第44卷第3期 南京航空航天大学学报 Vol. 44 No. 3
2012年6月 Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics Jun. 2012

复合材料层合梁中波的反射与透射特性

孙虎 周丽
(南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室,南京,210016)

摘要:基于Timoshenko梁理论,研究了复合材料层合梁中Lamb波的弥散特性。推导了复合材料层合变截面梁在截面变化处以及含半无限大脱层的复合材料层合梁在脱层尖端处反射与透射特性的解析解,从而揭示了复合材料层合梁内Lamb波各模态相互耦合以及相互转化的特性。根据时间反转理论,提出了变截面梁和含脱层梁两种模型反射与透射矩阵之间存在Stokes关系。通过算例模拟结构中波的传播特性,并与文献中的数值方法进行比较,验证了所得理论解的正确性。

关键词:结构健康监测;Lamb波;复合材料层合梁;反射与透射;Stokes关系
中图分类号:V214.8 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-2615(2012)03-0320-07

Wave Reflection and Transmission in Composite Laminated Beams

Sun Hu, Zhou Li
(State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China)

Abstract: Based on Timoshenko beam theory, dispersion relation of Lamb wave in composite laminated beam with different plies is analyzed. Wave reflection and transmission are studied at the joint of a non-uniform composite laminated beam and at the tip of the delamination in a composite laminated beam containing semi-infinite delamination. It is found that Lamb wave modes are coupled with and converted to each other in composite laminated beams. Based upon time-reversion theory, Stokes relations between reflection and transmission in the above two models are proposed. Compared with the method in the reference, wave propagation in a beam structure by simulation verifies the proposed theory resolution.

Key words: structural health monitoring; Lamb wave; composite laminated beam; reflection and transmission; Stokes relation

复合材料因比强度大、比刚度高、材料性能可设计等优点,在航空航天、土木工程等领域得到了广泛的应用。为了防止事故发生,在线实时监测复合材料结构中的损伤是一项急切而又重要的课题,而Lamb波监测技术是监测损伤的一个快速有效的方法[1-2]。

Lamb波在损伤处不仅发生反射和透射,同时还会出现模态转换等复杂的现象[3-4],因此单单从信号的传播时间,峰值等参数出发,很难准确刻画损伤的具体特征和模式。这就要求直接从结构建模中考虑损伤特性,发展Lamb波在含损伤结构中传播的理论。Wang和Rose研究了各向同性的变截面梁和含脱层梁结构中Lamb波的反射与透射,得到了反射、透射系数矩阵[5]。Yuan等人对含半无限大脱层梁中Lamb波的反射与透射特性进行了解析研究,分别分析了脱层"张开"和"闭合"两种情况下Lamb波的反射和透射系数与入射系数之间的定量关系,同时从能量的角度验证了其满足能量守

基金项目:国家自然科学基金(11172128,61161120323)资助项目;江苏省"六大人才高峰"基金(2010-JZ-004)资助项目;江苏高校优势学科建设工程资助项目。
收稿日期:2011-05-12;**修订日期**:2011-06-30
通讯作者:周丽,女,教授,博士生导师,1963年出生,E-mail:lzhou@nuaa.edu.cn。

恒定律[6-7]。但是，该文只局限在各向同性材料和单层复合材料中，有必要对实际应用中较多的复合材料层合梁中Lamb 波的传播特性作进一步研究。

本文以复合材料层合梁为研究对象，分析变截面梁在截面变化处以及含半无限大脱层梁在脱层尖端处的反射、透射系数与入射系数之间的关系，并根据时间反转法研究反射系数与透射系数之间的关系，为更好地应用Lamb 波监测技术提供参考。

1　复合材料层合梁中波的弥散关系

基于 Timoshenko 梁理论，复合材料层合梁的位移函数可以表示为

$$\begin{aligned} U(x,z,t) &= u(x,t) + z\psi(x,t) \\ W(x,z,t) &= w(x,t) \end{aligned} \tag{1}$$

式中：x 为梁的中心轴；u 为沿 x 轴的轴向位移；ψ 为梁横截面的转角；w 为沿 z 轴的横向位移。

基于 Hamilton 原理，可得复合材料层合梁的波动方程为

$$\begin{cases} I_0\ddot{u}+I_1\ddot{\psi}-A_{11}u_{,xx}-B_{11}\psi_{,xx}=0 \\ I_0\ddot{w}-A_{55}(w_{,xx}+\psi_{,x})=0 \\ I_1\ddot{u}+I_2\ddot{\psi}-B_{11}u_{,xx}-D_{11}\psi_{,xx}+A_{55}(w_{,x}+\psi)=0 \end{cases} \tag{2}$$

力的边界条件为

$$\begin{cases} N = A_{11}u_{,x} + B_{11}\psi_{,x} \\ Q = A_{55}(w_{,x} + \psi) \\ M = B_{11}u_{,x} + D_{11}\psi_{,x} \end{cases} \tag{3}$$

