

# 基于速度和加速度约束的有限控制能力路径跟踪

武 星 楼佩煌 唐敦兵

(南京航空航天大学机电学院, 南京, 210016)

**摘要:**在考虑实际系统有限控制能力的情况下, 对非完整移动机器人提出一种完全满足速度和加速度约束的路径跟踪技术。根据系统状态方程分析了移动机器人维持无偏差跟踪状态的条件, 先通过智能预测控制将路径偏差转化为同号状态, 再应用滚动时域控制和约束条件设计一种改进型最优预测控制器。当路径跟踪开始时, 控制量从零初值调整; 当路径偏差同步消除到零时, 控制量可在速度和加速度约束下及时调整到零。仿真结果验证了所提技术的有效性, 有限控制能力使该技术在工程应用时具有更好的可行性和适应性。

**关键词:**移动机器人; 路径跟踪; 控制受限; 最优控制; 滚动时域

中图分类号: TP242.6

文献标识码: A

文章编号: 1005-2615(2012)03-0279-06

## Path Tracking with Finite Control Ability Based on Velocity and Acceleration Constraints

Wu Xing, Lou Peihuang, Tang Dunbing

(College of Mechanical and Electrical Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China)

**Abstract:** A path tracking technique satisfying velocity and acceleration constraints completely is presented for non-holonomic mobile robots, in the consideration of the finite control ability for practical systems. A condition that mobile robots can keep an error-free tracking state is analyzed according to system state equations. Firstly, intelligent predictive control is used to make path errors have the same sign, and then an improved optimal predictive controller is designed by using receding horizon control and constraints. When path tracking starts, the control output changes from zero initial value. When path errors are eliminated to zero synchronously, the control output can return to zero timely under velocity and acceleration constraints. Simulation results verify the effectiveness of the proposed technique. The finite control ability makes this technique have the better feasibility and adaptability in its applications to engineering.

**Key words:** mobile robot; path tracking; restrained control; optimal control; receding horizon

近二十年来, 非完整移动机器人的跟踪控制受到广泛关注, 包括期望路径与时间相关的轨迹跟踪<sup>[1]</sup>和无关的路径跟踪<sup>[2]</sup>。很多基于运动学模型的跟踪控制仅考虑非完整约束, 可能输出急剧变化且幅值较大的速度控制量; 同时假定伺服系统具有无

限的控制能力, 可产生跟踪控制所需的任意速度控制量<sup>[3]</sup>。这种缺乏考虑实际系统控制能力的跟踪控制在工程应用中遇到较大困难。

实际伺服系统的控制能力是有限的, 文献<sup>[4]</sup>先对跟踪控制器产生的速度控制量进行幅值限制,

**基金项目:**国家自然科学基金(61105114)资助项目; 江苏省科技支撑计划(BE2010189)资助项目; 南京航空航天大学本科科研业务费专项科研基金(NJ2010025)资助项目; 南京航空航天大学引进人才科研启动基金(S1026-053)资助项目。

**收稿日期:**2011-06-28; **修订日期:**2011-11-30

**通讯作者:**武星, 男, 博士, 讲师, 1982 年出生, E-mail: wustar5353@nuaa.edu.cn。

再以此为目标值进行伺服控制,其对速度控制量的事后约束影响了跟踪控制的整体效果。因此,出现了一些控制受限的跟踪控制方法<sup>[5-8]</sup>,在跟踪控制器设计时预先限制控制量的最大幅值。一些研究通过常规输入变换将原系统变为链式系统,由于原系统的输入依赖于链式系统的输入和状态,难以判断其是否超过预先的限制。Wang等<sup>[8]</sup>只利用状态变换,不改变控制输入的形式,提出了一种控制受限的半全局镇定控制方法。需要指出的是,这些方法的控制受限仅是指控制量的最大值不超过指定上限,即控制量幅值受限,却未考虑控制量的变化率受限问题。

