离散广义 Markov 跳变系统的镇定性

常 华[1] 方洋旺[2] 楼顺天[1]
(1. 西安电子科技大学电子工程学院，西安，710071；2. 空军工程大学工程学院，西安，710038)

摘要：针对转移概率部分未知情况下的离散时间广义 Markov 跳变系统，研究了系统的稳定性和镇定性。转移概率部分未知的情况包含了转移概率完全已知和完全未知两种特殊情况，具有更广泛的实际意义。首先利用线性矩阵不等式方法，将离散 Markov 跳变系统的结论推广到离散广义 Markov 跳变系统，提出了使开环系统随机稳定的充分条件；在此基础上，进一步提出了闭环系统可镇定的判据，并表示为线性矩阵不等式形式；最后，通过仿真算例验证了所提方法的有效性。

关键词：广义系统；Markov 跳变系统；镇定性；线性矩阵不等式；转移概率

中图分类号：TP13；TP273 **文献标识码**：A **文章编号**：1005-2615(2012)01-0065-05

Stabilization of Discrete-Time Singular Markov Jump Systems

Chang Hua[1], *Fang Yangwang*[2], *Lou Shuntian*[1]
(1. School of Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an, 710071, China;
2. Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an, 710038, China)

Abstract: The problems of stability and stabilization are investigated for a kind of discrete-time singular Markov jump systems with partly unknown transition probabilities. Including two special cases of completely known and completely unknown transition probabilities, the proposed systems with partly unknown transition probabilities are more practical. A sufficient condition for stochastic stability of open-loop discrete-time singular Markov jump systems is derived from the results of discrete-time Markov jump systems by employing linear matrix inequality technique. Moreover, a criterion for feedback stabilization of closed-loop systems is proposed in terms of a set of linear matrix inequalities. Finally, a numerical example is given to illustrate the validity of the proposed results.

Key words: singular systems; Markov jump systems; stabilization; linear matrix inequality; transition probabilities

广义系统是一类更具广泛形式的动力学系统，描述了一类更为广泛的实际系统模型，例如电力系统、经济系统、机器人系统、电子网络系统和宇航系统等，对它的研究具有重要的理论意义和应用价值。自从 1989 年 Dai 出版专著[1]以来，广义系统的研究得到了全面的发展。近年来更是向着复杂化的方向不断发展[2-3]。

同时，人们通过大量的研究发现，在工程实际问题中存在着大量的动力学系统，由于随机突变现象引起系统的跳变，诸如互联子系统的变化，环境条件等的突变、系统元件的故障、参数的改变等，而这种随机变化的规律通常遵循 Markov 过程的变化规律[4-6]。具有上述特征的系统，一般来讲既包含了连续的系统状态，又包含了跳变的结构状态，故此类系统又称为随机跳变系统。

近年来，将两者结合起来的广义 Markov 跳变系统成为了控制领域的一大研究热点[7-8]。其中，Boukas 分别针对连续系统[9]和离散系统[10]对其稳

基金项目：国家自然科学基金(60674040)资助项目。
收稿日期：2010-11-04；**修订日期**：2011-07-08
通讯作者：楼顺天，男，教授，博士生导师，E-mail：shtlou@mail.xidian.edu.cn。

定性和镇定性进行了研究。

现有文献的结论主要建立在系统模式跳变的转移概率完全已知的条件下,但是实际中,往往由于可行性、试验复杂度和成本过高等原因,不能获得 Markov 跳变系统的全部转移概率。这种情况更符合工程实际,因此,对转移概率部分未知的广义 Markov 跳变系统的研究具有更广泛的理论和现实意义。文献[11,12]分别研究了转移概率部分未知情况下 Markov 跳变系统的稳定性、镇定控制和 H_∞ 滤波。文献[13]充分利用未知信息,提出了一种新的方法,解决了转移概率部分未知情况下的离散 Markov 跳变系统的 H_∞ 控制问题。然而,广义系统具有非因果特性,Markov 跳变系统的结论不能直接应用到广义系统,因此,广义 Markov 跳变系统的研究具有更大的难度。目前还很少见到转移概率部分未知条件下的广义 Markov 跳变系统的相关研究。