式中：N,Q 和M 分别为复合材料层合梁的轴向力，剪力和弯矩；$A_{55} = \sum_i \int_{z_i}^{z_{i+1}} \kappa^2 \widetilde{C}_{55} b\mathrm{d}z$，$[A_{11}\quad B_{11}\quad D_{11}] = \sum_i \int_{z_i}^{z_{i+1}} \widetilde{C}_{11}[1\quad z\quad z^2] b\mathrm{d}z$，且 $[I_0\quad I_1\quad I_2] = \sum_i \int_{z_i}^{z_{i+1}} \rho[1\quad z\quad z^2] b\mathrm{d}z$，$z_i$ 和 z_{i+1} 分别为第 i 层上下表面的 z 向坐标，$\kappa^2=\pi^2/12$ 为横向剪切校正系数，$\widetilde{C}_{11}$和 $\widetilde{C}_{55}$是平面应力下复合材料的折减刚度[8]，ρ 为梁的密度。

将梁的平面位移波 $[u\quad w\quad \psi] = [U\quad W\quad \Psi]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$（其中 k 为波数，ω 为角频率）代入式(2)，可得

$$\begin{bmatrix} A_{11}k^2-I_0\omega^2 & 0 & B_{11}k^2-I_1\omega^2 \\ 0 & A_{55}k^2-I_0\omega^2 & -iA_{55}k \\ B_{11}k^2-I_1\omega^2 & iA_{55}k & D_{11}k^2-I_2\omega^2+A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0 \\ W_0 \\ \Psi_0 \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \tag{4}$$

令式(4)矩阵行列式为零，得到复合材料层合梁中波的弥散关系为

$$F_1k^6 + F_2k^4 + F_3k^2 + F_4 = 0 \tag{5}$$

式中：$F_1=A_{11}A_{55}D_{11}-A_{55}B_{11}^2$

$F_2=[(B_{11}^2-A_{11}D_{11}-A_{55}D_{11})I_0+2A_{55}B_{11}I_1-A_{11}A_{55}I_2]\omega^2$

$F_3=[D_{11}I_0^2-A_{55}I_1^2+(A_{11}+A_{55})I_0I_2-2B_{11}I_0I_1]\omega^4-A_{11}A_{55}I_0\omega^2$

$F_4=-(I_0^2I_2+I_0I_1^2)\omega^6+A_{55}I_0^2\omega^4$。

式(5)有3 组符号相反的根，分别对应S_0，A_0 和 $A_1$3 种模态。前人研究表明S_0 模态在所有频段均为行波[9]，S_0 模态的波数必为实根，假设 S_0 模态的波数为$\pm\sqrt{\alpha}$，由此可将式(5)的根表示为

$$\begin{cases} k_{1,4}=\pm\sqrt{\alpha} \\ k_{2,5}=\pm\sqrt{-\dfrac{F_2+F_1\alpha}{2F_1}+\sqrt{\left(\dfrac{F_2+F_1\alpha}{2F_1}\right)^2-\dfrac{\alpha(F_2+F_1\alpha)+F_3}{F_1}}} \\ k_{3,6}=\pm\sqrt{-\dfrac{F_2+F_1\alpha}{2F_1}-\sqrt{\left(\dfrac{F_2+F_1\alpha}{2F_1}\right)^2-\dfrac{\alpha(F_2+F_1\alpha)+F_3}{F_1}}} \end{cases} \tag{6}$$

式中：k_1，k_4 为S_0 模态的波数；k_2，k_5 为 A_0 模态的波数；k_3，k_6 为A_1 模态的波数。S_0，A_0 模态在任意频段均为波数为实数的行波，而 A_1 模态在低频段波数为纯虚数，为指数级衰减的近场波，而在频率大于一个截断频率时，波数为实数，则为行波[9]。各种模态波的群速度为$c_{\mathrm{g}}=\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k$。

式(2)的一般解可以写为

$$\begin{cases} u(x,t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{6} R_{1j}\tilde{u}_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_jx} \\ w(x,t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{6} R_{2j}\tilde{u}_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_jx} \\ \psi(x,t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{6} R_{3j}\tilde{u}_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_jx} \end{cases} \tag{7}$$

式中：$j=1$ 和 4 时，$R_{1j}=1$，$R_{3j}=-\dfrac{A_{11}k_j^2-I_0\omega^2}{B_{11}k_j^2-I_1\omega^2}$，$R_{2j}=\dfrac{iA_{55}k_jR_{3j}}{A_{55}k_j^2-I_0\omega^2}$；而 $j=2,3,5,6$ 时，$R_{2j}=1$，$R_{3j}=\dfrac{A_{55}k_j^2-I_0\omega^2}{iA_{55}k_j}$，$R_{1j}=-\dfrac{(B_{11}k_j^2-I_1\omega^2)R_{3j}}{A_{11}k_j^2-I_0\omega^2}$；$[\tilde{u}_1\quad \tilde{u}_2\quad \tilde{u}_3]^{\mathrm{T}}$，$[\tilde{u}_4\quad \tilde{u}_5\quad \tilde{u}_6]^{\mathrm{T}}$ 分别代表入射波与反射波系数。式(7)及下文均省略时间项 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$。

