

基于乘幂伸缩因子的参数曲线自由变形

陆友太 周来水 王志国 王小平

(南京航空航天大学机电学院,南京,210016)

摘要:为了改进参数曲线自由变形方法,构造了一种新的基于乘幂函数的伸缩因子,它不仅具有已有伸缩因子的特性,还具有区域峰值性,并且变形操作对 Bézier 曲线和 NURBS 曲线具有封闭性。在将伸缩因子作用于待变形曲线方程时,通过交互改变控制参数来控制曲线的形状,从而得到变形效果。实验结果表明,该方法计算简单、易于控制,可以得到丰富的变形效果,适用于几何造型、计算机动画等领域。

关键词:参数曲线;伸缩因子;变形

中图分类号:TP391

文献标识码:A

文章编号:1005-2615(2011)06-0793-06

Free-Form Deformation Based on Power Extension Factor for Parametric Curves

Lu Youtai, Zhou Laishui, Wang Zhiguo, Wang Xiaoping

(College of Mechanical and Electrical Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China)

Abstract: A new power extension factor is constructed for improving free-form deformation of parametric curves. The new extension factor has the excellence of existed extension factors and can achieve its maximum in the region. The closure property can be kept in the deformations of Bézier and NURBS curves. The deformation of a curve is achieved through multiplying the equation of the curve by the extension factor. And by interactively modifying control parameters, the outside of object can be described well. Experiments show that the method is simple, intuitive and easy to control, and desired deformations can be easily achieved. The method can be used in many fields such as geometric modeling and computer animation.

Key words: parametric curve; extension factor; deformation

在几何造型领域,各种造型方法使得人们利用计算机去模拟自由形状或设计新形状成为可能。而各种形状修改和变形方法又使得这种模拟或设计更自然、更精确逼真。此外,变形技术可独立地用来产生更复杂的形状。整体与局部的变形方法^[1]是第一个进入CAD领域的变形造型技术。该方法及其推广^[2]能够进行常规变形(如弯曲、扭曲、尖角等),但要产生任意形状是很难的。自由变形(FFD)方

法^[3]克服了上述缺点,推广^[4]被广泛用于几何造型、计算机动画等领域,但其变形控制不灵活,变形难以精确地达到预期效果。继承FFD思想的轴变形(AXDF)方法^[5]、曲面控制变形方法^[6]等,不同程度地改进了FFD方法,增强了控制灵活性。

目前,在计算机动画等领域,曲线变形方法也为人们所重视。所谓曲线变形其实是曲线所在空间自身到自身的一个映射。常见的曲线变形方法实际

基金项目:国家自然科学基金(50805075)资助项目;南京航空航天大学基本科研业务费专项科研(NS2010138)资助项目。

收稿日期:2010-09-13;**修订日期:**2011-05-27

通讯作者:周来水,男,教授,博士生导师,1962年生,E-mail: zlsme@nuaa.edu.cn。

上是 Barr 或 Sederberg 的方法的特殊应用或推广。针对某些特殊曲线的形状修改问题,人们给出了一些较为有效的方法,如: Au 和 Yuen 的 NURBS 曲线形状修改方法^[7],在变形的局部效果方面有其优点,但在几何上缺乏直观,不便于用户实际操作, Sánchez-Reyrs 的修改技术^[8],操作较方便,然而难以精确控制。总体来说,这些方法在预定或调节变形的范围、控制变形的方向和变形的幅度、确保变形区域的边界处的连续性或满足指定的光滑度等方面仍有不够理想之处。

Wang X P 等提出了基于伸缩因子的参数曲线曲面自由变形方法^[9-13],利用伸缩因子作用于待变形曲线曲面方程,直接对变形对象实行映射,产生变形效果。该方法在确定变形范围、变形边界处的光滑度,在调节变形方向和变形幅度等方面有较好的效果。但构造的伸缩因子主要基于指数函数类和余弦函数类等超越函数,变形后的曲线曲面均为超越曲线曲面,需利用逼近方法进行转换;并且伸缩因子都只能在单点达到峰值,对参数曲线曲面的自由控制变形有着较大的限制。

在文献[9-13]的研究基础之上,本文面向平面参数曲线和空间参数曲线提出了一种新的基于乘幂函数的伸缩因子,它不仅包含了已有伸缩因子的优点,而且在区域上也能达到峰值,并且变形操作对 Bézier 曲线和 NURBS 曲线具有封闭性。本文利用压缩平移的方法实现了参数曲线的周期变形。

