} p \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ u_1 u_i + p \delta_{1i} \\ u_2 u_i + p \delta_{2i} \\ u_3 u_i + p \delta_{3i} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{i1} \\ \tau_{i2} \\ \tau_{i3} \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中: u_i 为 Cartesian 速度分量, p 为压强, δ_{ij} 为 Kronecker 函数, τ_{ij} 为量纲一粘性应力张量。 $\mathbf{I}^m = \text{diag}(0, 1, 1, 1)$ 为修正的单位矩阵,用来消去连续方程中的压强时间导数项。

采用具有二阶精度的 Galerkin 有限体积格式进行空间离散。流动变量存储在四面体单元的顶点上,并以连续的分段线性函数近似。N-S 方程式(1)可以离散成

$$\mathbf{I}^m \cdot \Omega_P \frac{\partial \mathbf{w}_P}{\partial t} = \sum_{e=1}^n \frac{\mathbf{F}^A + \mathbf{F}^B + \mathbf{F}^C}{3} \cdot \Delta \mathbf{S}_{ABC} - \sum_{e=1}^n \frac{4}{3} \mathbf{S}^e \cdot \Delta \mathbf{S}_{ABC} \quad (3)$$

式中的求和对所有共享顶点 P 的四面体单元进行(这些单元构成了 P 的影响域); Ω_P 表示影响域中单元体积的和; $\Delta \mathbf{S}_{ABC}$ 表示每个单元 e 影响域边界面的外法向有向面积; $\mathbf{F}^A, \mathbf{F}^B, \mathbf{F}^C$ 为 A, B, C 三点上的对流通量张量; \mathbf{S}^e 为单元常值的粘性通量张量(如图 1 所示)。

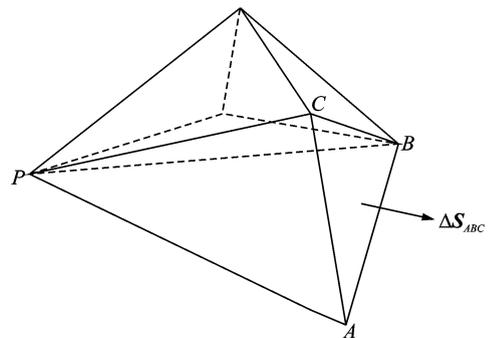


图 1 点 P 影响域边界面上的外法向有向面积

为保证稳定性,引入双调和算子构成的人工耗散项^[8]。非定常流计算中的时间推进采取三阶精度的双时间步格式^[8]。考虑到由于物体运动产生的“新现”网格点问题^[9],物理时间步长限制为

$$\Delta t \leq \frac{h}{3 \max(|V_1^n|, |V_2^n|, |V_3^n|)} \quad (4)$$

式中 $V_i (i=1, 2, 3)$ 为物体运动速度分量, h 为物面边界附近最小的网格尺度。

2 边界嵌入点上流动变量的确定及边界条件的嵌入

从离散公式(3)可知,当一个网格节点的所有

相邻点在解域内时,该点上的流动变量值可通过求解控制方程获得,因此称这类网格节点为内部计算点(图2(b)中的B点)。当一个网格节点有处于解域外的相邻点时,该点上的流动变量值无法通过求解控制方程获得(如图2(a)中的1点或图2(b)中的D点)。将基于解的近似形式对边界附近点上的解进行重构,从而确定该点上的流动变量值。在解的重构中,无滑移边界条件将被嵌入,因此这类点被称为边界嵌入(Immersed boundary, IB)点。解域外的点将不参与计算。IB点上流动变量的确定是本文方法实现的关键。

IB点上的流动变量值将通过沿法向的内插获得。为进行每个IB点上的插值计算,必须在流场内部的物面法线上构建一个插值点。本文取过IB点的物面法线与最靠近物面的顶点均为内部计算点的单元面(二维情形下的边)的交点为插值点。图2(a)和图2(b)中的P点即为插值点。文献[7]论述了二维情形下离散物面的法线方向的近似确定方法。三维情形下物面法线方向的确定可由二维情形直接推广获得,本文不再详述。