本文针对转移概率部分未知情况下的广义 Markov 跳变系统,利用线性矩阵不等式方法,将 Markov 跳变系统的结果推广到广义 Markov 跳变系统,提出并推导了适用于转移概率部分未知条件下的离散广义 Markov 跳变系统的稳定性判定定理。在此基础上,设计了系统的状态反馈控制器,使闭环系统随机稳定,实现了系统的镇定性。通过仿真算例,验证了所提方法的有效性。

1 系统描述

定义在给定概率空间$(\Omega,\boldsymbol{F},\boldsymbol{P})$上的离散时间、离散状态 Markov 链$\{r_k,k\geqslant 0\}$,在有限集合 $\boldsymbol{S}=\{1,2,\cdots,N\}$中取值。

其状态转移概率为:$\Pr(r_{k+1}=j\,|\,r_k=i)=\pi_{ij}$,$\forall\ i,j\in\boldsymbol{S}$,满足 $\pi_{ij}\geqslant 0$,$\forall\ i,j\in\boldsymbol{S}$ 且 $\sum_{j\in S}\pi_{ij}=1$,$\forall\ i\in\boldsymbol{S}$。于是可得状态转移概率矩阵

$$\pi=\begin{bmatrix}\pi_{11} & \pi_{12} & \cdots & \pi_{1N}\\ \pi_{21} & \pi_{22} & \cdots & \pi_{2N}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \pi_{N1} & \pi_{N2} & \cdots & \pi_{NN}\end{bmatrix} \tag{1}$$

本文针对转移概率部分未知条件,研究状态转移概率矩阵(1)中部分元素未知的情况。为此给出如下定义

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}_K^i\cup\boldsymbol{S}_{UK}^i\quad\forall\ i\in\boldsymbol{S} \tag{2}$$

式中:$\boldsymbol{S}_K^i=\{j:\pi_{ij}\text{已知}\}$,$\boldsymbol{S}_{UK}^i=\{j:\pi_{ij}\text{未知}\}$。进一步可以给出如下定义

$$\boldsymbol{S}_K^i=(K_1^i,\cdots,K_m^i)\quad\forall\ 1\leqslant m\leqslant N \tag{3}$$

式中:$K_m^i\in\boldsymbol{N}^+$表示条件(1)中第 i 行的第 m 个已知元素的下标,其值为 m。

考虑如下离散广义 Markov 线性跳变系统:

$$\boldsymbol{E}(r_k)\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}(r_k)\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}(r_k)\boldsymbol{u}(k) \tag{4}$$

式中:$\boldsymbol{x}(k)$表示状态矢量;$\boldsymbol{u}(k)$表示控制输入;跳变过程$\{r_k,k\geqslant 0\}$,控制不同系统模态之间的切换;矩阵 $\boldsymbol{A}(r_k)$,$\boldsymbol{B}(r_k)$为适当维数的已知实矩阵,当 $r_k=i$,$i\in\boldsymbol{S}$ 时,可简记为 $\boldsymbol{A}(i)$,$\boldsymbol{B}(i)$;$\boldsymbol{E}(i)\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$为已知奇异矩阵,满足 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{E}(i))=r\leqslant n$,$\forall\ i\in\boldsymbol{S}$,通常取 $r<n$ 作为广义系统的特征。

当 $\boldsymbol{u}(k)=\boldsymbol{0}$ 时,系统(1)简化为如下自治系统

$$\boldsymbol{E}(r_k)\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}(r_k)\boldsymbol{x}(k) \tag{5}$$

本文的目的是:在转移概率部分未知条件下,提出自治系统(5)的随机稳定性条件,并针对系统(4)设计状态反馈控制器,使相应的闭环系统随机稳定,实现系统(4)的镇定。假设系统状态完全可测,状态反馈控制器形式如下

$$\boldsymbol{u}(k)=\boldsymbol{K}(r_k)\boldsymbol{x}(k) \tag{6}$$

为实现以上目的,首先介绍本文证明将要用到的有关引理。

引理 1[14](舒尔补 Schur complement) 线性矩阵不等式$\begin{bmatrix}\boldsymbol{H} & \boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{R}\end{bmatrix}>\boldsymbol{0}$,等价于 $\boldsymbol{H}>\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{R}-\boldsymbol{Z}\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}>\boldsymbol{0}$,其中,$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$。