近期,作者基于多步运动预测和LQR优化提出一种控制受限的最优跟踪控制方法<sup>[9]</sup>,在速度差控制量的幅值约束下寻求纠偏协调性和快速性最优的多步控制量序列,产生的控制量随控制步数线性变化,且最大值不超过指定上限。在此基础上,本文通过速度和加速度约束全面描述实际系统的有限控制能力,利用滚动时域控制和约束条件改进文献<sup>[9]</sup>提出的最优预测控制器,保证控制量的幅值满足速度约束,变化步长满足加速度约束,当路径偏差同步消除到零时,控制量可在有限控制能力下及时调整到零,维持系统的无偏差跟踪状态。

## 1 路径跟踪问题描述

本文的研究对象为文献<sup>[9]</sup>中的差速转向式自动导引车(Automated guided vehicle, AGV),两驱动轮对称安装于车体左右两侧,分别通过两套直流伺服装置独立控制驱动轮的速度和方向;前后的自由轮仅起支承作用。该AGV的线性运动学模型<sup>[9]</sup>为

$$\begin{cases} e_{\theta}(k+1) = e_{\theta}(k) + \frac{2T_s}{W}\Delta v(k) \\ e_d(k+1) = e_d(k) - v e_{\theta}(k)T_s - v \frac{T_s^2}{W}\Delta v(k) \end{cases} \quad (1)$$

式中: $e_{\theta}$ 为AGV运动方向与目标路径的角度偏差; $e_d$ 为AGV中心到目标路径的侧向距离偏差; $v$ 为AGV中心的运动速度; $\Delta v$ 为两驱动轮之间的速度差控制量; $W$ 为两驱动轮之间的距离; $T_s$ 为路径跟踪的控制周期。

在路径跟踪中,利用两驱动轮的速度差 $\Delta v$ 消除AGV位姿偏差的快速性,受到实际系统控制能力的制约。对采用电机驱动的AGV,伺服电机的额定转速和转矩都是有限的,速度差控制量的幅值和

变化率受到速度和加速度约束,即

$$\begin{cases} |\Delta v(k)| \leq \Delta v_{\max} \\ |\Delta a(k)| = |\Delta v(k) - \Delta v(k-1)|/T_s \leq \Delta a_{\max} \end{cases} \quad (2)$$

式中: $\Delta v_{\max}$ 和 $\Delta a_{\max}$ 为速度差控制量的最大幅值和变化率。

在条件(2)约束下,当前状态的路径偏差可能无法在一个控制周期完全消除。根据实际系统的控制能力,从多个控制周期的整体优化角度出发,以消除两种偏差的协调性最优为目标,设计一个 $N$ 步最优控制序列 $\Delta v(k)$ ( $k=0,1,\dots,N-1$ ),将两种偏差同时消除到零,即满足纠偏目标

$$e_{\theta}(N) = 0 \text{ 且 } e_d(N) = 0 \quad (3)$$

控制步数 $N$ 反映偏差消除的快速性,纠偏目标(3)反映偏差消除的准确性。在条件(2)约束下最小化控制步数 $N$ ,可达到有限控制能力的实际系统所能实现的最快偏差消除过程。因此,本文将二次型目标函数简化为只包含控制量的形式

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \Delta v^2(k) \quad (4)$$

有限控制能力的路径跟踪问题可描述为:对状态方程为(1)的非完整系统,在条件(2)的约束下,通过最小化目标函数(4)和控制步数 $N$ ,实现一种实际系统控制能力所及的协调性和快速性最优的偏差消除过程,并最终满足纠偏目标(3),使两种路径偏差同时消除到零。

## 2 基于速度和加速度约束的路径跟踪控制

### 2.1 多步预测最优控制序列

文献<sup>[9]</sup>通过Lagrange待定数列和Hamilton函数对目标函数(4)进行优化,计算了纠偏协调性和快速性最优的多步控制量序列

$$\Delta v(k) = -\frac{e_{\theta}(0)}{2N \frac{T_s}{W}} + 3\left(k - \frac{N-1}{2}\right) \cdot \left[ \frac{NvT_s e_{\theta}(0) - 2e_d(0)}{(N^3 - N) \frac{vT_s^2}{W}} \right] \quad (5)$$

