第43卷第6期 南京航空航天大学学报 Vol. 43 No. 6
2011年12月 Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics Dec. 2011

不完备系统中的变精度多粒度粗糙集

翟永健 张 宏
（南京理工大学计算机科学与技术学院，南京，210094）

摘要：以不完备信息系统为研究对象，将变精度粗糙集方法与多粒度粗糙集方法进行融合，构建了基于容差关系的可变精度乐观和悲观多粒度粗糙集模型。这两种可变精度多粒度粗糙集模型都是基于容差关系的可变精度粗糙集与多粒度粗糙集的拓展形式。对可变精度多粒度粗糙集的基本性质进行了讨论，为采用粗糙集方法处理不完备信息系统提供了新的技术手段。

关键词：不完备信息系统；容差；多粒度粗糙集；变精度粗糙集；变精度多粒度粗糙集

中图分类号：TP18 **文献标识码**：A **文章编号**：1005-2615(2011)06-0780-06

Variable Precision Multigranulation Rough Sets in Incomplete Information System

Zhai Yongjian, Zhang Hong
(School of Computer Science and Technology, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, 210094, China)

Abstract: In the incomplete information system, the variable precision rough set and the multigranulation rough set approaches are mixed together. Then the tolerance relations based variable precision optimistic and pessimistic multigranulation rough set models are proposed. The two sets are generalizations of the tolerance relations based variable precision rough set and multigranulation rough set. The basic properties about variable precision multigranulation rough sets are analyzed. The results provide a new technique for dealing with the incomplete information system using the rough set theory.

Key words: incomplete information system; tolerance; multigranulation rough set; variable precision rough set; variable precision multigranulation rough set

如何在不完备信息系统中对粗糙集模型[1-3]进行拓展是粗糙理论研究的一个热点问题。目前很多学者就此问题所做的工作是对Pawlak的不可分辨关系进行弱化，构建了诸如基于容差关系[4]、相似关系、限制容差关系等多种拓展粗糙集模型。

值得注意的是容差关系是一种应用非常广泛的二元关系，它满足自反和对称性。在不完备信息系统中，容差关系是基于这样一个假设而构建的：未知属性值与其他任意的属性值都被认为是可能相同的。从这个观点来看，容差关系代表了一种可能不可分辨的含义。

在容差关系粗糙集模型的基础上，已有学者引入了变精度[5-6]的思想，在不完备信息系统中根据容差关系提出了变精度粗糙集模型[7]。相比于根据严格包含关系构建的粗糙集模型，变精度粗糙集采用了错误分类率的概念，能够处理某种程度上的包含和属于，适用于噪声数据或不完整数据的处理。

此外，Pawlak的粗糙集和目前很多拓展粗糙集都是建立在1个二元关系的基础上的。但是，在粒计算理论中，多粒度是1个核心概念。所谓多粒度，表示在两个甚至多个不同的粒度世界上进行问题求解的研究。从这个角度出发，我国著名的粒计

基金项目：国家自然科学基金(60903027)资助项目。
收稿日期：2011-04-21；**修订日期**：2011-09-21
通讯作者：翟永健，男，博士研究生，讲师，1970年生，E-mail：zhaiyongjian888@163.com。

算学者钱宇华和梁吉业提出了多粒度粗糙集[8]的概念。在他们的多粒度粗糙集模型中，采用一族而非一个等价关系来进行目标概念的近似逼近，一般来说可以有两种不同的多粒度粗糙集形式，一种称为乐观多粒度粗糙集，而另一种称为悲观多粒度粗糙集[9]。在文献[10]中，钱宇华等人已将多粒度的思想引入不完备信息系统中，构建了基于容差关系的乐观多粒度粗糙集模型。

本文吸取变精度粗糙集和多粒度粗糙集各自的优点，在不完备信息系统中，根据一族容差关系，构建变精度多粒度粗糙集模型。变精度多粒度粗糙集是变精度粗糙集和多粒度粗糙集的拓展形式。沿袭钱宇华等人的多粒度粗糙理论，本文提出的变精度多粒度粗糙集依然包括乐观和悲观两种形式。