考虑铺层分别为$[0_{10}]$和$[0_5/90_5]$的两根梁中波的弥散特性，材料均为IM7/5250-4 石墨-环氧复合材料（$E_{\mathrm{L}}=168$ GPa，$E_{\mathrm{T}}=9.31$ GPa，$G_{\mathrm{LT}}=$

$5.17\ \mathrm{GPa}$，$G_{\mathrm{TT}}=3.45\ \mathrm{GPa}$，$\nu_{\mathrm{LT}}=0.33$，$\nu_{\mathrm{TT}}=0.33$，$\rho=1\ 610\ \mathrm{kg/m^3}$)，单层厚度1 mm。图1 与图2 分别为波数和群速度随频率的变化曲线，可以看出铺层的变化对只跟横向剪切刚度有关的截断频率没有影响。铺层的不同对 S_0 模态的波数和群速度在数量上以及变化规律上都影响较大，而对 A_0，A_1 模态的影响较小，且在高频段基本没有影响。铺层[0_5/90_5]相对于[0_{10}]而言，S_0 模态群速度由于纵向拉伸刚度减少较多而下降较为明显；而横向剪切刚度不变，A_0，A_1 模态群速度虽略有下降但基本不变。另外，不管铺层如何，3 种模态在高频段的群速度逐渐不随频率变化而改变，而是各自趋向于一个稳定值。

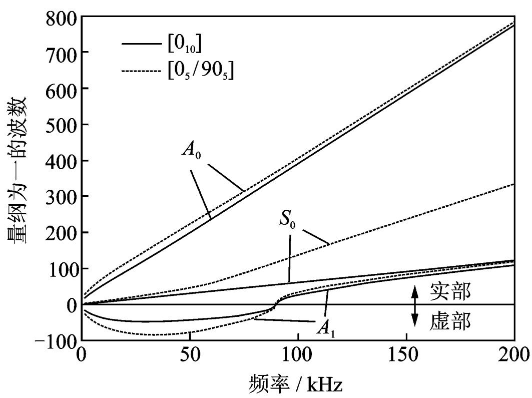

图1　波在铺层不同的梁中的波数

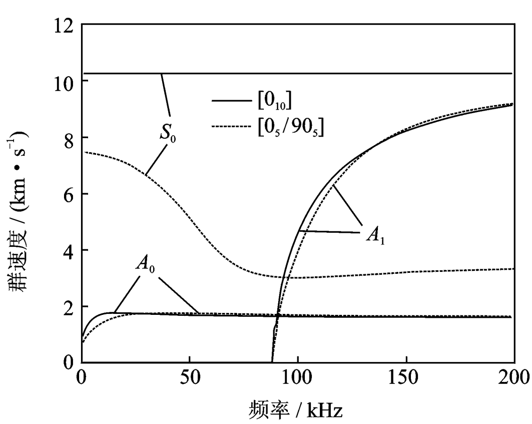

图2　波在铺层不同的梁中的群速度

2　反射与透射矩阵

2.1　变截面梁

考虑如图3所示变截面梁，由式(7)可将 $x<0$ 处位移 $[u_1\quad w_1\quad \psi_1]^{\mathrm{T}}$ 表示为入射波(系数 $[a\quad b\quad c]^{\mathrm{T}}$)与反射波(系数 $[a_{\mathrm{r}}\quad b_{\mathrm{r}}\quad c_{\mathrm{r}}]^{\mathrm{T}}$)的叠加；而 $x>0$ 处位移 $[u_2\quad w_2\quad \psi_2]^{\mathrm{T}}$ 仅是透射波(系数 $[a_{\mathrm{t}}\quad b_{\mathrm{t}}\quad c_{\mathrm{t}}]^{\mathrm{T}}$)。

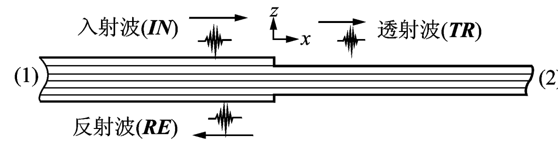

图3　变截面梁中波的反射与透射

在截面变化处($x=0$)，有位移连续性条件以及力的平衡条件为

$$\begin{cases} u_1=u_2, & w_1=w_2, & \psi_1=\psi_2 \\ N_1=N_2, & Q_1=Q_2, & M_1=M_2 \end{cases} \tag{8}$$

由式(3,8)，可以得到

$$\begin{cases} [a_{\mathrm{r}}\quad b_{\mathrm{r}}\quad c_{\mathrm{r}}]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{R}_{3\times 3}[a\quad b\quad c]^{\mathrm{T}} \\ [a_{\mathrm{t}}\quad b_{\mathrm{t}}\quad c_{\mathrm{t}}]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{T}_{3\times 3}[a\quad b\quad c]^{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{9}$$