式中: $e_{\theta}(0)$ 和 $e_d(0)$ 为初始路径偏差,最优控制总步数为 $N(N>1)$ ,当前步数为 $k(k=0,1,\dots,N-1)$ 。

由式(5)可知,当总控制步数 $N$ 确定后,对于给定的初始路径偏差 $e_{\theta}(0)$ 和 $e_d(0)$ ,速度差控制量 $\Delta v(k)$ 与控制步数 $k$ 成线性关系,其最大幅值为

$$|\Delta v(k)|_{\max} = |\Delta v(0)| \quad \text{or} \quad |\Delta v(N-1)| \quad (6)$$

速度差控制量序列的变化步长为

$$\lambda = \Delta a(k)T_s = \frac{3[NvT_s e_\theta(0) - 2e_d(0)]}{(N^3 - N) \frac{vT_s^2}{W}} \quad (7)$$

### 2.2 最优预测控制的约束条件

考虑速度和加速度约束的最优预测控制,首先需要控制量序列的幅值和自身变化步长满足

$$\begin{cases} |\Delta v(k)|_{\max} \leq \Delta v_{\max} \\ \lambda \leq \Delta a_{\max} T_s \end{cases} \quad (8)$$

其次,规定路径跟踪的速度差控制量从零初值开始调整,在进行最优预测控制前,控制量序列的首项  $\Delta v(0)$  与原控制量  $\Delta v_0$  之间需满足以下加速度约束条件

$$|\Delta v(0) - \Delta v_0| \leq \Delta a_{\max} T_s \quad (9)$$

再次,考虑 AGV 维持无偏差跟踪状态的条件。当两种路径偏差同时减小到零时,即  $e_\theta(k)=0$  且  $e_d(k)=0$ ,在加速度约束下,若能将速度差控制量及时调整到零,即  $\Delta v(k)=0$ 。由系统状态方程(1)可知, $e_\theta(k+1)=0, e_d(k+1)=0$ ,这说明未来两种偏差仍然保持为零。因此,维持 AGV 无偏差跟踪状态,需要控制量序列的末项  $\Delta v(N-1)$  满足以下加速度约束条件

$$|\Delta v(N-1)| \leq \Delta a_{\max} T_s \quad (10)$$

若令  $\Delta v(N-1)=0$ ,可得

$$N^S = \text{ceil}\left(\frac{3e_d(0)}{vT_s e_\theta(0)} + 0.5\right) \quad (11)$$

式中:函数  $\text{ceil}()$  表示将小数向数值增大方向圆整为与之最接近的整数。

当初始路径偏差  $e_\theta(0)$  和  $e_d(0)$  同号且不为零时,由式(11)计算的总控制步数  $N^S \geq 1$ ,按此步数进行最优预测控制,则加速度约束条件(10)必然成立。然而,若总控制步数  $N^S$  太大,最优预测控制的快速性较差,因此,总控制步数还需满足

$$N^S \leq N_{\max} \quad (12)$$

式中: $N_{\max}$  为总控制步数的最大值。

综上,在速度和加速度约束下,路径跟踪的速度差控制量的幅值和变化步长需严格满足条件(8)。首先根据两种路径偏差之间的关系分为同号偏差状态、异号偏差状态、零角度偏差状态和零距离偏差状态<sup>[10]</sup>。对同号偏差状态,在条件(8,9,11,12)的约束下,寻找首项、末项和中间项均满足速度和加速度约束的最优预测控制量序列。对其他偏差状态,在条件(8)的约束下,寻找促使其向同号偏差状态转化的智能预测控制量。

### 2.3 基于滚动时域和控制约束的最优预测控制

对同号偏差状态,基于滚动时域和控制约束的最优预测控制如图 1 所示。在条件(8,9,11,12)的约束下,通过滚动时域控制寻找控制量序列自身、首项和末项均满足速度和加速度约束的初始路径偏差  $e_\theta(0)$  和  $e_d(0)$ ,即最优预测控制的起点状态。当路径偏差满足起点状态的条件后,通过最优预测控制将两种路径偏差同步消除到零,且控制量及时返回到零位置,满足速度和加速度约束条件,AGV 可维持无偏差跟踪状态。