引理 2[10] 设 $\boldsymbol{H}$,$\boldsymbol{F}$,$\boldsymbol{G}$ 分别为适当维数的实矩阵,且 $\boldsymbol{F}$ 满足对称正定,即 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}>\boldsymbol{0}$,那么,给定任意标量 ε,下式成立

$$-\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{G}\boldsymbol{H}\leqslant\varepsilon\boldsymbol{G}\boldsymbol{H}+\varepsilon\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}+\varepsilon^2\boldsymbol{F}$$

引理 3[8] 如果存在一组对称非奇异矩阵 $\boldsymbol{P}(i)$,使得$\forall\ i\in\boldsymbol{S}$,下式成立

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(i)\Big[\sum_{j\in S}\pi_{ij}\boldsymbol{P}(j)\Big]\boldsymbol{A}(i)-\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(i)\boldsymbol{P}(i)\boldsymbol{E}(i)<\boldsymbol{0} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(i)\boldsymbol{P}(i)\boldsymbol{E}(i)\geqslant\boldsymbol{0} \tag{8}$$

则系统(5)正则、因果,且随机稳定。

2 稳定性分析

现有文献针对离散广义 Markov 跳变系统(4)的主要结论,都是建立在转移概率矩阵完全已知的前提下得出的。然而实际情况中,往往不能得到转移概率矩阵的全部信息,因此,研究转移概率部分未知条件下离散广义 Markov 跳变系统的稳定性更符合实际情况。

下面首先针对转移概率部分未知条件下离散广义 Markov 跳变系统的自治系统(5),研究开环稳定性条件。

定理 1　满足转移概率部分未知条件(2)的自治系统(5),如果存在一组对称非奇异矩阵 $\boldsymbol{P}(i)$,使得$\forall\ i\in\boldsymbol{S}$,下式成立

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(i)\boldsymbol{P}_K^i\boldsymbol{A}(i)-\pi_K^i\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(i)\boldsymbol{P}(i)\boldsymbol{E}(i)<\boldsymbol{0}\tag{9}$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(i)\boldsymbol{P}(j)\boldsymbol{A}(i)-\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(i)\boldsymbol{P}(i)\boldsymbol{E}(i)<\boldsymbol{0}\quad\forall\ j\in\boldsymbol{S}_{UK}^i\tag{10}$$

式中:$\boldsymbol{P}_K^i=\sum\limits_{j\in\boldsymbol{s}_K^i}\pi_{ij}\boldsymbol{P}(j)$,$\pi_K^i=\sum\limits_{j\in\boldsymbol{s}_K^i}\pi_{ij}$,且满足限制条件 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(i)\boldsymbol{P}(i)\boldsymbol{E}(i)\geqslant\boldsymbol{0}$,则自治系统(5)正则、因果,且随机稳定。

证明:考虑自治系统(5)满足转移概率部分未知条件(2),所以条件式(7)的左边等价变换为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Psi}_i\triangleq&\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(i)\Big[\sum_{j\in\boldsymbol{S}}\pi_{ij}\boldsymbol{P}(j)\Big]\boldsymbol{A}(i)-\\&\Big(\sum_{j\in\boldsymbol{S}}\pi_{ij}\Big)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(i)\boldsymbol{P}(i)\boldsymbol{E}(i)=\\&\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(i)\Big[\Big(\sum_{j\in\boldsymbol{s}_K^i}\pi_{ij}+\sum_{j\in\boldsymbol{s}_{UK}^i}\pi_{ij}\Big)\boldsymbol{P}(j)\Big]\boldsymbol{A}(i)-\\&\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(i)\Big[\Big(\sum_{j\in\boldsymbol{s}_K^i}\pi_{ij}+\sum_{j\in\boldsymbol{s}_{UK}^i}\pi_{ij}\Big)\boldsymbol{P}(i)\Big]\boldsymbol{E}(i)=\\&\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(i)\Big[\sum_{j\in\boldsymbol{s}_K^i}\pi_{ij}\boldsymbol{P}(j)\Big]\boldsymbol{A}(i)-\\&\Big(\sum_{j\in\boldsymbol{s}_K^i}\pi_{ij}\Big)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(i)\boldsymbol{P}(i)\boldsymbol{E}(i)+\\&\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(i)\Big[\sum_{j\in\boldsymbol{s}_{UK}^i}\pi_{ij}\boldsymbol{P}(j)\Big]\boldsymbol{A}(i)-\\&\Big(\sum_{j\in\boldsymbol{s}_{UK}^i}\pi_{ij}\Big)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(i)\boldsymbol{P}(i)\boldsymbol{E}(i)=\\&\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(i)\boldsymbol{P}_K^i\boldsymbol{A}(i)-\pi_K^i\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(i)\boldsymbol{P}(i)\boldsymbol{E}(i)+\\&\sum_{j\in\boldsymbol{s}_{UK}^i}\pi_{ij}\big[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(i)\boldsymbol{P}(j)\boldsymbol{A}(i)-\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(i)\boldsymbol{P}(i)\boldsymbol{E}(i)\big]\end{aligned}$$