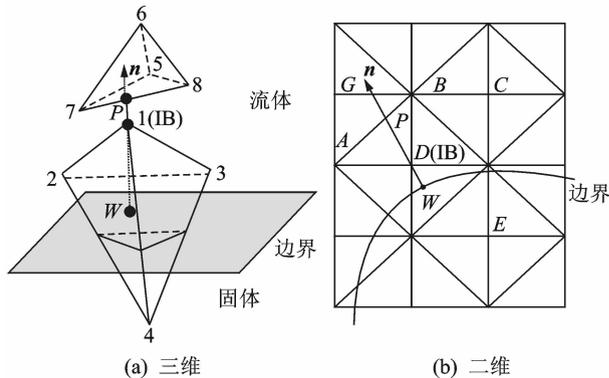


图2 内部计算点、IB点以及插值点

如图2(a)所示,通过插值点P所在三角形(5,7,8)上的线性内插,可确定该点上的任一流动变量 φ 的值

$$\varphi_P = \sum_{k=1}^3 \Phi_k(x_P, y_P, z_P) \varphi_k \quad (5)$$

式中: $\Phi_k(x_P, y_P, z_P)$ 表示每个顶点的线性插值函数在P处的值。在每个时间步上,插值点上的解将被用于IB点上解的重构。在此过程中,物面无滑移条件将被嵌入。

如图2所示,记法线与物面边界的交点为W。在壁面附近,假设在法线上流动变量可以表示成距物面点W的法向距离n的二次多项式

$$\varphi(n) = c_1 n^2 + c_2 n + c_3 \quad (6)$$

式中: c_1, c_2, c_3 为待定系数。

对粘性运动,有下列无滑移边界条件

$$u_w = V_w \quad (7)$$

式中: u_w, V_w 分别为物面点W上流体和固体的速度分量。因此,对速度分量分布有

$$\text{在 } W \text{ 点上: } u_w = V_w = u(0) = c_3 \quad (8)$$

$$\text{在 } P \text{ 点上: } u_P = u(n_P) = c_1 n_P^2 + c_2 n_P + c_3 \quad (9)$$

$$\text{在 } P \text{ 点上: } \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_P = 2c_1 n_P + c_2 \quad (10)$$

式(8~10)中W上的物体运动速度分量 V_w 为已知量, n_P 为插值点P与物面点W之间的距离,插值点P的速度分量 u_P 由式(5)求得,P点上速度法向导数由点5,6,7,8构成的四面体(见图2(a))上速度的线性分布求得。联立式(8~10)解得

$$c_1 = \frac{n_P \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_P - u_P + V_w}{n_P^2}$$

$$c_2 = \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_P - 2c_1 n_P, c_3 = V_w \quad (11)$$

将 c_1, c_2 和 c_3 代入式(6)可获得边界附近沿法向的近似速度分布。进一步,将 $n = n_{IB}$ 代入式(6)即可获得IB点的速度分量。

对沿法线的压强分布有

$$\text{在 } P \text{ 点上: } p_P = c_1 n_P^2 + c_2 n_P + c_3 \quad (12)$$

$$\text{在 } P \text{ 点上: } \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_P = 2c_1 n_P + c_2 \quad (13)$$

$$\text{在 } W \text{ 点上: } \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_W = \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_{n_P=0} = c_2 \quad (14)$$

式(12,13)中插值点P上的压强及其法向导数计算与前述的该点上速度及其导数计算相同。为计算式(14)中物面点W上的压强法向导数,应用物面法向动量方程

$$\frac{Du}{Dt} \cdot n = -\nabla p \cdot n + \frac{1}{Re} \nabla^2 u \cdot n \quad (15)$$

式中n为单位外法向矢量。忽略粘性项,式(15)可简化为

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{Du}{Dt} \cdot n \quad (16)$$

根据无滑移边界条件,式(16)右边物质导数等于物面上物质点的加速度。因此,物面上有

$$\left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_W = -\left(\frac{dV}{dt} \right)_W \cdot n = -\left(\frac{dV_n}{dt} \right)_W \quad (17)$$

式中:V为已知的物体运动速度矢量, V_n 为其法向分量。从式(12,13,17)解得

$$c_1 = \frac{1}{2n_P} \left(\left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_P + \left(\frac{dV_n}{dt} \right)_P \right), c_2 = -\left(\frac{dV_n}{dt} \right)_W,$$

$$c_3 = p_P - \frac{n_P}{2} \left(\left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_P - \left(\frac{dV_n}{dt} \right)_W \right) \quad (18)$$