为满足上述各种控制约束,本文最优预测控制的算法流程如下:

(1)对同号偏差状态的初始路径偏差  $e_\theta(0)$  和  $e_d(0)$ ,根据控制量序列自身约束,由式(6,7)计算满足条件(8)的总控制步数最小值  $N^P$ ;根据控制量序列末项约束,由式(11)计算满足条件(10)的总控制步数  $N^S$ 。若  $N^S \geq N^P$ ,条件(8,11)可同时满足,则算法转入第(2)步;否则转入第(5)步。

(2)根据快速性约束,若  $N^S \leq N_{\max}$ ,条件(8,11,12)可同时满足,则算法转入第(3)步;否则转入第(6)步。

(3)对同号偏差状态的初始路径偏差  $e_\theta(0)$  和  $e_d(0)$ ,按照第(2)步计算的总控制步数  $N^S$ ,由式(5)计算控制量序列的首项  $\Delta v(0)$ 。根据控制量序

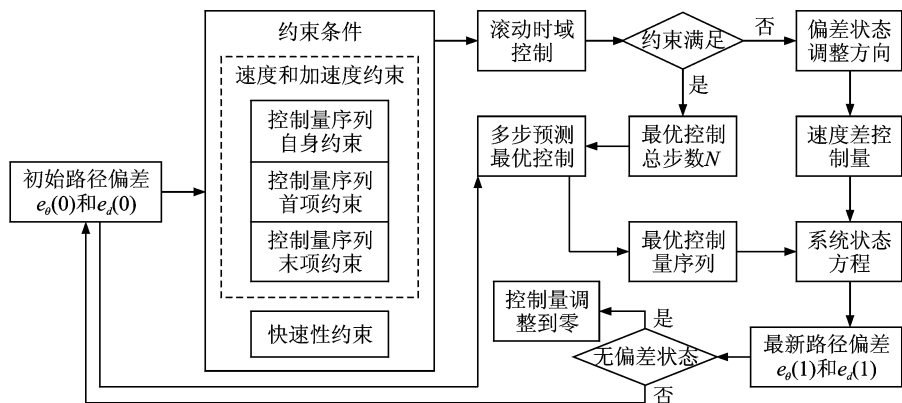


图 1 基于滚动时域和控制约束的最优预测控制

列首项约束,若 $|\Delta v(0) - \Delta v_0| \leq \Delta a_{\max} T_s$ ,条件(8, 9, 11, 12)可同时满足,则算法转入第(4)步;否则转入第(7)步。

(4)对同号偏差状态的初始路径偏差 $e_\theta(0)$ 和 $e_d(0)$ ,按照第(2)步计算的总控制步数 $N^S$ ,由式(5)计算多步控制量序列,进行最优预测控制,将两种路径偏差同步消除到零,且控制量及时返回到零位置,AGV可维持无偏差跟踪状态,算法结束。

(5)根据式(1, 11),为增大总控制步数 $N^S$ ,向减小角度偏差的方向调整速度差控制量。由于两种路径偏差同号,控制量可按 $e_d(0)$ 的符号计算,即

$$\Delta v_1 = \Delta v_0 - \text{sign}(e_d(0))\lambda_{\min} \quad (13)$$

式中:函数 $\text{sign}()$ 用于提取变量的符号<sup>[10]</sup>;  $\lambda_{\min}$ 为速度差控制量的最小步长。算法转入第(8)步。

(6)根据式(1, 11),为减小总控制步数 $N^S$ ,向增大角度偏差的方向调整速度差控制量,即

$$\Delta v_1 = \Delta v_0 + \text{sign}(e_d(0))\lambda_{\min} \quad (14)$$

算法转入第(8)步。

(7)根据式(9),为满足控制量序列首项约束,向控制量序列首项的方向调整速度差控制量

$$\Delta v_1 = \Delta v_0 + \text{sign}(\Delta v(0) - \Delta v_0)\Delta a_{\max} T_s \quad (15)$$