因为 $\pi_{ij}\geqslant 0$,$\forall\ i,j\in\boldsymbol{S}$,所以当条件(9)和(10)同时满足时,$\boldsymbol{\Psi}_i<\boldsymbol{0}$,结合条件(8),由引理 3 可知,满足转移概率部分未知条件(2)的自治系统(5)正则、因果,且随机稳定。定理得证。

注 1:定理 1 提出的稳定性判定方法,包含了系统模态转移概率完全已知和完全未知两种特殊情况。当系统模态转移概率完全已知时,定理 1 转变为引理 3 的形式;当系统模态转移概率完全未知时,定理 1 的判定方法适用于完全随机开关系统。因此,定理 1 提出的方法具有更广泛的理论意义和实用价值。

3　镇定性研究

将状态反馈控制器(6)代入系统(4),得闭环系统

$$\boldsymbol{E}(r_k)\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}_{cl}(r_k)\boldsymbol{x}(k)\tag{11}$$

式中 $\boldsymbol{A}_{cl}(r_k)=\boldsymbol{A}(r_k)+\boldsymbol{B}(r_k)\boldsymbol{K}(r_k)$。

下面针对非自治系统(4),基于定理 1,设计状态反馈控制器(6),使闭环系统(11)正则、因果,且随机稳定。

定理 2　考虑满足转移概率部分未知条件(2)的标称系统(4),如果给定任意两组标量 $\varepsilon(i)$ 和 $\beta(i)$,存在一组对称正定矩阵 $\boldsymbol{X}(i)$ 和一组适当维数矩阵 $\boldsymbol{Y}(i)$,使得$\forall\ i\in\boldsymbol{S}$,下式成立

$$\begin{bmatrix}-\boldsymbol{\Xi}_K^i & \boldsymbol{\Psi}_K^i\,\widetilde{\boldsymbol{A}(i)}\\ * & \pi_K^i\,\boldsymbol{\Phi}(i)\end{bmatrix}<\boldsymbol{0}\tag{12}$$

$$\begin{bmatrix}-\boldsymbol{X}(j) & \widetilde{\boldsymbol{A}(i)}\\ * & \boldsymbol{\Phi}(i)\end{bmatrix}<\boldsymbol{0}\quad\forall\ j\in\boldsymbol{S}_{UK}^i\tag{13}$$

$$\beta(i)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(i)+\beta(i)\boldsymbol{E}(i)+\beta^2(i)\boldsymbol{X}(i)\leqslant\boldsymbol{0}\tag{14}$$

式中:$\widetilde{\boldsymbol{A}(i)}=\boldsymbol{A}(i)\boldsymbol{X}(i)+\boldsymbol{B}(i)\boldsymbol{Y}(i)$;

$\boldsymbol{\Psi}_K^i=\big[\sqrt{\pi_{iK_1^i}}\boldsymbol{I},\cdots,\sqrt{\pi_{iK_m^i}}\boldsymbol{I}\big]^{\mathrm{T}}$;

$\boldsymbol{\Phi}(i)=\varepsilon(i)\boldsymbol{X}(i)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(i)+\varepsilon(i)\boldsymbol{E}(i)\boldsymbol{X}(i)+\varepsilon^2(i)\boldsymbol{X}(i)$;

$\boldsymbol{\Xi}_K^i=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{X}(K_1^i),\cdots,\boldsymbol{X}(K_m^i)\}$,$K_1^i,\cdots,K_m^i$ 见式(3)。