进一步,将 $n=n_{IB}$ 代入式(6)可确定 IB 点的压强。

3 数值实验

为验证所发展的有限体积边界嵌入方法的可靠性,本节首先验证其收敛特性,然后进行两组数值实验:第一组针对静止圆柱、圆球的固定物体绕流;第二组针对动边界绕流,包括自由来流中垂直振荡圆柱以及游动的类鱼体。IBM 方法通常采用直角网格。对相同问题,直角网格规模一般要大于常规方法使用的贴体网格。本文使用的三角形网格是通过划分直角网格的四边形单元获得,并从远场到物面进行逐层加密^[10],以有效减小网格规模。

3.1 收敛率验证

为了验证所发展的 IBM 方法的收敛率,这里对动量方程有源项的二维 N-S 方程进行了求解。计算域为 $\Omega \setminus \omega$, 其中 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, ω 为圆心位于 Ω 中心,半径为 0.25 的圆。给定以下精确解^[11]以确定源项和 Dirichlet 边界条件,并进行估算误差

$$\begin{cases} u_1 = 2\pi \sin^2(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \cos(\pi x_2) \\ u_2 = -2\pi \sin^2(\pi x_2) \sin(\pi x_1) \cos(\pi x_1) \\ p = 20x_1^2 x_2 \end{cases} \quad (19)$$

表 1 列出了不同尺度的网格上压强和速度的误差及收敛率。由于 u_1 和 u_2 是对称的,表中仅列出 u_1 的计算结果。可以看出,本文 IBM 方法按 L^1 范数的收敛率约为二阶精度。与常规方法比,空间精度并未下降。

表 1 IBM 方法计算二维 N-S 方程的收敛率

网格尺度	压强 p		速度分量 u_1	
	L^1 误差	阶数	L^1 误差	阶数
2.0×10^{-2}	9.99×10^{-3}		2.56×10^{-3}	
1.0×10^{-2}	2.38×10^{-3}	2.07	6.46×10^{-4}	1.99
5.0×10^{-3}	6.04×10^{-4}	1.98	1.70×10^{-4}	1.93

3.2 固定物体绕流的数值模拟

3.2.1 固定圆柱

在该组数值实验中,计算区域为 $20D \times 20D$ (D 为圆柱直径),圆柱位于域中心,物面边界附近的网格尺度为 $0.012D$,量纲一时间步长取 $\Delta t = 10^{-2}$ 。雷诺数定义为 $Re = \frac{U_\infty D}{\nu}$,其中 ν 为运动粘性系数, U_∞ 为来流速度。

表 2 分别列出了两种定常流动下 ($Re = 20, 40$) 分离泡长度和阻力系数以及非定常流动下 ($Re = 200$) 时均阻力系数 \bar{C}_D 、升力系数幅值 \bar{C}_L 以及 Strouhal 数 ($St = \frac{fD}{U_\infty}$) 的计算结果及与参考文

献结果的比较。显然,本文计算结果与参考文献结果吻合很好。本文结果略优于文献[7]线性插值的计算结果。

表 2 定常绕流分离泡长度和阻力系数及非定常流的均阻力系数、升力系数幅值和 St 数

方法	$Re=20$		$Re=40$		$Re=200$		
	L/D	C_D	L/D	C_D	\bar{C}_D	\bar{C}_L	St
文献[12]	0.91	2.19	2.18	1.62	1.17	0.67	0.202
文献[13]	0.90	2.02	2.25	1.52	1.36	0.64	0.191
文献[14]	0.90	2.04	2.20	1.52	1.30	0.67	0.193
文献[7]	0.89	1.98	2.20	1.49	1.31	0.66	0.192
本文	0.90	2.03	2.21	1.52	1.31	0.67	0.192

3.2.2 固定圆球

模拟了 $Re = 150, 250, 300$ 下的固定圆球绕流,这 3 种情况分别对应的流动现象为定常轴对称、定常非轴对称以及非定常流动^[15]。计算区域为 $15D \times 10D \times 10D$ 。计算网格包含 518 319 个节点,物面边界附近的网格尺度为 $0.015D$ 。球表面由 16 200 个三角形离散,物理时间步长取 $\Delta t = 10^{-2}$ 。