1　基本概念

一个信息系统可被定义为二元组 $S=<U, AT>$，其中 U 为所有对象的集合，称为论域；AT 为所有属性的集合。对于$\forall\ a\in AT$，定义映射$a: U\to V_a$，V_a 为属性 a 的值域，即 $a(x)\in V_a(x\in U)$。一个决策系统是一个信息系统$S=<U, AT\cup\{d\}>$，其中 AT 为条件属性集合，d 是决策属性。

在决策系统中，当部分对象的条件属性值未知时，该决策系统就被称为不完备决策系统，未知的条件属性值用“ * ”表示。在未知属性值都是遗漏型的解释下，即未知属性值与其他的属性值是可以比较的，Kryszkiewicz[1]提出了容差关系形如

$$\mathrm{TOL}(AT)=\{(x, y)\in U^2:\ \forall\ a\in AT,\ a(x)=a(y)\ \vee\ a(x)=*\ \vee\ a(y)=*\}\tag{1}$$

定义 1[4]　令S 为一不完备决策系统，$A\subseteq AT$，对于$\forall\ X\subseteq U$，X 根据容差关系 $\mathrm{TOL}(A)$所得到的下近似集合$\underline{A}(X)$与上近似集合$\overline{A}(X)$分别定义为

$$\underline{A}(X)=\{x\in U:\ \mathrm{TOL}_A(x)\subseteq X\}\tag{2}$$

$$\overline{A}(X)=\{x\in U:\ \mathrm{TOL}_A(x)\cap X\neq\varnothing\}\tag{3}$$

式中$\mathrm{TOL}_A(x)=\{y\in U:\ (x, y)\in\ \mathrm{TOL}(A)\}$表示 x 的容差类，即所有可能与 x 不可分辨的对象构成的集合。

变精度粗糙集模型是经典粗糙集模型的一种拓展形式。在变精度粗糙集模型中，Ziarko 引入了错误分类率的概念，这样就可以使得下、上近似存在着一定的分类误差，因而相对于经典粗糙集模型来说更为灵活，可以适应噪声数据的处理。近年来，随着研究的不断深入，已有很多学者将变精度的思想引入不完备系统中，采用容差关系构建变精度粗糙集模型[7]。

定义 2　令 S 为一不完备决策系统，$A\subseteq AT$，对于$\forall\ X\subseteq U$，X 根据容差关系 $\mathrm{TOL}(A)$所得到的变精度下近似集合$\underline{A}_\beta(X)$与变精度上近似集合$\overline{A}_\beta(X)$分别定义为

$$\underline{A}_\beta(X)=\{x\in U:\ P(\mathrm{TOL}_A(x), X)\geqslant\beta\}\tag{4}$$

$$\overline{A}_\beta(X)=\{x\in U:\ P(\mathrm{TOL}_A(x), X)>1-\beta\}\tag{5}$$

式中：$\beta\in(0.5,1]$；$p(\mathrm{TOL}_A(x), X)$表示容差累 $\mathrm{TOL}_A(x)$包含于目标概念 X 的程度，即

$$P(\mathrm{TOL}_A(x), X)=\frac{|\mathrm{TOL}_A(x)\cap X|}{|\mathrm{TOL}_A(x)|}$$

在容差关系的基础上，钱宇华等人提出了多粒度粗糙集模型[8]。所谓多粒度粗糙集模型，与传统粗糙集模型的最大不同之处在于其可以使用多个粒空间中的知识或多个二元关系来进行目标的近似逼近。在钱宇华等人的多粒度粗糙集理论中，有两种不同的模型，分别称为乐观多粒度粗糙集和悲观多粒度粗糙集[9]。