则存在状态反馈控制器(6),使得闭环系统(11)正则、因果,且随机稳定。进一步,如果式(12~14)有解,则状态反馈控制器(6)的增益由下式给出

$$\boldsymbol{K}(i)=\boldsymbol{Y}(i)\boldsymbol{X}(i)^{-1}\tag{15}$$

证明:针对闭环系统(11),条件(9,10)中的 $\boldsymbol{A}(i)$ 取 $\boldsymbol{A}_{cl}(i)=\boldsymbol{A}(i)+\boldsymbol{B}(i)\boldsymbol{K}(i)$,由定理 1 可知,式(9,10)同时满足,则闭环系统(11)正则、因果,且随机稳定。

由引理 1 可知,式(9,10)分别等价于

$$\begin{bmatrix}-\boldsymbol{P}(K_1^i) & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \sqrt{\pi_{iK_1^i}}\boldsymbol{P}(K_1^i)\boldsymbol{A}_{cl}(i)\\ * & -\boldsymbol{P}(K_2^i) & \cdots & \vdots & \sqrt{\pi_{iK_2^i}}\boldsymbol{P}(K_2^i)\boldsymbol{A}_{cl}(i)\\ * & * & \ddots & \boldsymbol{0} & \vdots\\ * & * & * & -\boldsymbol{P}(K_m^i) & \sqrt{\pi_{iK_m^i}}\boldsymbol{P}(K_m^i)\boldsymbol{A}_{cl}(i)\\ * & * & * & * & -\pi_K^i\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(i)\boldsymbol{P}(i)\boldsymbol{E}(i)\end{bmatrix}<\boldsymbol{0}\tag{16}$$

$$\begin{bmatrix}-\boldsymbol{P}(j) & \boldsymbol{P}(j)\boldsymbol{A}_{cl}(i)\\ * & -\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(i)\boldsymbol{P}(i)\boldsymbol{E}(i)\end{bmatrix}<\boldsymbol{0}\tag{17}$$

式中 $\boldsymbol{A}_{cl}(i)=\boldsymbol{A}(i)+\boldsymbol{B}(i)\boldsymbol{K}(i)$。

定义 $\boldsymbol{X}(i)=\boldsymbol{P}^{-1}(i)$,对式(16)两边分别左乘和右乘 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{X}(K_1^i),\cdots,\boldsymbol{X}(K_m^i),\boldsymbol{X}(i)\}$,令 $\boldsymbol{Y}(i)=\boldsymbol{K}(i)\boldsymbol{X}(i)$,可得

$$\begin{bmatrix} -\Xi_K^i & \Psi_K^i[\boldsymbol{A}(i)\boldsymbol{X}(i)+\boldsymbol{B}(i)\boldsymbol{Y}(i)] \\ * & -\pi_K^i\boldsymbol{X}(i)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(i)\boldsymbol{X}^{-1}(i)\boldsymbol{E}(i)\boldsymbol{X}(i) \end{bmatrix} < \boldsymbol{0} \tag{18}$$

由引理2，给定任意一组标量 $\varepsilon(i)$，可得

$$-\boldsymbol{X}(i)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(i)\boldsymbol{X}^{-1}(i)\boldsymbol{E}(i)\boldsymbol{X}(i) \leqslant \varepsilon(i)\boldsymbol{X}(i)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(i)+ \varepsilon(i)\boldsymbol{E}(i)\boldsymbol{X}(i)+\varepsilon^2(i)\boldsymbol{X}(i) \tag{19}$$

结合 $\pi_{ij}\geqslant 0, \forall\, i,j\in\boldsymbol{S}$ 可知，要使式(18)成立，只要使式(12)成立即可。

定义 $\boldsymbol{X}(i)=\boldsymbol{P}^{-1}(i)$，对式(17)两边分别左乘和右乘 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{X}(j),\boldsymbol{X}(i)\}$，同时令 $\boldsymbol{Y}(i)=\boldsymbol{K}(i)\boldsymbol{X}(i)$，可得

$$\begin{bmatrix} -\boldsymbol{X}(j) & \boldsymbol{A}(i)\boldsymbol{X}(i)+\boldsymbol{B}(i)\boldsymbol{Y}(i) \\ * & -\boldsymbol{X}(i)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(i)\boldsymbol{X}^{-1}(i)\boldsymbol{E}(i)\boldsymbol{X}(i) \end{bmatrix} < \boldsymbol{0} \tag{20}$$

结合式(19)可知，要使式(20)成立，只要使式(13)成立即可。

另有，定理1中所需的限制条件式(8)等价于

$$-\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(i)\boldsymbol{X}^{-1}(i)\boldsymbol{E}(i)\leqslant\boldsymbol{0} \tag{21}$$