式中 $\boldsymbol{R}_{3\times 3}$，$\boldsymbol{T}_{3\times 3}$分别为(3×3)的反射与透射矩阵。

考虑图3中减少铺层的变截面梁材料为IM7/5250-4 石墨-环氧复合材料，左边铺层为[0_{10}/90_{10}]，右边铺层为[0_5/90_5]，左右两边单层厚度均为0.5 mm。

图4～6 给出了各阶模态反射和透射系数幅值随频率的变化规律。由图4～6 可以看出在截断频率(90 和180 kHz)附近，反射和透射系数的幅值都发生了突变，而高于截断频率的高频段，反射与透射系数渐渐趋于稳定。梁左右部分截断频率不同，说明截断频率和梁的厚度成反比。

图4，5 表明S_0，A_0 模态向自身模态转换的透射系数 T_{11}，T_{22}远高于其他系数，且向自身模态转换的反射系数R_{11}，R_{22}也高于其他系数；S_0，A_0 模态向 A_1 模态的转换系数 R_{31}，T_{31}和 R_{32}，T_{32}在小于截断频率处数值较大，但是因为是衰减波没有能量传输，而在大于截断频率处快速衰减为零。

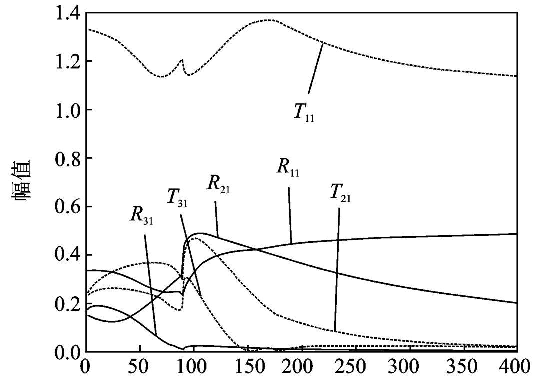

图4　变截面梁 S_0 模态的模态转换系数

图6 显示 A_1 模态反射系数 R_{j3}和透射系数 T_{j3}($j=1,2,3$)在截断频率处变化相当剧烈，主要是因

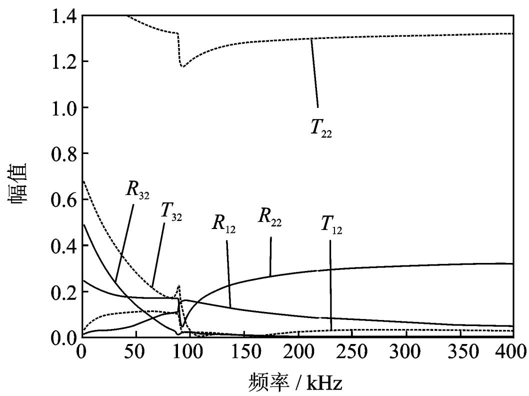

图5　变截面梁 A_0 模态的模态转换系数

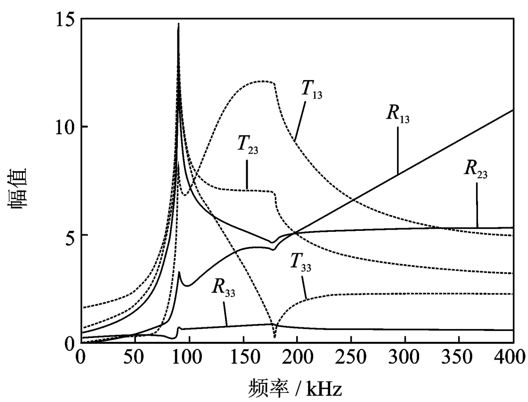

图6　变截面梁 A_1 模态的模态转换系数

为 A_1 模态在截断频率处经历了由衰减波向行波的转换。在频率低于截断频率时,A_1 模态转换系数的变化很大,规律也不明显,然而由于是衰减波,没有能量传输;而在频率大于截断频率时,除了 R_{13},其他的 A_1 模态转换系数均趋向于一个定值,而 R_{13} 则是随着频率变大单调递增,这可以解释为 A_1 模态引起截面弯曲,需要一个大的纵向运动以保持截面变化处的弯曲协调性。

2.2　含半无限大脱层梁

考虑如图7所示一个含半无限大脱层的复合材料层合梁,由式(7)可将 $x<0$ 处位移 $[u_0\quad w_0\quad \psi_0]^{\mathrm{T}}$ 表示为入射波(系数 $[a\quad b\quad c]^{\mathrm{T}}$)与反射波(系数 $[a_{\mathrm{r}}\quad b_{\mathrm{r}}\quad c_{\mathrm{r}}]^{\mathrm{T}}$)的叠加;而 $x>0$ 处为损伤区域,脱层上下区域位移 $[u_1\quad w_1\quad \psi_1]^{\mathrm{T}}$ 和 $[u_2\quad w_2\quad \psi_2]^{\mathrm{T}}$ 都仅是透射波(系数分别为 $[a_{\mathrm{t}}^{(1)}\quad b_{\mathrm{t}}^{(1)}\quad c_{\mathrm{t}}^{(1)}]^{\mathrm{T}}$ 和 $[a_{\mathrm{t}}^{(2)}\quad b_{\mathrm{t}}^{(2)}\quad c_{\mathrm{t}}^{(2)}]^{\mathrm{T}}$)。