定义 3[10]　令 S 为一不完备决策系统，$A_1,\cdots, A_m\subseteq AT$，对于$\forall\ X\subseteq U$，$X$ 根据容差关系族$\{\mathrm{TOL}(A_1),\ \cdots, \mathrm{TOL}(A_m)\}$所得的乐观多粒度下近似集合$\underline{\sum_{i=1}^m A_i^O}(X)$与上近似集合$\overline{\sum_{i=1}^m A_i^O}(X)$分别定义为

$$\underline{\sum_{i=1}^m A_i^O}(X)=\{x\in U:\ \mathrm{TOL}_{A_1}(x)\subseteq X\ \vee\ \cdots\ \vee\ \mathrm{TOL}_{A_m}(x)\subseteq X\}\tag{6}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^m A_i^O}(X)=\sim\underline{\sum_{i=1}^m A_i^O}(\sim X)\tag{7}$$

式中$\sim X$ 表示集合 X 的补集。

二元组$\left[\underline{\sum_{i=1}^m A_i^O}(X),\overline{\sum_{i=1}^m A_i^O}(X)\right]$称为集合 X 的乐观多粒度粗糙集[8]。

定义 4　令S为一不完备决策系统，$A_1,\cdots, A_m\subseteq AT$，对于$\forall\ X\subseteq U$，$X$根据容差关系族$\{\mathrm{TOL}(A_1),\ \cdots, \mathrm{TOL}(A_m)\}$所得到悲观多粒度下近似集合$\underline{\sum_{i=1}^m A_i^P}(X)$与上近似集合$\overline{\sum_{i=1}^m A_i^P}(X)$分别定义为

$$\underline{\sum_{i=1}^m A_i^P}(X)=\{x\in U:\ \mathrm{TOL}_{A_1}(x)\subseteq X\ \wedge\ \cdots\ \wedge\ \mathrm{TOL}_{A_m}(x)\subseteq X\}\tag{8}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m} A_i^P}(X)=\sim \underline{\sum_{i=1}^{m} A_i^P}(\sim X) \tag{9}$$

二元组$\left[\underline{\sum_{i=1}^{m} A_i^P}(X),\overline{\sum_{i=1}^{m} A_i^P}(X)\right]$称为集合$X$的悲观多粒度粗糙集[9]。

2 变精度多粒度粗糙集

在第1节中,已知变精度粗糙集相比于经典粗糙集模型来说,更适应于噪声数据的处理;而多粒度粗糙集模型相比于经典粗糙集模型来说,可以使用多个不同的二元关系来进行目标的近似逼近,因而,很自然的,可以对这两种粗糙集模型进行融合,在不完备系统中,构建变精度多粒度粗糙集模型。

定义5 令S为一不完备决策系统,$A_1,\cdots,A_m\subseteq AT$,对于$\forall X\subseteq U$,$X$根据容差关系族$\{\mathrm{TOL}(A_1),\cdots,\mathrm{TOL}(A_m)\}$所得到的变精度乐观多粒度下近似集合$\underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^O}(X)$与上近似集合$\overline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^O}(X)$分别定义为

$$\underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^O}(X)=\{x\in U:P(\mathrm{TOL}_{A_1}(x),X)\geqslant \beta\vee\cdots\vee P(\mathrm{TOL}_{A_m}(x),X)\geqslant\beta\} \tag{10}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^O}(X)=\sim \underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^O}(\sim X) \tag{11}$$

式中$\beta\in(0.5,1]$。

定义6 令S为一不完备决策系统,$A_1,\cdots,A_m\subseteq AT$,对于$\forall X\subseteq U$,$X$根据容差关系族$\{\mathrm{TOL}(A_1),\cdots,\mathrm{TOL}(A_m)\}$所得到变精度悲观多粒度下近似集合$\underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^P}(X)$与上近似集合$\overline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^P}(X)$分别定义为

$$\underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^P}(X)=\{x\in U:P(\mathrm{TOL}_{A_1}(x),X)\geqslant \beta\wedge\cdots\wedge P(\mathrm{TOL}_{A_m}(x),X)\geqslant\beta\} \tag{12}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^P}(X)=\sim \underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^P}(\sim X) \tag{13}$$