任意给定一组标量 $\beta(i)$，由引理2可知

$$-\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(i)\boldsymbol{X}^{-1}(i)\boldsymbol{E}(i)\leqslant\beta(i)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(i)+ \beta(i)\boldsymbol{E}(i)+\beta^2(i)\boldsymbol{X}(i)$$

因此，要使式(21)成立，只要使式(14)成立即可。

综上所述，若式(12～14)成立，则闭环系统(11)正则、因果，且随机稳定。

进一步，若式(12～14)有解，由 $\boldsymbol{Y}(i)=\boldsymbol{K}(i)\boldsymbol{X}(i)$ 可得状态反馈控制器增益为式(15)。定理得证。

注2：由于式(18，20)中含有非线性项，会在数值计算求解中带来困难，所以应用引理2，将非线性项转化为线性项，使条件式转化为标准的线性矩阵不等式形式(12，13)。在定理2的基础上，应用Matlab中的LMI toolbox，通过求解式(12～14)，可以方便地解决转移概率部分未知情况下离散广义Markov跳变系统(4)的镇定问题。

4　数值算例

对于系统(4)，考虑4种模态的情况

$$\boldsymbol{E}(1)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{A}(1)=\begin{bmatrix}2.4&0.6&1\\-0.6&1.2&0\\0.4&-1&1.4\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}(1)=\begin{bmatrix}0.4&0\\0.6&0.8\\0.6&1.4\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{E}(2)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0.6&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}(2)=\begin{bmatrix}1&1.4&2.2\\0.6&1.6&1.4\\0.8&1.4&0.4\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}(2)=\begin{bmatrix}0&-1.2\\-0.4&-1\\0&-0.6\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{E}(3)=\begin{bmatrix}1.5&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}(3)=\begin{bmatrix}0.4&0.8&1.2\\1&0.4&-3\\0.8&0.4&-1.6\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}(3)=\begin{bmatrix}3.2&2.4\\-0.4&0.6\\0.4&0\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{E}(4)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0.5&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}(4)=\begin{bmatrix}-0.8&0.4&0.6\\0.2&1&1.4\\1.2&0.2&-0.4\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}(4)=\begin{bmatrix}-1.6&-0.8\\-1.4&-1.2\\0&-0.2\end{bmatrix}$$

转移概率矩阵为

$$\pi=\begin{bmatrix}0.2&0.2&(0.3)&0.3\\(0.1)&0.4&(0.3)&0.2\\0.2&(0.5)&(0.1)&0.2\\(0.3)&0.3&0.2&0.2\end{bmatrix}$$，其中，括号中的数值表示未知的转移概率。

系统的模态跳变和状态变量的开环、闭环特性分别如图1～3所示。由图2中系统的开环特性可

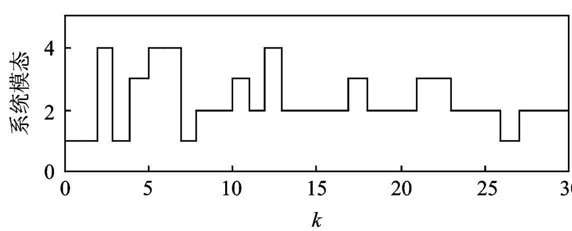

图1　系统的跳变过程

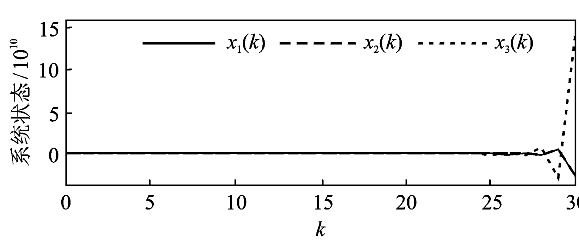

图2　系统状态的开环特性

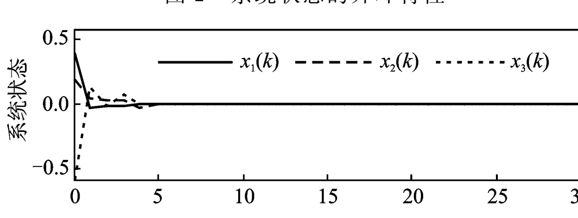

图3　系统状态的闭环特性

以看出,未引入状态反馈控制器前,自治系统是不稳定的。

取 $\varepsilon(1)=1,\varepsilon(2)=0.5,\varepsilon(3)=1,\varepsilon(4)=1$, $\beta(1)=-1,\beta(2)=0.5,\beta(3)=-1,\beta(4)=-1$,利用定理 2,求解线性矩阵不等式(12～14),得状态反馈控制器增益为