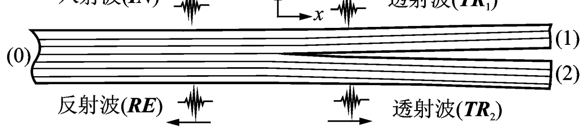

图7　含半无限大脱层梁中波的反射与透射

在脱层尖端处($x=0$),有位移连续性条件以及力的平衡条件为

$$\begin{cases} w_0 = w_1 = w_2,\ \psi_0 = \psi_1 = \psi_2 \\ u_1 = u_0 + h_2\psi_0/2, u_2 = u_0 - h_1\psi_0/2 \\ N_0 = N_1 + N_2,\ Q_0 = Q_1 + Q_2 \\ M_0 = M_1 + M_2 + h_2N_1/2 - h_1N_2/2 \end{cases} \tag{10}$$

式中:h_1,h_2 分别为脱层上下区域的高度。

由式(3,10)可得

$$\begin{cases} [a_{\mathrm{r}}\quad b_{\mathrm{r}}\quad c_{\mathrm{r}}]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{R}_{3\times3}[a\quad b\quad c]^{\mathrm{T}} \\ [a_{\mathrm{t}}^{(1)}\quad b_{\mathrm{t}}^{(1)}\quad c_{\mathrm{t}}^{(1)}]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{T}_{3\times3}^{(1)}[a\quad b\quad c]^{\mathrm{T}} \\ [a_{\mathrm{t}}^{(2)}\quad b_{\mathrm{t}}^{(2)}\quad c_{\mathrm{t}}^{(2)}]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{T}_{3\times3}^{(2)}[a\quad b\quad c]^{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{11}$$

式中:$\boldsymbol{R}_{3\times3}$,$\boldsymbol{T}_{3\times3}^{(1)}$ 和 $\boldsymbol{T}_{3\times3}^{(2)}$ 分别为(3×3)的反射与透射矩阵。

考虑图7含脱层梁材料为IM7/5250-4石墨-环氧复合材料,铺层为$[30_5/60_5]$,每个单层厚度1 mm,梁的右边第7层和第8层之间存在一个半无限大脱层。

图8～10为各模态在脱层尖端处的反射与透射系数幅值随频率的变化,可以看出在3个截断频率(90,128和299 kHz)处反射与透射系数均有突变,在大于截断频率的高频段各系数变化趋于稳定。梁3个部分的截断频率的不同可以看出截断频率的大小和梁的厚度有关,厚度越小,截断频率越大。在频率小于最大截断频率299 kHz时,反射与透射系数的变化随频率变化很大;在大于299 kHz时,反射与透射系数均很快趋于稳定。

图8,9表明 S_0,A_0 模态向自身模态转换的透射系数 $T_{11}^{(1)}$,$T_{11}^{(2)}$ 和 $T_{22}^{(1)}$,$T_{22}^{(2)}$ 较大:$T_{11}^{(1)}$ 和 $T_{22}^{(1)}$,$T_{22}^{(2)}$ 都接近于1;而 $T_{11}^{(2)}$ 虽然在90到128 kHz之间快速下降,但是在高频段随着频率的变大又逐渐上升到较大的值。S_0,A_0 模态向 A_1 模态转换的系数 R_{31},$T_{31}^{(1)}$,$T_{31}^{(2)}$ 和 R_{32},$T_{32}^{(1)}$,$T_{32}^{(2)}$ 在低于截断频率处幅值较大,但是没有能量传输;在高于截断频率处幅值保持在较低水平。S_0 模态在高频段仍然有较多能量转化为其他模态,而 A_0 模态在高频段向其他模态转换的能力较低。

图10表明 A_1 模态在截断频率90 kHz处变化剧烈,因为其在此频率处由衰减波向行波进行转变。A_1 模态转换系数的幅值虽然较大,但是在频率小于截断频率时,A_1 模态是衰减波,没有能量传输;且在频率大于截断频率时,除了向 S_0 模态转换的透射系数 $T_{13}^{(1)}$,$T_{13}^{(2)}$ 外,其他转换系数都很快趋向于一个定值。A_1 模态向 S_0 模态转换的透射系数