式中$\beta\in(0.5,1]$。

定理1 令S为一不完备决策系统,$A_1,\cdots,A_m\subseteq AT$,对于$\forall X\subseteq U$,有

$$\begin{gathered}\underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_1}^O}(X)=\underline{\sum_{i=1}^{m} A_i^O}(X)\\ \overline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_1}^O}(X)=\overline{\sum_{i=1}^{m} A_i^O}(X)\end{gathered} \tag{14}$$

$$\begin{gathered}\underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_1}^P}(X)=\underline{\sum_{i=1}^{m} A_i^P}(X)\\ \overline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_1}^P}(X)=\overline{\sum_{i=1}^{m} A_i^P}(X)\end{gathered} \tag{15}$$

证明:对于$\forall x\in U$,若$x\in\underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_1}^O}(X)$,则根据定义5可知必定存在$A_i\in\{A_1,\cdots,A_m\}$使得$P(\mathrm{TOL}_{A_i}(x),X)\geqslant 1$,即$\mathrm{TOL}_{A_i}(x)\subseteq X$,于是根据定义3可知$x\in\underline{\sum_{i=1}^{m} A_i^O}(X)$,从而可以得出结论$\underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_1}^O}(X)\subseteq\underline{\sum_{i=1}^{m} A_i^O}(X)$。类似地,易证$\underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_1}^O}(X)\supseteq\underline{\sum_{i=1}^{m} A_i^O}(X)$。综上可得$\underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_1}^O}(X)=\underline{\sum_{i=1}^{m} A_i^O}(X)$。

根据定义3和5,可知$\overline{\sum_{i=1}^{m} A_i^O}(X)=\sim\underline{\sum_{i=1}^{m} A_i^O}(\sim X)$,且$\overline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_1}^O}(X)=\sim\underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_1}^O}(\sim X)$。又因为$\underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_1}^O}(\sim X)=\underline{\sum_{i=1}^{m} A_i^O}(\sim X)$成立,所以$\overline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_1}^O}(X)=\overline{\sum_{i=1}^{m} A_i^O}(X)$显然也成立。

类似于上述证明,不难证得式(15)。

定理1说明了当β的取值为1时,定义5所示的变精度乐观多粒度粗糙集就退化为定义3所示的乐观多粒度粗糙集,而定义6所示的变精度悲观多粒度粗糙集就退化为定义4所示的悲观多粒度粗糙集。所以,从这个角度来看,变精度多粒度粗糙集是钱宇华等人的多粒度粗糙集的一种拓展形式。

定理2 令S为一不完备决策系统,$A_1\subseteq AT$,对于$\forall X\subseteq U$,有

$$\underline{\sum_{i=1}^{1} A_{i_\beta}^O}(X)=\underline{A_{1_\beta}}(X),\overline{\sum_{i=1}^{1} A_{i_\beta}^O}(X)=\overline{A_{1_\beta}}(X) \tag{16}$$

$$\underline{\sum_{i=1}^{1} A_{i_\beta}^P}(X)=\underline{A_{1_\beta}}(X),\overline{\sum_{i=1}^{1} A_{i_\beta}^P}(X)=\overline{A_{1_\beta}}(X) \tag{17}$$

证明:对于$\forall x\in U$,若$x\in\underline{\sum_{i=1}^{1} A_{i_\beta}^O}(X)$,则根据定义5,可知$P(\mathrm{TOL}_{A_1}(x),X)\geqslant\beta$,根据定义2,可知$x\in\underline{A_{1_\beta}}(X)$,从而可以得出结论$\underline{\sum_{i=1}^{1} A_{i_\beta}^O}(X)\subseteq\underline{A_{1_\beta}}(X)$。类似地,易证$\underline{\sum_{i=1}^{1} A_{i_\beta}^O}(X)\supseteq\underline{A_{1_\beta}}(X)$。综上可得$\underline{\sum_{i=1}^{1} A_{i_\beta}^O}(X)=\underline{A_{1_\beta}}(X)$。

类似于上述证明,可证得$\overline{\sum_{i=1}^{1} A_{i_\beta}^O}(X)=\overline{A_{1_\beta}}(X)$,$\underline{\sum_{i=1}^{1} A_{i_\beta}^P}(X)=\underline{A_{1_\beta}}(X)$和$\overline{\sum_{i=1}^{1} A_{i_\beta}^P}(X)=\overline{A_{1_\beta}}(X)$。