1 基本几何变换

几何变换是研究对象与其图形描述间的映射关系以及同一对象的不同图形描述间的转换。文献[14]对二维、三维基本几何变换进行了详细介绍,下面对二维基本几何变换的知识作简要说明。

二维基本几何变换主要有平移、旋转、比例,以及对称、错切等。在 OXY 平面内,设 $P(x, y)$ 为原始点, $P'(x', y')$ 为变换后的新点。则平移变换可表示为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

式中 t_x, t_y 表示点 P 沿 X 轴和 Y 轴的平移距离。

矩阵 $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 则含有旋转、比例、对称、错切等变换功能。本文只研究其缩放和错切功能,并将矩阵 T 称为伸缩矩阵。矩阵 T 中 a, d 分别表示在 X 轴和 Y 轴方向的缩放变换系数, b, c 分别表示在 X 轴和 Y 轴方向的错切变换系数。

伸缩矩阵 T 的几何变换是相对坐标原点而实现的。因此,如果需要保持物体在变形前后的相对位置不变,则可以选取物体上的任意一点 $P_0(x_0, y_0)$ 作为固定点,结合平移变换即可实现(即先将固定点平移到原点,然后物体相对原点作伸缩变换,最后再将固定点平移至原始位置),变换关系可表示为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

2 伸缩因子的定义及性质

定义 1 设 n 为正整数,对于 \mathbf{R} 中的关于 a_0 对称的区间: $[a_0 - r_1, a_0 + r_1]$ 和 $[a_0 - r_2, a_0 + r_2]$, 其中 $0 \leq r_1 < r_2$, 令 $u = |t - a_0|$, 作 \mathbf{R} 上的函数

$$f(t) = f(t, a_0, r_1, r_2, n) = f(u) = \begin{cases} 1 & u \leq r_1 \\ \left(\left(\frac{r_2 - u}{r_2 - r_1} \right) \left(\frac{u - 2r_1 + r_2}{r_2 - r_1} \right) \right)^n & r_1 < u \leq r_2 \\ 0 & u > r_2 \end{cases}$$

则 $f(t)$ 称为 \mathbf{R} 上的基本伸缩函数。

基本伸缩函数 $f(t)$ 具有如下性质:

(1) $0 \leq f(t) \leq 1$ 。

(2) 区间峰值性: 当 $t \in [a_0 - r_1, a_0 + r_1]$ 时, $f(t)$ 取最大值 1; 当 $t \in [a_0 - r_2, a_0 + r_2]$ 时, $f(t)$ 取最小值 0。特别当 $r_1 = 0$ 时, $f(t)$ 具有单峰性。如图 1 所示。

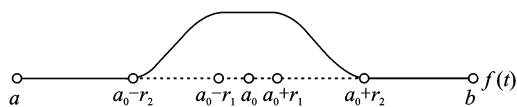


图 1 基本伸缩函数区间峰值性 $r_2 > r_1 > 0$ 的图形

(3) $f(t)$ 为 \mathbf{R} 上的 C^∞ 函数。

定义 2 设 $h \in \mathbf{R}$, 令 $E(t) = E(t, a_0, r_1, r_2, n, h) = 1 + hf(t)$, 则称 $E(t)$ 为 \mathbf{R} 上带参数 n, h 的乘幂伸缩因子。其中 $[a_0 - r_2, a_0 + r_2]$ 为支撑区间; $[a_0 - r_1, a_0 + r_1]$ 为峰值区间; n 为光滑指数; h 为伸缩参数。

伸缩因子 $E(t)$ 具有如下性质:

(1) $E(a_0 - r_2) = E(a_0 + r_2) = 1$ 。

(2) 区间峰值性: 当 $t \in [a_0 - r_1, a_0 + r_1]$ 时, $E(t)$ 取最大值。特别当 $r_1 = 0$ 时, $E(t)$ 具有单峰性。

(3) $E(t)$ 为 \mathbf{R} 上的 C^∞ 函数。

通过调整各个参数的取值,可以得到不同形状、不同位置的伸缩因子。图 2 直观地显示了伸缩因子作用的效果。其基本思想是: 伸缩因子在 $[a_0 - r_2, a_0 + r_2]$ 范围外恒为 1, 在 $[a_0 - r_1, a_0 + r_1]$ 范围内恒为