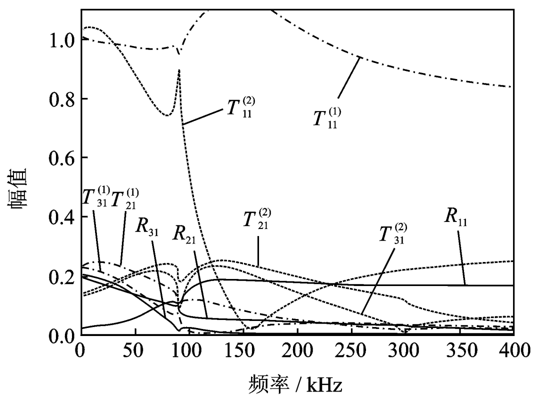

图 8　含脱层梁 S_0 模态的模态转换系数

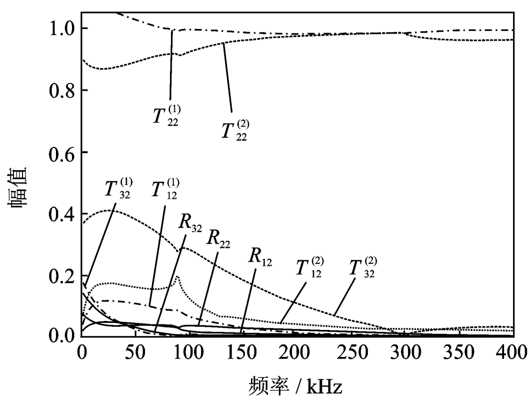

图 9　含脱层梁 A_0 模态的模态转换系数

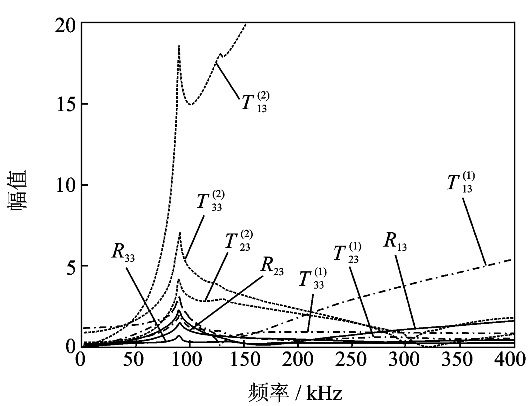

图 10　含脱层梁 A_1 模态的模态转换系数

$T_{13}^{(1)}$，$T_{13}^{(2)}$ 在大于截断频率时随着频率变大持续增大，可以解释为 A_1 模态引起截面弯曲，需要脱层上下区域的梁有大的纵向运动以保持脱层尖端处的弯曲协调性。

3　Stokes 关系

反射波、透射波不仅与入射波有关系，而且其两者自身也有关系，这种关系可以由时间反转算法反映出来。以图3所示变截面梁在截面变化处的反射和透射为例，时间反转算法表明将反射波与透射波经过时间反转，并沿着各自的反方向发射出去，将会重构入射波[10]，见图11(a)。

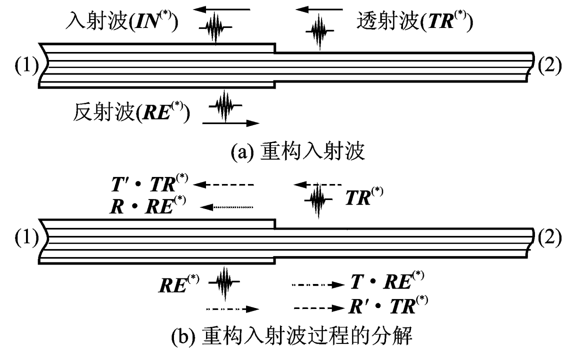

图 11　变截面梁中波的时间反转

将图11(a)过程分解为图11(b)：反射波经过时间反转得到 $\boldsymbol{RE}^{(*)}$ 并将其发送出去，经过反射和透射得到 $\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{RE}^{(*)}$ 和 $\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{RE}^{(*)}$（其中 $(\cdot)^{(*)}$ 为表示将信号时间反转，即在频域内求其共轭复数，而在时域内作变量代换 $(t)\rightarrow(-t)$）；透射波时间反转得 $\boldsymbol{TR}^{(*)}$ 并将其发送出去，经过反射和透射得到 $\boldsymbol{R}'\cdot\boldsymbol{TR}^{(*)}$ 和 $\boldsymbol{T}'\cdot\boldsymbol{TR}^{(*)}$（$\boldsymbol{R}'$ 和 $\boldsymbol{T}'$ 分别为入射波从材料对接处右边入射时的反射矩阵和透射矩阵）。

将图11(b)的两个过程同步并叠加，得到

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{IN}^{(*)}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{T}\end{bmatrix}\boldsymbol{RE}^{(*)}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}'\\ \boldsymbol{R}'\end{bmatrix}\boldsymbol{TR}^{(*)}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{T}\end{bmatrix}\boldsymbol{R}^{(*)}\cdot\boldsymbol{IN}^{(*)}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}'\\ \boldsymbol{R}'\end{bmatrix}\boldsymbol{T}^{(*)}\cdot\boldsymbol{IN}^{(*)}\tag{12}$$