定理2说明了当仅使用一个容差关系时,定义5和6所示的变精度多粒度粗糙集就退化为定义2所示的变精度粗糙集。从这个角度来看,变精度多粒度粗糙集也是Ziarko的变精度粗糙集的一种拓展形式。

定理3 令S为一不完备决策系统,$A_1,\cdots,$

$A_m \subseteq AT$，对于∀ $X \subseteq U$，有

$$\overline{\sum\nolimits_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{O}}(X) = \{x \in U : P([x]_{A_1}, X) > 1-\beta \wedge \cdots \wedge P([x]_{A_m}, X) > 1-\beta\} \tag{18}$$

$$\overline{\sum\nolimits_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{P}}(X) = \{x \in U : P([x]_{A_1}, X) > 1-\beta \vee \cdots \vee P([x]_{A_m}, X) > 1-\beta\} \tag{19}$$

证明：仅证式(18)，式(19)的证明过程类似。对于∀ $x \in U$，根据定义 5，有

$$\begin{aligned}
&\overline{\sum\nolimits_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{O}}(X) = \sim \underline{\sum\nolimits_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{O}}(\sim X) = \\
&\{x \in U : P(\mathrm{TOL}_{A_1}(x), \sim X) < \beta \wedge \cdots \wedge P(\mathrm{TOL}_{A_m}(x), \sim X) < \beta\} = \\
&\left\{x \in U : \frac{|\mathrm{TOL}_{A_1}(x) \cap (\sim X)|}{|\mathrm{TOL}_{A_1}(x)|} < \beta \wedge \cdots \wedge \frac{|\mathrm{TOL}_{A_m}(x) \cap (\sim X)|}{|\mathrm{TOL}_{A_m}(x)|} < \beta\right\} = \\
&\left\{x \in U : 1 - \frac{|\mathrm{TOL}_{A_1}(x) \cap X|}{|\mathrm{TOL}_{A_1}(x)|} < \beta \wedge \cdots \wedge 1 - \frac{|\mathrm{TOL}_{A_m}(x) \cap X|}{|\mathrm{TOL}_{A_m}(x)|} < \beta\right\} = \\
&\left\{x \in U : \frac{|\mathrm{TOL}_{A_1}(x) \cap X|}{|\mathrm{TOL}_{A_1}(x)|} > 1-\beta \wedge \cdots \wedge \frac{|\mathrm{TOL}_{A_m}(x) \cap X|}{|\mathrm{TOL}_{A_m}(x)|} > 1-\beta\right\} = \\
&\{x \in U : P(\mathrm{TOL}_{A_1}(x), X) > 1-\beta \wedge \cdots \wedge P(\mathrm{TOL}_{A_m}(x), X) > 1-\beta\}
\end{aligned}$$

虽然在定义 5，6 中，变精度多粒度上近似都被定义为变精度多粒度下近似的补集，但定理 3 表示了变精度乐观多粒度上近似依然可以用多个不同容差类目标概念之间的多数包含关系来表示。

根据上述变精度多粒度粗糙集模型，以 1 个实例来进行具体分析。表1 为1 个不完备决策系统，其中 $U = \{x_1, \cdots, x_8\}$ 为论域，$AT = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 为条件属性集合，d 为决策属性。

表 1　不完备决策系统实例

U	a_1	a_2	A_3	a_4	d
x_1	2	1	*	1	2
x_2	*	0	0	1	1
x_3	1	1	0	0	2
x_4	2	2	1	1	2
x_5	0	*	1	0	1
x_6	1	2	0	*	2
x_7	1	1	*	1	1
x_8	0	1	*	0	1