表 3 列出了升阻力系数和 St 数的计算结果以及与参考文献结果的比较。可以看出,本文数值计算结果与参考文献的结果吻合很好。

表 3 固定圆球绕流的升阻力系数和 St 数

方法	$Re=150$		$Re=250$		$Re=300$	
	C_D	C_D	C_L	\bar{C}_D	\bar{C}_L	St
文献[15]	0.90	0.70	0.061	0.656	0.069	0.137
文献[13]		0.70	0.052	0.658	0.068	0.134
文献[16]		0.70	0.059	0.657	0.067	0.134
文献[9]	0.86	0.69	0.058	0.650	0.066	0.131
本文	0.89	0.71	0.058	0.663	0.067	0.130

3.3 动边界流动的数值模拟

3.3.1 垂直来流方向振荡的圆柱

数值模拟针对如下参数进行: $Re = 185, \frac{A}{D} = 0.2, 0.8 \leq \frac{f_e}{f_0} \leq 1.2$,其中 A 为振幅, f_e 为圆柱振荡频率, f_0 为静止圆柱的涡自然脱落频率。计算网格与固定圆柱相同。

图 3 给出了振荡圆柱物面附近流场网格及动态变化时边界嵌入点的变化。振荡圆柱此时向上运动,虚线表示 t_0 时刻的圆柱位置,实线表示 $t_0 + \Delta t$ 时刻的圆柱位置。以网格点 A, B 为例,在 t_0 时刻 A 点为 IB 点, B 点为流场内部计算点;在 $t_0 + \Delta t$ 时刻 A 点变为流场外部点(不参与计算), B 点则变为 IB 点。

图 4(a)显示了阻力系数的时均值 \bar{C}_D 、升力和

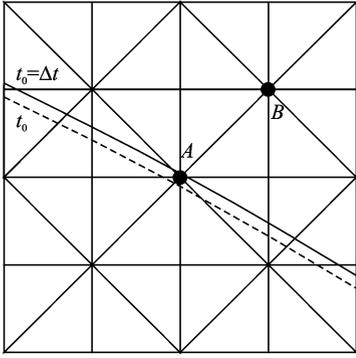
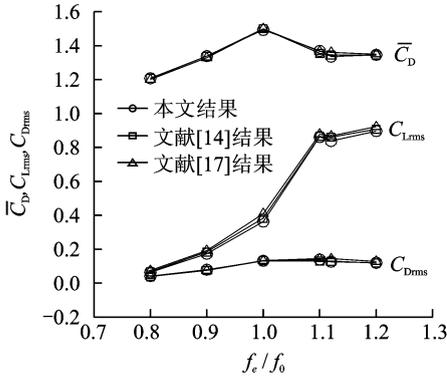
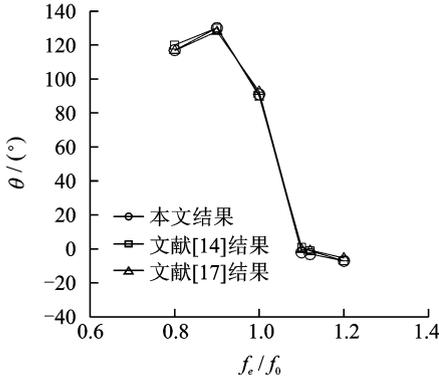


图3 物面附近流场网格及动态变化时边界嵌入点的变化(局部图)



(a) 阻力系数时均值、阻力和升力系数的均方根值



(b) 升力和垂直位移的相位差

图4 力和相位差随 f_e/f_0 的变化

阻力系数的均方根值 C_{Lrms} , C_{Drms} 随 f_e/f_0 的变化。图

4(b)显示了升力系数和垂直位移之间相位差 θ 随 f_e/f_0 比值的变化。通过比较可以看出,本文计算结果与文献[14,17]的计算结果吻合很好。

3.3.2 类鱼体游动的数值模拟

这里模拟了以轴向速度 U 沿直线匀速运动和以频率 f 沿纵向波动的长度为 L 的柔性类鱼体引起的流动。图5给出了类鱼体的三维几何形状及

表面网格。考虑到本文研究的重点,鱼体模型中只保留了鱼身和尾鳍部分。类鱼体游动的运动规律为^[18]

$$h(x_1, t) = a(x_1) \sin 2\pi(x_1/\lambda - ft) \quad (20)$$

式中: h 为鱼体的纵向位移; x_1 为从头部量起的轴(流)向距离; $a(x_1)$ 为按非线性规律变化的波动幅度,表达式见文献[9];量纲一化波长 λ 为 0.95; f 为与 St 数相关的尾部摆动频率, $St = \frac{2fh_{max}}{U}$ (尾部最大纵向偏移 $h_{max} = 0.1$)。