算法转入第(8)步。

(8)根据第(5, 6, 7)步输出的速度差控制量,由系统状态方程(1)计算最新路径偏差 $e_\theta(1)$ 和 $e_d(1)$ 。若满足无偏差跟踪状态,算法结束;否则以此作为初始路径偏差,算法返回第(1)步。

## 2.4 基于状态转化和控制约束的智能预测控制

对零角度偏差状态,可视为同号偏差状态的特殊情况,由式(11)计算的总控制步数 $N^S$ 趋向无穷大,显然不满足条件(12)。根据式(14),向增大角度偏差的方向调整速度差控制量,减小总控制步数 $N^S$ 。

对异号偏差状态和零距离偏差状态,由系统状态方程(1)可知,角度偏差将不断产生新的距离偏差,AGV运动方向将背离目标路径。为扭转AGV的运动方向,必须尽快将角度偏差减小到零。在速度和加速度约束下,向减小角度偏差的方向调整速度差控制量,即

$$\Delta v_1 = \Delta v_0 - \text{sign}(e_\theta(0))\Delta a_{\max} T_s \quad (16)$$

为保证对同号偏差状态进行最优预测控制时控制量从零初值开始调整,本文采用一种假设一预测一调整的智能预测控制实现其他偏差状态向同号偏差状态的转化,使角度偏差减小到零时控制量也返回到零位置。本文智能预测控制的算法流程如下:

(1)由式(16)计算速度差控制量的假设值 $\Delta v^S$ 。

(2)在条件(8)约束下,计算一个由 $\Delta v^S$ 减小到零的速度差控制量序列

$$\Delta v(k) = \Delta v^S - k\Delta a_{\max} T_s \quad (17)$$

式中: $k=0, 1, 2, \dots, N-1$ ,控制步数 $N$ 为

$$N = \text{ceil}\left(\frac{\Delta v^S}{\Delta a_{\max} T_s}\right) \quad (18)$$

(3)根据控制量序列 $\Delta v(k)$ ,由系统状态方程(1)预测角度偏差序列 $e_\theta(k)$ 。若 $e_\theta(N-1)$ 未减小到零,则以此时的 $\Delta v^S$ 为智能预测控制量,算法结束;否则算法转入第(4)步。

(4)在条件(8)约束下,以 $\Delta a_{\max} T_s$ 为步长减小速度差控制量的假设值。若 $\Delta v^S$ 减小到零,以零为智能预测控制量,算法结束;否则转入第(2)步。

智能预测控制的智能性主要体现在采用偏差状态转化关系定性描述多步预测控制目标,代替二次型加权形式的目标函数,避免了传统纯代数优化方法面临的加权系数和预测步数等参数选择问题。并且,采用一种假设一预测一调整的迭代控制方法,保证智能预测控制量满足速度和加速度约束。

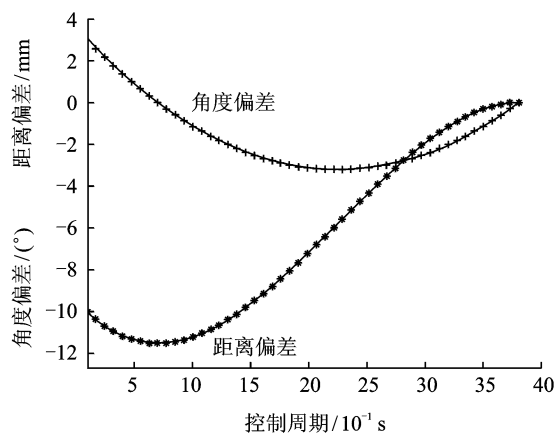
## 3 数字仿真与分析

为验证本文提出的有限控制能力路径跟踪技术,下面继续研究文献[9]中异号偏差状态的路径跟踪实例。初始路径偏差为 $e_\theta(0) = 3^\circ$ ,  $e_d(0) = -10$  mm,AGV运动方向背离目标路径,这是路径跟踪过程中最不利的偏差状态,需及时扭转AGV运动方向,避免产生更大的路径偏差甚至路径跟踪失败。