这样，可得变截面梁的Stokes 关系为

$$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}^{(*)}+\boldsymbol{T}'\cdot\boldsymbol{T}^{(*)}=\boldsymbol{I},\quad \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{R}^{(*)}+\boldsymbol{R}'\cdot\boldsymbol{T}^{(*)}=\boldsymbol{0}\tag{13}$$

式(13)反映了反射矩阵和透射矩阵之间的关系。考虑图11中变截面梁材料为IM7/5250-4石墨-环氧复合材料，截面变化处左边铺层为 $[0_{10}/90_{10}]$，右边铺层为 $[0_5/90_5]$，单层厚度为0.5 mm。由式(9)可得 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{T}$，求共轭得 $\boldsymbol{R}^{(*)}$ 和 $\boldsymbol{T}^{(*)}$；相似于式(8)到式(9)的过程，可得 $\boldsymbol{R}'$ 和 $\boldsymbol{T}'$。经过计算显示，对于所有的频率，式(13)均成立。对结构参数进行变化，重复上述过程，同样验证得到式(13)总是成立的。

在含半无限大脱层尖端处的反射与透射，也有类似的Stokes 关系为

$$\begin{cases}\boldsymbol{R}_{3\times3}^{00}\boldsymbol{R}_{3\times3}^{00\,(*)}+\boldsymbol{T}_{3\times3}^{10}\boldsymbol{T}_{3\times3}^{01\,(*)}+\boldsymbol{T}_{3\times3}^{20}\boldsymbol{T}_{3\times3}^{02\,(*)}=\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{T}_{3\times3}^{01}\boldsymbol{R}_{3\times3}^{00\,(*)}+\boldsymbol{R}_{3\times3}^{11}\boldsymbol{T}_{3\times3}^{01\,(*)}+\boldsymbol{R}_{3\times3}^{21}\boldsymbol{T}_{3\times3}^{02\,(*)}=\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{T}_{3\times3}^{02}\boldsymbol{R}_{3\times3}^{00\,(*)}+\boldsymbol{R}_{3\times3}^{12}\boldsymbol{T}_{3\times3}^{01\,(*)}+\boldsymbol{R}_{3\times3}^{22}\boldsymbol{T}_{3\times3}^{02\,(*)}=\boldsymbol{0}\end{cases}\tag{14}$$

式中$(\cdot)^{\alpha\beta}$表示入射波从图 7 中区域α到区域β的反射或透射系数。

4　结果验证

采用文献[11]中的谱有限元法（SFEM）来验证本文解析解的正确性：谱有限元法可以采用半无限大单元来消除边界反射的影响。如图12 所示，考虑一个无限长变截面梁，材料为IM7/5250-4 石墨-环氧复合材料，截面变化处左边铺层为$[0_{10}/90_{10}]$，右边铺层为$[0_5/90_5]$，单层厚度为0.5 mm。在左端加载一个轴向力，其时间历程为中心频率为40 kHz 的五波峰调制波。谱有限元法中，以力的加载点和截面变化处为界，将结构划分为两个半无限大单元和一个有限长单元，频率分辨率为48.828 Hz，采样点数为4 096。

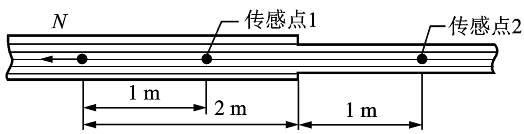

图 12　数值仿真变截面梁中波的传播

用本文解析解求解结构响应：

（1）对时域载荷作快速 Fourier 变换（FFT）转化到频域，并求加载后向右传播的S_0，A_0 模态系数（不考虑在40 kHz 时为衰减波的A_1 模态）。加载点左边只有向左传播的波，右边只有向右传播的波，位移$[u_0 \quad w_0 \quad \psi_0]^{\mathrm{T}}$，$[u_1 \quad w_1 \quad \psi_1]^{\mathrm{T}}$ 分别用入射波系数$[a_- \quad b_- \quad c_-]^{\mathrm{T}}$ 与反射波系数$[a_+ \quad b_+ \quad c_+]^{\mathrm{T}}$ 表示。

加载点的位移连续性条件和力的平衡条件为

$$u_0=u_1,w_0=w_1,\psi_0=\psi_1,N_0-N_1=N,Q_0=Q_1,M_0=M_1 \qquad (15)$$

通过式（3，15），可以由轴向力N 求得S_0，A_0 模态系数a_+，b_+。

（2）S_0，A_0 模态分别传播到截面变化处产生反射和透射，由式（9）求得各自反射、透射生成相应的S_0，A_0 模态波系数，将S_0，A_0 模态波叠加得到位移的频域解，再做逆FFT 得到位移的时域解。

图13 显示传感点1 横向位移的时间历程，解析解是S_0，A_0 模态入射波与其在截面变化处分别发生反射生成相应的S_0，A_0 模态波的叠加。图14 显示传感点2 横向位移的时间历程，解析解是S_0，A_0 模态入射波在截面变化处分别发生透射生成相应的S_0，A_0 模态波的叠加。解析解和谱有限元法的结果