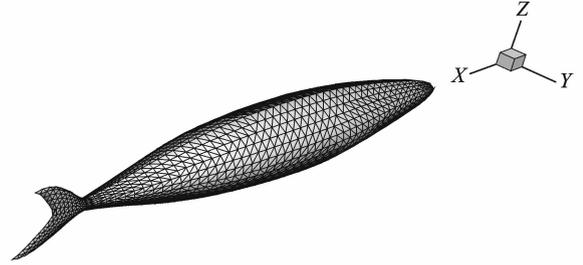


图5 鲭鱼的三维视图^[18]

计算域为 $8L \times 3L \times 2L$, 计算网格包含 772 172 个节点和 4 550 644 个四面体单元。物面附近的网格尺度是 $0.008L$ 。物理时间步长 $\Delta t = \frac{T}{500}$ 。

定义推力系数 $C_F = \frac{F(t)}{\rho} U^2 L^2$, 其中 $F(t)$ 为作用于鱼体的游动方向的瞬时力。以下给出的 C_F 值均已除过相同雷诺数下刚性鱼体 ($St = 0$) 的相应值。图6显示了 $Re = 4\ 000$ 时各种 St 数下的 C_F 随时间的变化。从图6可以看出本文计算结果与文献[9]的 DFD 计算结果非常相近,与文献[18] Borazjani 等人的 HCIB 计算结果相比则更加光滑。图7给出了 $Re = 300$ 和 4 000 时推力系数时均值 \bar{C}_F 随 St 数的变化。可以看出, St 较小时鱼体受阻力作用 ($\bar{C}_F < 0$), 且随着 St 增加阻力逐渐减小; 当 St 达到临界值时鱼体进入稳定巡游状态 ($\bar{C}_F = 0$); St 继续增加, 鱼体受推力作用 ($\bar{C}_F > 0$), 推力随 St 增加而增大。从图6和图7可以看出本文计算结果与 DFD 方法^[9] 的计算结果吻合较好。雷诺数较大时, 网格对计算结果影响较大。本文使用的计算网格比文献[18]稀许多, 因此图6中 $Re = 4\ 000$ 时本文结果与文献[18]的结果的差别略大, 而 $Re = 300$ 时则吻合很好。

图8显示了不同的 Re 和 St 数下中间平面 ($x_3 = 0$) 内的瞬时速度场和涡量场。图8(a)的涡结构呈阻力型的单列规则的卡门涡街。图8(b)中, 涡

