第 43 卷第 6 期 南京航空航天大学学报 Vol. 43 No. 6
2011 年 12 月 Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics Dec. 2011

一种新的鲁棒非线性卡尔曼滤波

常国宾 许江宁 常路宾 纪 兵
(海军工程大学导航工程系，武汉，430033)

摘要：Huber 方法是一种基于 l_1/l_2 联合范数的估计方法，该方法可以实现估计的鲁棒性，同时尽量不损失滤波精度和效率。基于 Huber 估计的无味卡尔曼滤波虽提高了无味卡尔曼滤波的鲁棒性，但这种方法用统计线性回归模型来近似非线性的观测模型，损失了无味变换的精度。从 Huber 方法的数学意义出发，对观测信息（观测值或观测噪声）进行重新构造，然后对精确的非线性观测方程进行标准的无味卡尔曼滤波，这种新的基于 Huber 方法的无味卡尔曼滤波无需对非线性观测方程进行线性近似，在保持鲁棒性的前提下提高了滤波精度。通过一个具有混合高斯分布观测噪声的简明实例，验证了新算法在鲁棒性、滤波精度以及估计一致性方面的优势。

关键词：无味卡尔曼滤波；鲁棒性；Huber 方法；统计线性回归近似

中图分类号：TN911.72 **文献标识码**：A **文章编号**：1005-2615(2011)06-0754-06

New Kind of Robust Nonlinear Kalman Filter

Chang Guobin, Xu Jiangning, Chang Lubin, Ji Bing
(Navigation Engineer Department, Navy University of Engineering, Wuhan, 430033, China)

Abstract: Huber method combines l_1/l_2 norms and provides robustness and sufficiently good precision and efficiency. In the Huber-based unscented Kalman filter, the nonlinear measurement equations are approximated by statistical linear regressed ones, but such approximation weaks the precision of unscented transformation. So, a new kind of Huber-based unscented Kalman filter is presented. Measurement information (measurements or measurements noise) are reformulated using Huber's cost function, and the standard unscented Kalman filter is applied to exact nonlinear measurement equation. The new method, without linear approximation, retains the high precision while the robustness is ensured. Simulation is established with a simple but evident model, and the robustness, the efficiency and the consistency of the new method are proved.

Key words: unscented Kalman filter; robustness; Huber method; statistical linear regression approximation

与最小二乘估计（Least square estimator, LSE）类似，卡尔曼滤波（Kalman filter, KF）是基于 l_2 范数最小推导的，KF 综合利用了系统模型、随机量的统计特性等信息，其应用范围更广，在模型和分布的假设成立时，可以得到优于 LSE 的估计精度。当两种假设不成立时，需要对KF 进行改进，本文研究在非线性系统模型（状态方程和观测方程均非线性）和非高斯观测噪声（干扰高斯分布，对称分布的干扰分布，其具体形式可以未知）条件下，滤波算法的精度和鲁棒性问题。

各种非线性 KF 用于解决非线性系统的滤波问题。其中曾被广泛应用的是20 世纪60，70 年代提出的基于一阶泰勒级数近似的扩展卡尔曼滤波（Extended Kalman filter, EKF）及其各种改进[1]。90 年代提出了各种新的非线性滤波方法，如无味卡尔曼滤波（Unscented Kalman filter, UKF）[2]，

基金项目：国家自然科学基金(40904018)资助项目。
收稿日期：2011-05-25；**修订日期**：2011-08-12
通讯作者：许江宁，男，教授，博士生导师，E-mail：Xujiangning@hotmail.com。

分开差分滤波(Divided difference filter，DDF)，粒子滤波(Particle filter，PF)，等。其中UKF、DDF 和其他一些类似方法属于同一类基于确定性采样点的免微分滤波方法，Van der Merwe 在其博士论文中将这一类方法统称为Sigma 点卡尔曼滤波(Sigma point Kalman filter，SPKF)，进行了统一研究[3]。学者和工程师们在理论和应用方面对各种SPKF 进行了研究。SPKF 的含义可以从多个角度进行解释，如SPKF 提出的分布采样观、有限差分观、多项式插值观，以及此后的完全对称函数精确积分观和Lefebvre 提出的统计线性回归观[4]。不失一般性，本文以UKF 为研究对象。