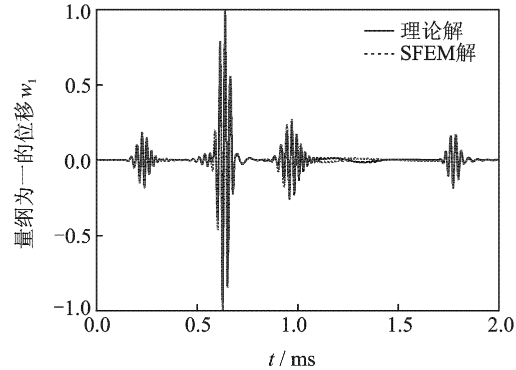

图 13　传感点 1 横向位移的时间历程

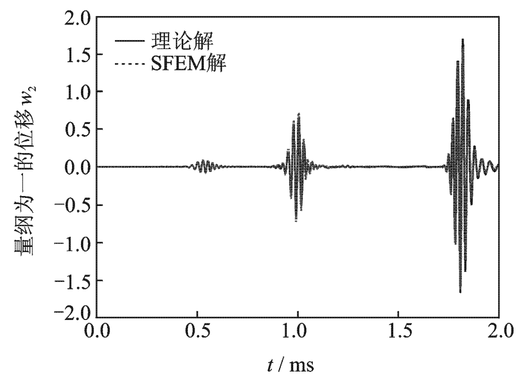

图 14　传感点 2 横向位移的时间历程

几乎完全吻合，验证了本文解析解结果的正确性。

5　结　　论

本文基于 Timoshenko 梁理论，从理论上研究了Lamb 波在复合材料层合梁结构中的传播特性。

（1）分析了复合材料层合梁结构中Lamb 波的弥散特性，与单层复合材料相比，S_0，A_0，A_1 模态耦合加剧，S_0 模态群速度由于轴向刚度降低而下降，A_0，A_1 模态群速度基本不变。

（2）研究了复合材料层合变截面梁在截面变化处以及含半无限大脱层梁在脱层尖端处的反射与透射特性，结果表明复合材料层合梁中S_0，A_0，A_1 模态相互耦合、相互转化，反射与透射特性更为复杂。然而结果显示S_0，A_0 模态向自身模态转换的透射系数明显高于其他系数，A_1 模态则由于需要满足弯曲协调条件而向S_0 模态转换的系数远大于其他系数。

（3）基于时间反转理论，提出了梁中反射与透射矩阵之间存在 Stokes 关系的理论，表明反射与透射系数除了与入射相关，两者本身也存在着直接的联系。

(4) 通过算例，将本文得到的解析解结果和文献中数值方法的结果进行比较，得到了比较一致的结果，表明本文得到的理论结果正确，论文的方法可以为更好地应用Lamb波监测技术提供理论参考。

参考文献：

[1] Wang D, Ye L, Lu Y, et al. A damage diagnostic imaging algorithm based on the quantitative comparison of Lamb wave signals[J]. Smart Materials and Structures, 2010,19(6):065008.

[2] 严刚，周丽. 基于Mindlin板理论的偏移损伤成像数值仿真研究[J]. 力学学报，2010,42(3):499-505.
Yan Gang, Zhou Li. A simulation study on migration technique for damage imaging based on Mindlin plate theory[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2010,42(3):499-505.

[3] Wang S, Huang S L, Zhao W. Simulation of Lamb wave's interactions with transverse internal defects in an elastic plate[J]. Ultrasonics, 2011,51(4):432-440.

[4] Roberts R A. Plate wave transmission/reflection at geometric obstructions: model study[C]//AIP Conference Proceedings, Kingston, RI, USA: American Institute of Physics, 2010,1211:192-199.

[5] Wang C H, Rose L R F. Wave reflection and transmission in beams containing delamination and inhomogeneity[J]. Journal of Sound and Vibration, 2003,264(4):851-872.

[6] Yuan W C, Zhou L, Yuan F G. Wave reflection and transmission in composite beams containing semi-infinite delamination[J]. Journal of Sound and Vibration, 2008,313(3/5):676-695.

[7] Zhou L, Yuan W C. Power reflection and transmission in beam structures containing a semi-infinite crack[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2008,21(2):177-188.

[8] Dong X J, Meng G, Li H G, et al. Vibration analysis of a stepped laminated composite Timoshenko beam[J]. Mechanics Research Communications, 2005,32(5):572-581.

[9] Yu L Y, Giurgiutiu V. In situ 2-D piezoelectric wafer active sensors arrays for guided wave damage detection[J]. Ultrasonics, 2008,48(2):117-134.

[10] VignonF, Aubry J F, Saez A, et al. The Stokes relations linking time reversal and the inverse filter[J]. Journal of Acoustical Society of America, 2006,119(3):1335-1346.

[11] Mahapatra R D, Gopalakrishnan S. A spectral finite element model for analysis of axial-flexural-shear coupled wave propagation in laminated composite beams[J]. Composite Structures, 2003,59(1):67-88.