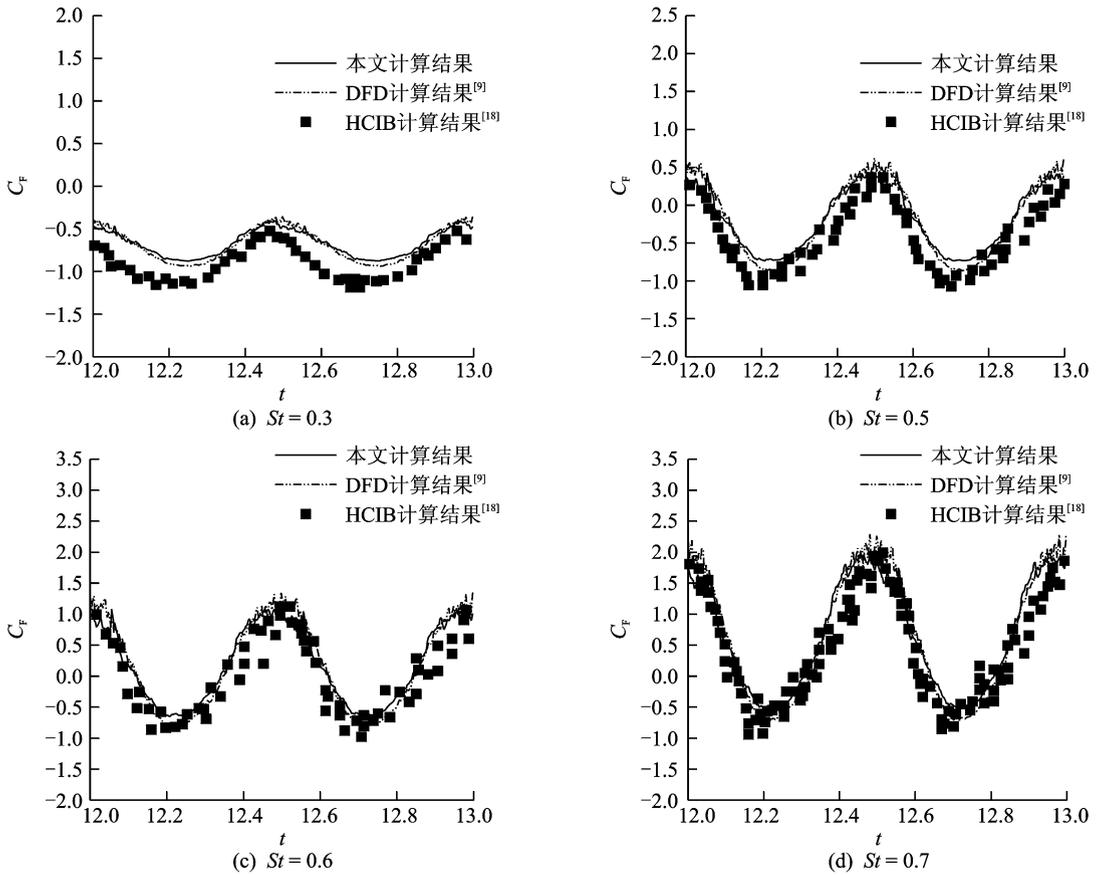


图 6 $Re=4\ 000$ 时不同 St 数下瞬时力系数随时间的变化

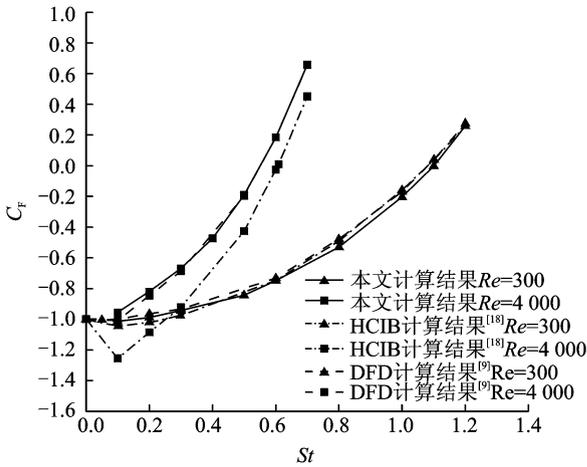


图 7 时均力系数随 St 数的变化

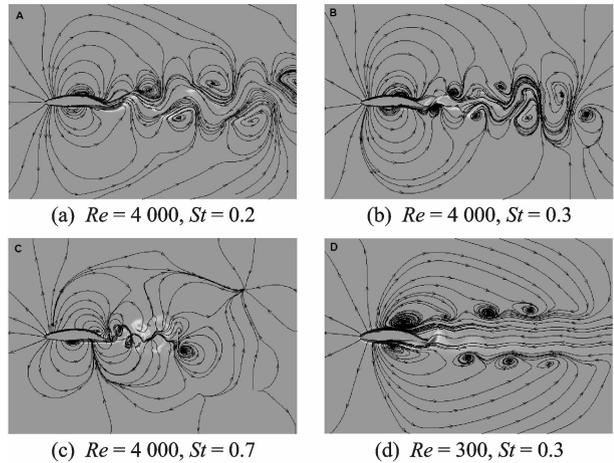


图 8 中间平面内瞬时流线和涡量图

结构也呈单列阻力型但显得有些无序。图 8(c)中, 涡结构呈推力型的双列反向卡门涡街。图 8(d)呈单列阻力型, 但较图 8(b)有序。通过观察发现: 在 Re 数相同时, 低 St 数下涡结构呈现单列涡街而高 St 数下呈现双列涡街。这是因为在高 St 数下, 尾部会产生较大的纵向速度分量从而使涡朝着远离中心线的纵向脱落进而形成双列涡街。物面附近的流线图与 DFD 方法^[9]及 HCIB 方法^[18]的结果也非常相似。

4 结束语

本文发展了一种不可压 N-S 方程的有限体积边界嵌入解法, 并将之推广到求解三维复杂几何外形的动边界绕流问题。通过基于物面法向的二次多项式近似的内插确定了边界嵌入点上的流动变量, 在此过程中无滑移边界条件获得满足。数值计算中, 所有网格点分为解域内部的计算点和边界嵌