$$\boldsymbol{K}(1)=\begin{bmatrix}-4.0171 & -2.8639 & -1.0815\\ 2.3466 & 1.7122 & -0.2840\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}(2)=\begin{bmatrix}-0.8948 & 0.3490 & -0.3395\\ 0.9283 & 1.3908 & 1.6061\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}(3)=\begin{bmatrix}0.3998 & 0.0194 & -1.9434\\ -0.7086 & -0.3633 & 2.1212\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}(4)=\begin{bmatrix}-1.7529 & -0.3667 & -0.0877\\ 2.3528 & 1.2501 & 1.1296\end{bmatrix}$$

给定系统状态变量的初值为 $\boldsymbol{x}(0)=[0.5\quad 0.1\quad -0.6]^{\mathrm{T}}$,得系统状态的闭环响应曲线如图 3 所示。由图 3 中系统的闭环特性可以看出,加入定理 2 设计的状态反馈控制器后,当系统在两种模态之间随机跳变时,闭环系统实现了随机稳定,系统状态迅速收敛,稳定在平衡点 0 附近。因此,定理 2 解决了系统的镇定问题,通过状态反馈控制器,实现了闭环系统的随机稳定。

5　结束语

本文针对转移概率部分未知的情况下的离散广义 Markov 跳变系统,基于线性矩阵不等式方法,推导了其开环稳定性条件,并在此基础上,研究了其闭环反馈可镇定的问题,给出了其闭环反馈可镇定的判据。由于转移概率部分未知的情况更符合实际,因此,本文的结论具有更广泛的理论意义和实用价值。

参考文献:

[1] Dai L. 'Singular control systems' in 'Volume 118 of Lecture Notes in Control and Information Sciences' [M]. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1989.

[2] Lu Renquan, Dai Xiaozhen, Su Hongye, et al. Delay-dependant robust stability and stabilization conditions for a class of lur'e singular time-delay systems [J]. Asian Journal of Control, 2008, 10(4): 462-469.

[3] Ahmad Haidar, Boukas E K. Exponential stability of singular systems with multiple time-varying delays[J]. Automatica, 2009, 45(2): 539-545.

[4] Ma S, Boukas E K, Chinniah Y. Stability and stabilization of discrete-time singular Markov jump systems with time-varing delay[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2010, 20(5): 531-543.

[5] Boukas E K. Stochastic switching systems: Analysis and design[M]. Basel, Berlin: Birkhauser, 2005.

[6] Costa O L V, Fragoso M D, Marques R P. Discrete time Markov jump linear systems [M]. London: Springer-Verlag, 2005.

[7] Boukas E K. 'Control of singular systems with random abrupt changes' in 'Series: Communications and Control Engineering' [M]. Berlin: Springer, 2008.

[8] Xu S, Lam J. Control and filtering of singular systems[M]. Berlin: Springer, 2006.

[9] Boukas E K. On stability and stabilisation of continuous-time singular Markovian switching systems[J]. IET Control Theory and Applications, 2008, 2(10): 884-894.

[10] Boukas E K, Xia Y. Descriptor discrete-time systems with random abrupt changes: stability and stabilisation [J]. International Journal of Control, 2008, 81(8): 1311-1318.

[11] Zhang Lixian, Boukas E K. Stability and stabilization of Markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities [J]. Automatica, 2009, 45(2): 463-468.

[12] Zhang L, Boukas E K. Mode-dependent H_∞ filtering for discrete-time Markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities[J]. Automatica, 2009, 45(6): 1462-1467.

[13] Che W, Wang J. Static output feedback H_∞ control for discrete-time Markov jump linear systems[C]// 2010 8th IEEE International Conference on Control and Automation. Xiamen, China: IEEE, 2010: 2278-2283.

[14] Boyd S, Ghaoui L El, Feron E, et al. Linear matrix inequalities in system and control theory, SIAM studies in applied mathematics [M]. Philadelphia, Pennsylvania: SIAM, 1994.