根据决策属性 d，所得到的论域上的划分为 $U/\mathrm{IND}(\{d\}) = \{X_1, X_2\} = \{\{x_1, x_3, x_4, x_6\}, \{x_2, x_5, x_7, x_8\}\}$。令 $A_1 = \{a_1\}$，$A_2 = \{a_2\}$，$A_3 = \{a_3\}$，$A_4 = \{a_4\}$ 为 4 个不同的条件属性集合，$\beta = 0.65$. 根据定义 5，可得到如下所示的变精度乐观多粒度近似集

$$\underline{\sum_{i=1}^{4} A_{i_\beta}^{O}}(X_1) = \{x_1, x_4, x_6\}$$

$$\underline{\sum_{i=1}^{4} A_{i_\beta}^{O}}(X_2) = \{x_2, x_5, x_8\}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{4} A_{i_\beta}^{O}}(X_1) = \{x_1, x_3, x_4, x_6, x_7\}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{4} A_{i_\beta}^{O}}(X_2) = \{x_2, x_3, x_5, x_7, x_8\}$$

根据定义 6，可得到如下所示的变精度悲观多粒度近似集

$$\underline{\sum_{i=1}^{4} A_{i_\beta}^{P}}(X_1) = \varnothing,\ \underline{\sum_{i=1}^{4} A_{i_\beta}^{P}}(X_2) = \varnothing$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{4} A_{i_\beta}^{P}}(X_1) = U,\ \overline{\sum_{i=1}^{4} A_{i_\beta}^{P}}(X_2) = U$$

3　变精度多粒度粗糙集的性质

定理 4　令 S 为一不完备决策系统，$A_1, \cdots, A_m \subseteq AT$，对于∀ $X \subseteq U$，有

$$\begin{aligned}
&\underline{\sum\nolimits_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{P}}(X) \subseteq \underline{\sum\nolimits_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{O}}(X) \\
&\overline{\sum\nolimits_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{O}}(X) \subseteq \overline{\sum\nolimits_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{P}}(X)
\end{aligned} \tag{20}$$

证明：对于∀ $x \in \underline{\sum\nolimits_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{P}}(X)$，根据定义 6，对于∀ $A_i \in \{A_1, \cdots, A_m\}$，都有 $P(\mathrm{TOL}_{A_i}(x), X) \geqslant \beta$。再根据定义 5，$x \in \underline{\sum\nolimits_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{O}}(X)$ 显然成立，即 $\underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{P}}(X) \subseteq \underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{O}}(X)$。类似地，易证 $\overline{\sum\nolimits_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{O}}(X) \subseteq \overline{\sum\nolimits_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{P}}(X)$。

定理 4 说明了相比于变精度悲观多粒度下近似来说，变精度乐观多粒度下近似的要求更为宽松；相比于变精度悲观多粒度上近似来说，变精度乐观多粒度上近似的要求更为严格。

定理 5　令 S 为一不完备决策系统，$A_1, \cdots, A_m \subseteq AT$，对于∀ $X \subseteq U$，变精度乐观多粒度粗糙集有如下性质

$$\begin{aligned}
&\underline{\sum\nolimits_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{O}}(U) = \overline{\sum\nolimits_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{O}}(U) = U \\
&\underline{\sum\nolimits_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{O}}(\varnothing) = \overline{\sum\nolimits_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{O}}(\varnothing) = \varnothing
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\beta_1 \leqslant \beta_2 \Rightarrow \underline{\sum\nolimits_{i=1}^{m} A_{i_{\beta_1}}^{O}}(X) \supseteq \underline{\sum\nolimits_{i=1}^{m} A_{i_{\beta_2}}^{O}}(X)$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m} A_{i}^{O}}_{\beta_1}(X) \subseteq \overline{\sum_{i=1}^{m} A_{i}^{O}}_{\beta_2}(X) \tag{22}$$

$$\underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{O}}\left(\bigcap_{j=1}^{n} X_j\right) \subseteq \bigcap_{j=1}^{n} \underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{O}}(X_j) \tag{23}$$

$$\underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{O}}\left(\bigcup_{j=1}^{n} X_j\right) \supseteq \bigcup_{j=1}^{n} \underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{O}}(X_j) \tag{24}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{O}}\left(\bigcap_{j=1}^{n} X_j\right) \subseteq \bigcap_{j=1}^{n} \overline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{O}}(X_j) \tag{25}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{O}}\left(\bigcup_{j=1}^{n} X_j\right) \supseteq \bigcup_{j=1}^{n} \overline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{O}}(X_j) \tag{26}$$