$1+h$,在其他范围内不为常数,因此当伸缩因子乘以待变曲线 $p(t)$ 时,只在相应的范围内发生相应的变形,而在 $[a_0-r_2, a_0+r_2]$ 范围外的部分不变。

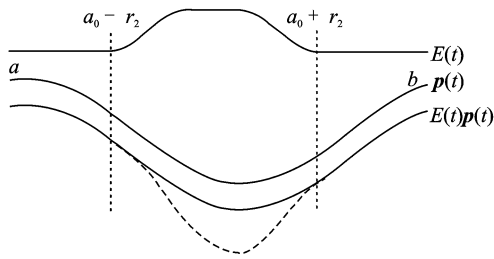


图 2 基本伸缩因子作用的效果

3 平面参数曲线的变形与控制

3.1 简单变形

设 $p(t) = (x(t), y(t))^T, t \in [a, b]$ 为平面 C^r 类曲线 ($r \geq 1$), 区间 $[a_0-r_1, a_0+r_1] \subset [a_0-r_2, a_0+r_2] \subseteq [a, b]$, 中心为 $O'(a_0) = (x(a_0), y(a_0))$, 令 $E_{ij}(t) = E(t, a_0, r_1, r_2, n, h_{ij}) (i, j = 1, 2)$ 为具有相同支撑区间和光滑指数的伸缩因子, 光滑指数 $n \leq r+1$, 令

$$T = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} - 1 \\ E_{21} - 1 & E_{22} \end{bmatrix}$$

为支撑区间 $[a_0-r_2, a_0+r_2]$ 上的伸缩矩阵。变形后的曲线 $p_d(t)$ 与变形前的曲线 $p(t)$ 有如下关系

$$p_d(t) = T(p(t) - O') + O' \quad t \in [a, b] \quad (1)$$

3.2 周期变形

为得到平面曲线的周期变形效果, 本文采用压缩、平移的方法, 将基本伸缩函数 $f(t)$ 作如下修改。

定义 3 设 n, ω 为正整数, 记 $a_{i0} = a_0 - r_2 + \frac{(2i-1)r_2}{\omega}, r_{i1} = r_1/\omega, r_{i2} = r_2/\omega$, 令 $u_i = |t - a_{i0}|, i = 1, 2, \dots, \omega$, 称函数

$$f^*(t) = f^*(t, a_0, r_1, r_2, n, \omega) = f^*(u) =$$

$$\begin{cases} 1 & u_i \leq r_{i1} \\ \left(\left(\frac{r_{i2} - u_i}{r_{i2} - r_{i1}} \right) \left(\frac{u_i - 2r_{i1} + r_{i2}}{r_{i2} - r_{i1}} \right) \right)^n & r_{i1} < u_i \leq r_{i2} \\ 0 & u_i > r_{i2} \end{cases}$$

为 \mathbf{R} 上周期为 ω 的伸缩函数。

令 $E^*(t) = E^*(t, a_0, r_1, r_2, n, h, \omega) = 1 + hf^*(t) (h \in \mathbf{R})$, 则称 $E^*(t)$ 为 \mathbf{R} 上带参数 n, h , 周期为 ω 的乘幂伸缩因子。其中 $[a_{i0}-r_{i2}, a_{i0}+r_{i2}]$ 为支撑区间; $[a_{i0}-r_{i1}, a_{i0}+r_{i1}]$ 为峰值区间; n 为光滑指数; h 为伸缩参数, ω 为周期参数。

类似式(1), 将周期为 ω 的伸缩因子构成的伸

缩矩阵 T^* 作用到原曲线, 得到如下关系

$$p_d(t) = T^*(p(t) - O') + O' \quad t \in [a, b] \quad (2)$$

3.3 复杂变形

更一般的情形, 设第 $i (i = 1, 2, \dots, k)$ 次变形以 O'_i 为中心, E_i 为伸缩因子, 伸缩矩阵为 T_i , 则变形后的曲线 $p_d(t)$ 与变形前的曲线 $p(t)$ 满足如下递推关系

$$p_{d,i}(t) = T_i(p_{d,i-1}(t) - O'_i) + O'_i \quad t \in [a, b] \quad (3)$$

其中 $p_{d,0}(t) = p(t), p_d(t) = p_{d,k}(t)$ 。特别当 $O'_i = O'$ 时, $p_d(t)$ 与 $p(t)$ 满足关系

$$p_d(t) = \left(\prod_{i=1}^k T_i \right) (p(t) - O') + O' \quad t \in [a, b] \quad (4)$$