入点以及不参与计算的解域外点。进行动边界流动模拟时,网格可以是固定不变的,只有节点性质发生变化;无需进行网格的实时更新,计算效率获得了提高。此外,该方法具有适用于非结构网格、无需处理多值点、易于程序实现等特点。

针对圆柱、圆球等静止物体和自由来流中垂直振荡圆柱、游动的类鱼体等运动物体的数值实验有效地验证了本文所发展的有限体积边界嵌入方法的可靠性,展现了其在动边界流动数值模拟方面的应用前景。

大雷诺数湍流的附面层非常薄,要求壁面附近网格的法向尺度很小。由于IBM方法使用各向同性网格,无法对网格的单一方向进行加密,该方法模拟大雷诺数湍流的网格的规模将很大。今后,作者将进行更加深入的研究,以将本文所发展的IBM方法应用到大雷诺数动边界湍流的数值模拟中。

参考文献:

- [1] Peskin C S. Flow patterns around heart valves: A numerical method [J]. *Journal of Computational Physics*, 1972, 10(2): 220-252.
- [2] Peskin C S, McQueen D M. A three-dimensional computational method for flood flows in the heart: I. Immersed elastic fibers in a viscous incompressible fluid[J]. *Journal of Computational Physics*, 1989, 81(2): 372-405.
- [3] Peskin C S, McQueen D M. Cardiac fluid dynamics [J]. *Critical Reviews in Biomedical Engineering*, 1992, 20(5/6): 451-459.
- [4] Fadlun E A, Verzicco R, Mohd-Yusof J, et al. Combined immersed boundaries/finite-difference methods for three-dimensional complex flow simulations[J]. *Journal of Computational Physics*, 2000, 161(1):35-60.
- [5] Gilmanov A, Sotiropoulos F. A hybrid Cartesian/immersed boundary method for simulating flows with 3D, geometrically complex, moving bodies[J]. *Journal of Computational Physics*, 2005, 207(2): 457-492.
- [6] Zhou Chunhua, Shu Chang, Wu Yizhao. Extension of domain-free discretization method to simulate compressible flows over fixed and moving bodies [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2007, 53(2):176-199.
- [7] 方安石. 一种有限体积边界嵌入法的研究及应用[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2011.
- [8] Belov A, Martinelli L, Jameson A. A new implicit algorithm with multigrid for unsteady incompressible flow calculations[C]//33rd Aerospace Science Meeting and Exhibit, Reno NV: AIAA, 1995:9-12.
- [9] Zhou Chunhua, Shu Chang. Extension of local domain-free discretization method to simulate 3-D flows with complex moving boundaries [J]. *Computers & Fluids*, 2012, 64(15): 98-107.
- [10] Zhou Chunhua, Shu Chang. A local domain-free discretization method to simulate three-dimensional compressible inviscid flows [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*,2009, 61(9): 970-986.
- [11] Frutos J D, Bosco G A. A posteriori error estimations for mixed finite-element approximations to the Navier-Stokes equations [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2011, 236: 1103-1122.
- [12] Calhoun D. A Cartesian grid method for solving the two-dimensional stream function-vorticity equations in irregular region [J]. *Journal of Computational Physics*, 2002, 176: 231-275.
- [13] Choi J I, Oberoi R C, Edwards J R, et al. An immersed boundary method for complex incompressible flows[J]. *Journal of Computational Physics*, 2007, 224(2): 757-784.
- [14] Zhou Chunhua, Shu Chang. A local domain-free discretization method for simulation of incompressible flows over moving bodies [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*,2011, 66(2): 162-182.
- [15] Johnson T A, Patel V C. Flow past a sphere up to a Reynolds number of 300 [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1999, 378: 19-70.
- [16] Kim J, Kim D, Choi H. An immersed boundary finite volume method for simulations of flow in complex geometries[J]. *Journal of Computational Physics*, 2001, 171(1): 132-150.
- [17] Guilmineau E, Queutey P. A numerical simulation of vortex shedding from an oscillating cylinder [J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2002, 16(6): 773-794.
- [18] Borazjani I, Sotiropoulos F. Numerical investigation of the hydrodynamics of carangiform swimming in the transitional and inertial flow regimes [J]. *The Journal of Experimental Biology*, 2008, 211: 1541-1558.