证明：(1) 对于$\forall\ x\in U$，根据定义5，有$x\in \underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{O}}(U)\Leftrightarrow \exists\ A_i\in\{A_1,\cdots,A_m\}$，$P(\mathrm{TOL}_{A_i}(x),U)\geqslant\beta\Leftrightarrow x\in U$，从而可知$\underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{O}}(U)=U$。类似地，易证$\overline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{O}}(U)=U$。

对于$\forall\ x\in U$，根据定义5，有$x\in \underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{O}}(\varnothing)\Leftrightarrow\exists\ A_i\in\{A_1,\cdots,A_m\}$，$P(\mathrm{TOL}_{A_i}(x),\varnothing)\geqslant\beta\Leftrightarrow x\in\varnothing$，从而可知$\underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{O}}(\varnothing)=\varnothing$。类似地，易证$\overline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{O}}(\varnothing)=\varnothing$。

(2) 对于$\forall\ x\in \underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_{\beta_2}}^{O}}(X)$，根据定义5，必定$\exists\ A_i\in\{A_1,\cdots,A_m\}$使得$P(\mathrm{TOL}_{A_i}(x),X)\geqslant\beta_2$。又因为$\beta_1\leqslant\beta_2$，所以就有$P(\mathrm{TOL}_{A_i}(x),X)\geqslant\beta_1$，即$x\in \underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_{\beta_1}}^{O}}(X)$，从而证得$\underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_{\beta_1}}^{O}}(X)\supseteq \underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_{\beta_2}}^{O}}(X)$，类似地，易证$\overline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_{\beta_1}}^{O}}(X)\subseteq \overline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_{\beta_2}}^{O}}(X)$。

(3) 对于$\forall\ x\in \underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{O}}\left(\bigcap_{j=1}^{n}X_j\right)$，根据定义5，必定$\exists\ A_i\in\{A_1,\cdots,A_m\}$使得$P\left(\mathrm{TOL}_{A_i}(x),\bigcap_{j=1}^{n}X_j\right)\geqslant\beta$，从而对于$\forall\ X_j(j=1,\cdots,n)$，就有$P(\mathrm{TOL}_{A_i}(x),X_j)\geqslant\beta$，于是根据定义5，可知$x\in \underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{O}}(X_j)$，即$x\in\bigcap_{j=1}^{n}\underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{O}}(X_j)$，从而证得$\underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{O}}\left(\bigcap_{j=1}^{n}X_j\right)\subseteq\bigcap_{j=1}^{n}\underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{O}}(X_j)$。

根据上述证明过程，不难证得式(24～26)。

定理6 令S为一不完备决策系统，$A_1,\cdots,A_m\subseteq AT$，对于$\forall\ X\subseteq U$，变精度悲观多粒度粗糙集有如下性质

$$\underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{P}}(U)=\overline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{P}}(U)=U$$

$$\underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{P}}(\varnothing)=\overline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{P}}(\varnothing)=\varnothing \tag{27}$$

$$\beta_1\leqslant\beta_2\Rightarrow \underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i}^{P}}_{\beta_1}(X)\supseteq \underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i}^{P}}_{\beta_2}(X)$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m} A_{i}^{P}}_{\beta_1}(X)\subseteq \overline{\sum_{i=1}^{m} A_{i}^{P}}_{\beta_2}(X) \tag{28}$$

$$\underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{P}}\left(\bigcap_{j=1}^{n} X_j\right) \subseteq \bigcap_{j=1}^{n} \underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{P}}(X_j) \tag{29}$$

$$\underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{P}}\left(\bigcup_{j=1}^{n} X_j\right) \supseteq \bigcup_{j=1}^{n} \underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{P}}(X_j) \tag{30}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{P}}\left(\bigcap_{j=1}^{n} X_j\right) \subseteq \bigcap_{j=1}^{n} \overline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{P}}(X_j) \tag{31}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{P}}\left(\bigcup_{j=1}^{n} X_j\right) \supseteq \bigcup_{j=1}^{n} \overline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{P}}(X_j) \tag{32}$$