3.4 变形的几何意义

令 $T = (d_{ij})_{2 \times 2}, e_1, e_2$ 为线性无关的单位向量, 记 $p(t) - O' = p_1 e_1 + p_2 e_2$, 则式(1)可以表示为

$$p_d(t) = \sum_{i,j=1}^2 d_{ij} p_j e_i + O' = \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{j=1}^2 d_{ij} p_j \right) e_i + O' = (e_1, e_2) T (p_1, p_2)^T + O' \quad (5)$$

由此可看出式(1)所定义的变形的几何含义是: 在支撑区间内, 在原曲线上的每一点 $p(t)$ 处, 对向量 $p(t) - O'$ 在仿射坐标系 $[O', e_1, e_2]$ 下的坐标 $(p_1, p_2)^T$ 作仿射变换, 变换矩阵就是伸缩矩阵 T 。

此外, 如果作线性变换 $\bar{t} = (r_2 - u)/(r_2 - r_1)$, 则定义 2 中的伸缩因子 $E(t)$ 可表示为

$$E(t) = E(t, a_0, r_1, r_2, n, h) = \begin{cases} 1 + h & \bar{t} \geq 1 \\ 1 + h \bar{t}^n (2 - \bar{t})^n & 0 < \bar{t} \leq 1 \\ 1 & \bar{t} < 0 \end{cases}$$

若待变形曲线 $p(t)$ 为 N 次 Bézier 曲线, 其控制顶点为 $p_i, i = 0, 1, \dots, N$, 在 $t \in [t_1, t_2]$ 即 $\bar{t} \in [0, 1]$ 范围内, $p(t) = \sum_{i=0}^N p_i B_i^N(t) = \sum_{i=0}^N p_i B_i^N(r_2 - (r_2 - r_1)\bar{t})$, 考虑最简单的变形, 则有

$$E(t)p(t) = [1 + h \bar{t}^n (2 - \bar{t})^n] \cdot \sum_{i=0}^N p_i B_i^N(t) = \sum_{i=0}^{N+2n} q_i \bar{t}^i = \sum_{i=0}^{N+2n} r_i B_i^{N+2n}(\bar{t}) \quad (6)$$

式(6)后两步运用了 Bernstein 基可与幂基相互变换的原理^[15]进行了转化, 控制顶点 q_i, r_i 亦可通过原控制顶点 p_i 作代数运算得到, 更复杂的变形可用类似的方法处理, 故变形操作对 Bézier 曲线保持封闭。类似地, 对 NURBS 的变形也具有封闭性。

3.5 变形的交互控制方法

在变形过程中,通过调控变形中心、支撑区间、峰值区间、光滑指数和伸缩参数,可以灵活地控制变形曲线的形状,具体控制方法如下:

- (1) 改变 O' ,可以控制曲线的相对变形中心。
- (2) 改变 r_1, r_2 ,可以控制曲线的支撑区间和峰值区间。
- (3) 改变光滑指数 n ,可以控制变形曲线在 $t = a_0 \pm r_1$ 和 $t = a_0 \pm r_2$ 处的光滑性。

(4) 改变伸缩参数 $h_{ij}(i, j=1, 2)$,可以控制曲线的伸缩方向和调整各方向的伸缩幅度,具体如下:

① 取 $h_{11} = h \neq 0, h_{ij} = 0(i, j=1, 2$ 且 i, j 不同时为1),即 $T = \text{diag}(E, 1)$,可以控制曲线沿 X 轴的凹凸变形;类似地,可以控制曲线沿 Y 轴的凹凸变形。

② 改变 h_{11} 的符号,可以控制曲线沿 X 轴正向或负向变形;改变 h_{11} 的大小,可以控制曲线沿 X 轴变形的幅度;类似地,改变 h_{22} 的符号或大小,可以得到沿 Y 轴类似效果。