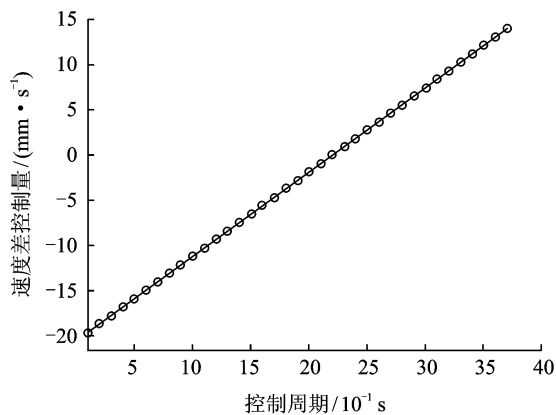
先采用文献[9]中控制量部分受限的路径跟踪技术,仿真结果如图2所示,两种路径偏差经过38步控制同步减小到零。在条件(8)约束下,由式(5)计算的速度差控制量最大值不超过20 mm/s,中间项的变化步长不超过2 mm/s。然而,控制量序列的首项为-20 mm/s,不满足从零初值开始调整的条件(9),伺服系统难以瞬间提供如此大的初始控制量;控制量序列的末项为14 mm/s,不满足返回零位置的条件(10),伺服系统难以将控制量及时调整到零,AGV难以维持无偏差跟踪状态。

再采用本文中控制量完全受限的路径跟踪技术,仿真结果如图3所示,两种路径偏差经过68步控制同步减小到零。在条件(8, 9, 11, 12)的约束下,整个路径跟踪过程分为4个阶段:

**阶段1** 由异号偏差状态向同号偏差状态转

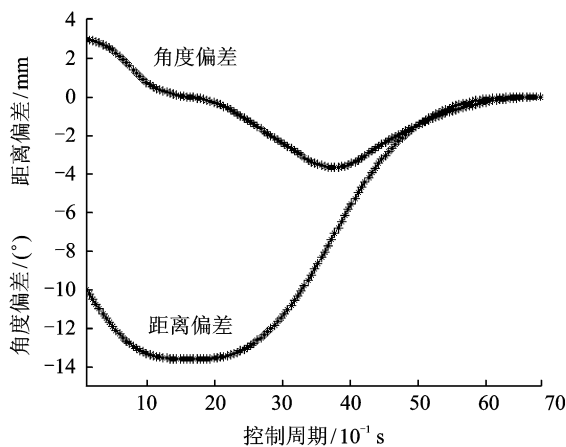


(a) 路径偏差

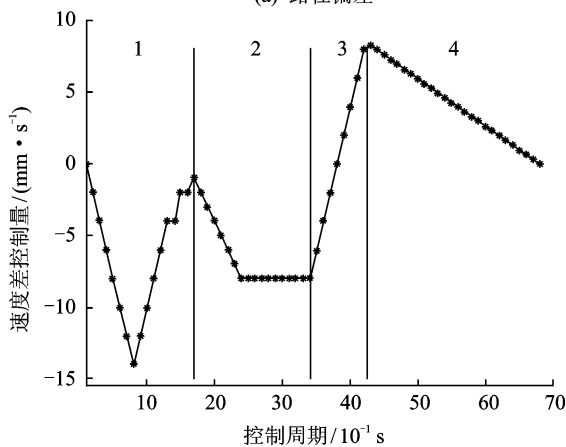


(b) 速度差控制量

图2 控制量部分受限的路径跟踪过程



(a) 路径偏差



(b) 速度差控制量

图3 控制量完全受限的路径跟踪过程

化的智能预测控制过程,此时不满足控制量序列末项约束(10),根据2.4节中假设一预测—调整的迭代控制方法,在速度和加速度约束下,由零初值开始先增加后减小速度差控制量,当角度偏差减小到零时速度差控制量也调整到零位置附近。