证明：与定理5的证明过程类似。

钱宇华等人的多粒度粗糙集模型虽然是建立在多个相互独立的二元关系上，但是他仍然使用的是严格包含关系。而本文提出的变精度多粒度粗糙集模型则采用了多数包含的概念，因而有必要对这两种不同的多粒度粗糙集模型进行对比分析。

定理7 令S为一不完备决策系统，$A_1,\cdots,A_m\subseteq AT$，对于$\forall\ X\subseteq U$，有

$$\underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i}^{O}}(X)\subseteq \underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{O}}(X) \tag{33}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m} A_{i}^{O}}(X)\supseteq \overline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{O}}(X) \tag{34}$$

$$\underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i}^{P}}(X)\subseteq \underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{P}}(X) \tag{35}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m} A_{i}^{P}}(X)\supseteq \overline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{P}}(X) \tag{36}$$

证明：对于$\forall\ x\in \underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i}^{O}}(X)$，根据定义3，必定$\exists\ A_i\in\{A_1,\cdots,A_m\}$，使得$\mathrm{TOL}_{A_i}(x)\subseteq X$。根据多数包含的定义，可知$P(\mathrm{TOL}_{A_i}(x),X)=1\geqslant\beta$，再由定义5可以看出$x\in \underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{O}}(X)$显然成立，即$\underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i}^{O}}(X)\subseteq \underline{\sum_{i=1}^{m} A_{i_\beta}^{O}}(X)$。类似地，易证式(34～36)。

定理7说明了可变精度多粒度粗糙集与钱宇华的传统多粒度粗糙集之间的关系。在多粒度环境下，无论是乐观还是悲观的情形，采用错误分类率的方法可以得到更大的下近似集和更小的上近似集，从而使得多粒度的粗糙近似精度得以提高。

4 结束语

不完备信息系统中粗糙集的拓展是目前粗糙集理论研究中的一个热点问题。本文以容差关系为基础，在变精度粗糙集和多粒度粗糙集的基础上，提出

了变精度多粒度粗糙集的概念，分别包括变精度乐观多粒度粗糙集和变精度悲观多粒度粗糙集。这两种变精度多粒度粗糙集模型都是基于容差关系的变精度粗糙集和多粒度粗糙集的拓展形式。

在本文工作的基础上，笔者将分别采用分辨矩阵和启发式算法，对新提出的变精度多粒度粗糙集的约简问题进行讨论。

参考文献：

[1] Pawlak Z, Skowron A. Rudiments of rough sets[J]. Information Sciences, 2007, 177(1): 3-27.

[2] Pawlak Z, Skowron A. Rough sets: some extensions[J]. Information Sciences, 2007, 177(1): 28-40.

[3] Pawlak Z, Skowron A. Rough sets and boolean reasoning[J]. Information Sciences, 2007,177(1): 41-73.

[4] Leung Y, Li D Y. Maximal consistent block technique for rule acquisition in incomplete information systems[J]. Information Sciences,2003, 15(1): 85-106.

[5] Inuiguchi M, Yoshioka Y, Kusunoki Y. Variable-precision dominance-based rough set approach and attribute reduction[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2009, 50: 1199-1214.

[6] Ningler M, Stockmanns G, Schneider G, et al. Adapted variable precision rough set approach for EEG analysis[J]. Artificial Intelligence in Medicine, 2009, 47: 239-261.

[7] 颜锦江，黄兵. 不完备信息系统中基于相似度的变精度粗糙集模型[J]. 系统工程理论与实践，2006，26(10)：67-72.

[8] Qian Y H, Liang J Y, Yao Y Y, et al. MGRS: a multi-granulation rough set[J]. Information Sciences, 2010, 180(6): 949-970.

[9] Qian Y H, Liang J Y, Wei W. Pessimistic rough decision [C] // Second International Workshop on Rough Sets Theory. Zhoushan, China: [s. n.], 2010: 440-449.

[10] Qian Y H, Liang J Y, Dang C Y. Incomplete multigranulation rough set[J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A, 2010, 40(2): 420-431.