③ 改变 h_{12} 的大小,可以得到曲线沿 X 轴的剪切效果;同理,改变 h_{21} 的大小,可以得到沿 Y 轴的剪切效果。

实际应用时,可同时改变各控制参数,以达到理想的变形结果。还可以结合坐标系变换,以改变伸缩变形的主方向,从而得到更加丰富的变形效果。

3.6 应用实例

以圆 $p(t) = (\cos t, \sin t)^T, t \in [0, 2\pi]$ 为例,演示本文伸缩因子的实际作用效果及变形控制参数改变时引起的变形结果的改变,变形效果如图3~9所示,主要控制参数如表1所示。其中,图6进行了坐标系变换,剪切方向为 $l_1 = [-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$ 。

表1 平面参数曲线变形的控制参数取值

图号	a_0	r_1	r_2	控制参数
3	$\pi/4, 3\pi/4$	$\pi/12, 0$	$\pi/4$	$h_{11} = h_{22} = 0.3$, 其他 $h_{ij} = 0, n = 2$
4	$\pi/4$	$\pi/24$	$\pi/4$	$h_{11} = h_{22} = 0.5$, 其他 $h_{ij} = 0, n = 2, 6$
5	$\pi/2$	$\pi/24$	$\pi/4$	$h_{22} = 0.5, -0.3$, 其他 $h_{ij} = 0, n = 2$
6	$\pi/4$	$\pi/24$	$\pi/4$	$h_{11} = h_{22} = 0.2, h_{12} = 0, 0.5, -0.5, n = 2$
7	π	0	π	$h_{11} = 0.8, h_{22} = 0.4, -0.4, n = 2$
8	π	$\pi/6$	π	$\omega = 4, h_{11} = h_{22} = 0.5, n = 2$
9	π	$\pi/6$	π	$\omega = 25, n = 2, h_{11} = h_{22} = 0.5$

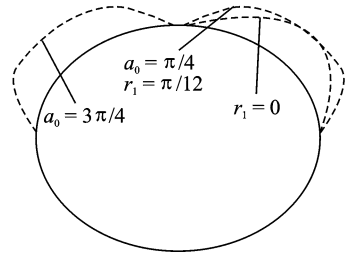


图3 改变变形中心 O' 的位置及 r_1 大小的变形效果

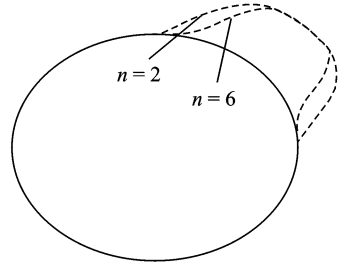


图4 光滑指数 n 对变形效果的控制

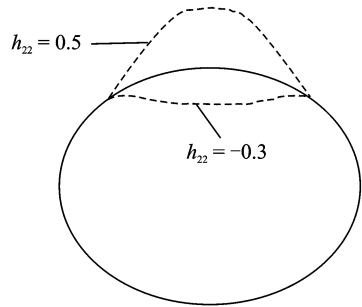


图5 h_{22} 对变形方向及幅度的控制

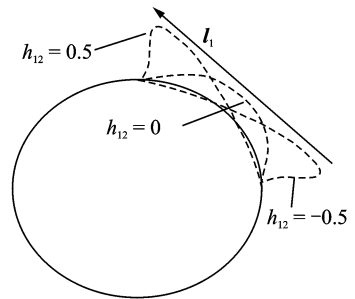


图6 改变 h_{12} 得到沿 l_1 的剪切效果

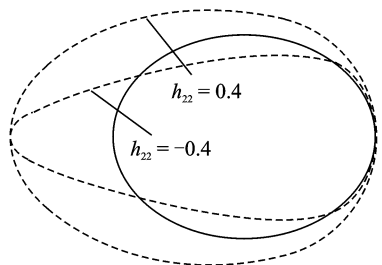


图7 整体变形效果

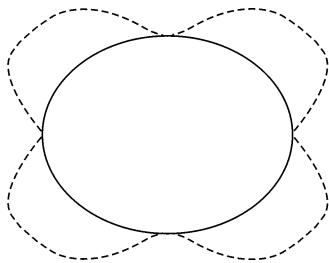


图8 周期变形效果($\omega=4$)

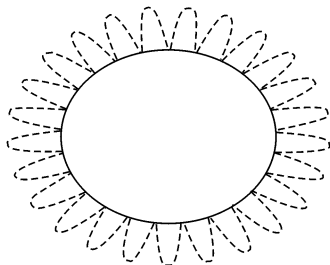


图9 周期变形效果($\omega=25$)