**阶段2** 同号偏差状态下,为满足快速性约束(12)进行的滚动时域控制过程,向增大角度偏差的方向调整速度差控制量,角度偏差不断增大,距离偏差不断减小,总控制步数 $N^S$ 迅速减小。

**阶段3** 同号偏差状态下,为满足控制量序列首项约束(9)进行的滚动时域控制过程,向控制量序列首项的方向调整速度差控制量,距离偏差继续减小,角度偏差增加到最大值后不断减小。

**阶段4** 同号偏差状态下,完全满足速度和加速度约束的最优预测控制过程,控制量序列的首项与原控制量满足加速度约束(9);控制量序列的末项及时返回到零位置,满足加速度约束(10);控制量序列的幅值和自身变化步长满足速度和加速度约束(8);控制量序列的总控制步数满足快速性约束(12)。可见,本文的速度差控制量比文献[9]受到

更全面的约束,基于有限控制能力的路径跟踪需要更长的纠偏过程,但其也更加符合物理系统的实际行为。

## 4 结束语

在研究非完整系统的路径跟踪问题时,本文通过速度和加速度约束描述实际系统的有限控制能力。对其他偏差状态,采用一种假设—预测—调整的智能预测控制实现其向同号偏差状态的转化。对同号偏差状态,根据控制量序列的自身约束、首项约束和末项约束以及快速性约束,利用滚动时域控制准备最优预测控制的应用条件。当条件满足时,最优预测控制可在速度和加速度约束下将两种路径偏差同步消除到零,并维持系统的无偏差跟踪状态。仿真结果验证了本文所提路径跟踪技术的有效性,有限控制能力使该技术在工程应用时具有更好的可行性和适应性。

## 参考文献:

- [1] 赵毅红,朱剑英.基于综合导向的车式移动机器人轨

- 迹跟踪控制[J]. 华南理工大学学报, 2006, 34(11): 60-63.
- Zhao Yihong, Zhu Jianying. Trajectory tracking control of car-like mobile robot based on integrated steering [J]. Journal of South China University of Technology, 2006, 34(11): 60-63.
- [2] Yang J L, Su D T, Shiao Y S, et al. Path-tracking controller design and implementation of a vision-based wheeled mobile robot [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part I: Journal of Systems and Control Engineering, 2009, 223(6): 847-862.
- [3] Kim M S, Shin J H, Hong S G, et al. Designing a robust adaptive dynamic controller for nonholonomic mobile robots under modeling uncertainty and disturbances [J]. Mechatronics, 2003, 13(5): 507-519.
- [4] 徐俊艳, 张培仁, 程剑锋. 基于 Backstepping 时变反馈和 PID 控制的移动机器人实时轨迹跟踪控制 [J]. 电机与控制学报, 2004, 8(1): 35-43.
- Xu Junyan, Zhang Peiren, Cheng Jianfeng. Real-time trajectory tracking control of mobile robot based on backstepping time-varying state feedback and PID control method [J]. Electric Machines and Control, 2004, 8(1): 35-43.
- [5] Luo Jihao, Tsiotras P. Control design for chained-form systems with bounded inputs [J]. Systems and Control Letters, 2000, 39(2): 123-131.
- [6] Pei Xinzhe, Liu Zhiyuan, Pei Run. Robust trajectory tracking controller design for mobile robots with bounded input [J]. Acta Automatica Sinica, 2003, 29(6): 876-882.
- [7] Ren Wei, Sun Jisang, Randal W, et al. Nonlinear tracking control for nonholonomic mobile robots with input constraints: An experimental study [C] // Proc of the 2005 American Control Conference. Portland, OR, United States: IEEE Inc, 2005: 4923-4928.
- [8] Wang Chaoli. Semiglobal practical stabilization of nonholonomic wheeled mobile robots with saturated inputs [J]. Automatica, 2008, 28(3): 816-822.
- [9] 武星, 楼佩煌. 基于运动预测的路径跟踪最优控制研究 [J]. 控制与决策, 2009, 24(4): 565-569.
- Wu Xing, Lou Peihuang. Optimal path tracking control based on motion prediction [J]. Control and Decision, 2009, 24(4): 565-569.
- [10] 武星, 楼佩煌, 杨雷. 基于视野状态分析的机器人路径跟踪智能预测控制 [J]. 机器人, 2009, 31(4): 357-364.
- Wu Xing, Lou Peihuang, Yang Lei. Intelligent predictive control based on state analysis of visual field for robot path tracking [J]. Robot, 2009, 31(4): 357-364.