4 空间参数曲线的自由变形

设 $p(t) = (x(t), y(t), z(t))^T, t \in [a, b]$ 为空间 C^r 类曲线 ($r \geq 1$), 区间 $[a_0 - r_1, a_0 + r_1] \subset [a_0 - r_2, a_0 + r_2] \subseteq [a, b]$, 中心为 $O'(a_0) = (x(a_0), y(a_0), z(a_0))$ 。设 $E_{ij}(t) = E(t, a_0, r_1, r_2, n, h_{ij}) (i, j = 1, 2, 3)$ 为具有相同支撑区间和光滑指数的伸缩因子, 光滑指数 $n \leq r + 1$, 则矩阵

$$T = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} - 1 & E_{13} - 1 \\ E_{21} - 1 & E_{22} & E_{23} - 1 \\ E_{31} - 1 & E_{32} - 1 & E_{33} \end{bmatrix}$$

为支撑区间 $[a_0 - r_2, a_0 + r_2]$ 上的伸缩矩阵。变形后的曲线 $p_d(t)$ 与变形前的曲线 $p(t)$ 有如下关系

$$p_d(t) = T(p(t) - O') + O' \quad t \in [a, b]$$

基于乘幂伸缩因子的空间参数曲线的自由变形方法类似于平面参数曲线, 其周期变形、复杂变形以及变形的交互控制方法此处不再赘述。

应用实例: 以圆柱螺旋线 $p(t) = (\cos t, \sin t, t)^T$ 为例, 演示空间参数曲线自由变形的效果如图10~13所示, 主要控制参数如表2所示。

表2 空间参数曲线变形的控制参数值

图号	a_0	r_1	r_2	控制参数
10	$10\pi/4$	$\pi/8, 0$	$\pi/2$	$h_{33} = 0.3$, 其他 $h_{ij} = 0, n = 6$
11	$10\pi/4$	$\pi/8$	$\pi/2$	$h_{33} = 0.4, -0.1$, 其他 $h_{ij} = 0, n = 6$
12	$10\pi/4$	$\pi/8$	$\pi/2$	$h_{33} = 0.4, h_{12} = h_{13} = 0.1, 0, -0.1, h_{33} = 0.1, n = 6$
13	6	$\pi/8$	5	$\omega = 3, h_{11} = h_{22} = h_{33} = 0.2, n = 4$

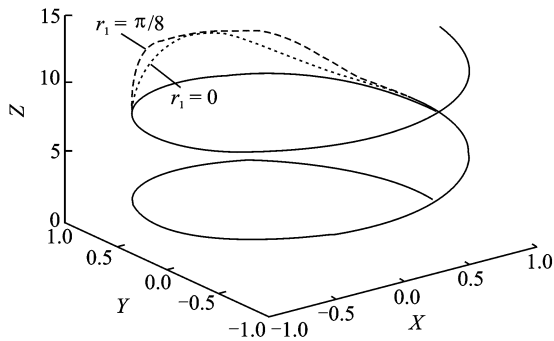


图10 改变 r_1 大小的变形效果

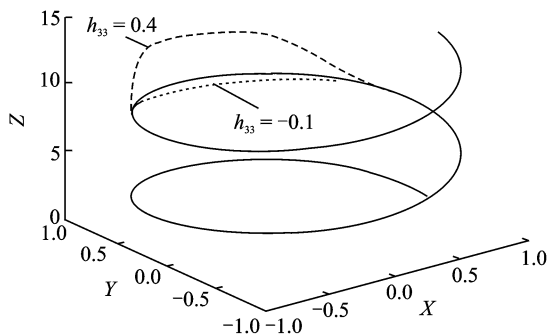


图11 h_{33} 对变形方向及幅度的控制

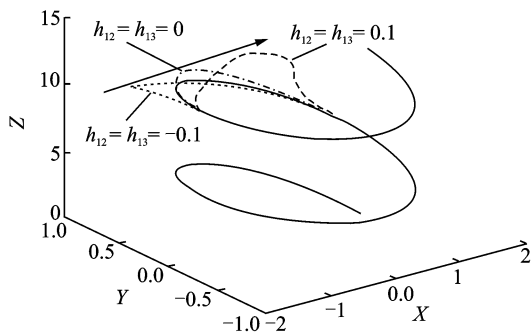


图12 改变 h_{12}, h_{13} 得到沿 X 轴的剪切效果

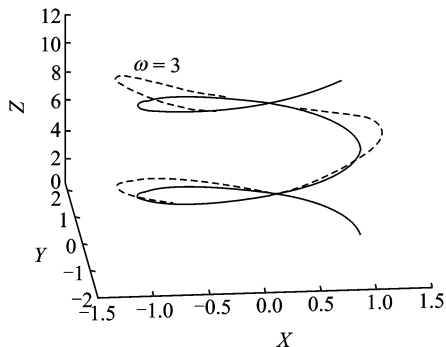


图13 周期变形效果($\omega=3$)

5 结束语

基于伸缩因子的参数曲线曲面自由变形方法

无需微分再积分,无需借助平行六面体或轴线等辅助工具,对除隐式函数表示之外的任何形式表示的曲线曲面都适用,故更具有一般性。

本文提出的新的基于乘幂函数的伸缩因子包含了文献[9~13]所引入的伸缩因子的性质:能精确控制变形范围;变形模型简单、易于操作;控制参数具有明显几何意义,变形效果丰富;集曲线保形与修改与变形于一身等。与现有方法比较,本文方法具有以下优点:不仅能在单点达到峰值,而且可以在区域上达到峰值;变形操作对 Bézier 曲线和 NURBS 具有封闭性,适用于更一般的参数曲线的自由变形。

此外,本文只利用几何变换矩阵研究了基于伸缩因子的伸缩变换,为使得变形效果更加丰富,可以结合几何变换的平移、旋转功能,进一步研究曲线曲面的平移变形和旋转变形。

参考文献:

- [1] Barr A H. Global and local deformations of solid primitives [J]. Computer Graphics, 1984, 18(3): 21-30.
- [2] Ugur Güdükbay B. Free-form solid modeling using deformations [J]. Computer Graphics, 1990, 14(3/4): 491-500.
- [3] Sederberg T W, Parry R. Free-form deformations of solid geometric models [J]. Computer Graphics, 1986, 10(4): 151-160.
- [4] Coquillart S. Extended free-form deformation: a sculpting tool for 3D geometric modeling [J]. ACM Computer Graphics, 1990, 24(4): 187-196.
- [5] Lazarus C S, Jancene P. Axial deformation: an intuitive technique [J]. Computer Aided Design, 1994, 26(8): 607-613.
- [6] Feng J Q, Ma L Z, Peng Q S. New free-form deformation through the control of parametric surfaces [J]. Computer & Graphics, 1996, 20(4): 531-539.
- [7] Au C K, Yuen M M F. Unified approach to NURBS curves shape modification [J]. Computer-Aided Design, 1995, 27(2): 85-93.
- [8] Sánchez Reyers J. A simple technique for NURBS shape modification [J]. IEEE Trans Computer Graphics & Applications, 1997, 17(1): 52-59.
- [9] Wang Xiaoping, Ye Zhenglin, Meng Yaqin, et al. Space deformation based on extension factor of parametric surfaces [J]. International Journal of CAD/CAM, 2001, 1(3): 39-58.
- [10] Wang Xiaoping, Ye Zhenglin, Li Hongda, et al. The technique of free-form deformation based on extension function for planar parametric curve [J]. Journal of Engineering Mathematics, 2002, 19(1): 115-119.
- [11] Wang Xiaoping, Ye Zhenglin, Hu Xiaomin, et al. Shape modification and deformation of parametric surfaces [J]. Computer Aided Drafting, Design and Manufacture, 2002, 12(1): 1-7.
- [12] Wang Xiaoping, Ye Zhenglin, Meng Yaqin, et al. Space deformation of parametric surface based on extension function [J]. International Journal of CAD/CAM, 2002, 1(1): 23-32.
- [13] Wang Xiaoping, Zhou Rurong, Ye Zhenglin, et al. Shape modification of parametric curves [J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2004, 17(4): 251-259.
- [14] 李靖谊, 陈炳发, 王静秋, 等. 交互式计算机图形学 [M]. 北京: 航空工业出版社, 2000.
- [15] 王国瑾, 汪国昭, 郑建民. 计算机辅助几何设计 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2001: 14-15.