高斯和滤波(Gaussian sum filter，GSF)和粒子滤波可以某种程度上解决随机分布非高斯时的滤波问题，但这些方法仍然要求随机噪声的统计特性与假设一致(尽管可以为非高斯分布)，对随机噪声统计特性与假设存在偏差时的鲁棒性问题没有涉及。鲁棒性最早由Box 提出[5]，当数据与假设分布存在偏差时，鲁棒性描述对这种偏差不敏感的处理方法，对于鲁棒性的概念以及各种鲁棒估计方法可参见鲁棒统计学创始人之一的Hampel 的相关文献[6]。一个经严格推导的鲁棒方法是Huber 提出的广义极大似然估计，即M 估计，同时Huber 给出了解决一类在高斯分布附近存在对称干扰问题的鲁棒处理方法(Huber 方法)[7]。这种方法结合l_1/l_2两种范数构建代价函数，对于干扰高斯分布的情形，可以使最大渐进估计方差达到最小，其鲁棒性优于基于l_2 范数的估计方法，同时尽量保持纯高斯分布时l_2 范数的估计效率。基于l_2 范数的KF 同样是不鲁棒的，学者对Huber 方法在鲁棒滤波领域的应用进行了研究。Karlgaard 从DDF 的统计线性回归观点[4]出发，推导了基于 Huber 方法的鲁棒DDF[8]，与此方法相同，Wang 研究了基于 Huber估计的 UKF(HUKF)在视频相对导航中的应用[9]。

在Lefebvre 从统计线性回归的观点对UKF 的解释中，明确指出UT 是在方差传递时考虑了线性化误差补偿的统计线性回归[4]，如果用回归得到的线性模型进行方差传递(而不是像UT 那样考虑线性化误差补偿)，会造成低估传递方差，进而影响滤波精度。因此，Karlgaard 和Wang 研究的基于统计线性化近似模型的鲁棒滤波方法损失了Sigma 点方法原有的精度。Huber 方法有重加权平均和伪观测量(截断观测量)平均两种含义[10]，从这两种含义出发，本文对观测信息(观测值或观测方差)进行重新构建，然后采用标准UKF 的观测更新算法对非线性观测方程进行滤波，无需对非线性观测方程进行线性化近似，从而得到一种真正意义上的非线性鲁棒滤波方法。新方法在鲁棒性、滤波精度、和滤波一致性方面都明显优于基于统计线性化近似模型的鲁棒滤波方法，数值仿真的结果验证了本文的结论。

1　基于统计线性化近似的HUKF

1.1　无味卡尔曼滤波

状态方程和观测方程表示如下

$$\boldsymbol{x}_k = f(\boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{w}_{k-1}) \tag{1}$$

$$\boldsymbol{y}_k = h(\boldsymbol{x}_k, \eta_k) \tag{2}$$

式中：$\boldsymbol{x}_k$，$\boldsymbol{y}_k$，$\boldsymbol{w}_k$ 和η_k 分别为k 时刻的n 维状态、m 维观测、过程噪声和观测噪声。假设两种噪声均符合高斯分布，方差阵分别为$\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{R}$。

Julier 提出了用于非线性函数均值和方差传递的无味变换[2](Unscented transformation，UT)。UT 用确定性采样方法得到一组带权值的样本点，用以表示状态量的分布，一般称为Sigma 点。将每个Sigma 点代入非线性方程，得到对应的函数样本值，基于这些值求出函数的样本均值和样本方差。令 $y=f(x)$表示任一给定的非线性方程，令x的Sigma 点集为$\{\chi_l W_l\}$，$l=0,1,\cdots,2n$，采样策略详见文献[2]。传递Sigma 点，并计算相关的样本统计量，用这些统计量来表示传递均值、传递方差以及传递前后的互协方差矩阵。

$$\gamma_l = f(\chi_l) \tag{3}$$

$$\hat{\boldsymbol{y}} = \sum_{l=0}^{2n} W_l \gamma_l \tag{4}$$

$$\hat{\boldsymbol{P}}_{yy} = \sum_{l=0}^{2n} W_l (\gamma_l - \hat{\boldsymbol{y}})(\gamma_l - \hat{\boldsymbol{y}})^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

$$\hat{\boldsymbol{P}}_{xy} = \sum_{l=0}^{2n} W_l (\chi_l - \hat{\boldsymbol{x}})(\gamma_l - \hat{\boldsymbol{y}})^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

当式(3)为状态方程时，由式(4,5)可以得到状态传递均值、传递方差(考虑过程噪声)。当式(3)为观测方程时，将上述样本统计量代入KF 观测更新公式，得到观测更新均值式(7)和方差式(8)

$$\hat{\boldsymbol{x}}^{+} = \hat{\boldsymbol{x}}^{-} + \boldsymbol{K}(\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}}^{-}) \tag{7}$$

$$\boldsymbol{P}_{xx} = \boldsymbol{P}_{xx}^{-} - \boldsymbol{K}\boldsymbol{P}_{yy}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{P}_{xy}\boldsymbol{P}_{yy}^{-1} = \boldsymbol{P}_{xy}(\boldsymbol{P}_{yy} + \boldsymbol{R})^{-1} \tag{9}$$

为了减少溢出并保持方差矩阵的对称正定性质，可以采用数值稳定的平方根滤波形式(DDF 在推导时用的是平方根形式)。

1.2　基于Huber 方法的无味卡尔曼滤波

上述方法是在观测噪声为高斯分布，且噪声的

统计特性已知时得到的,当这种假设不成立时,该方法的滤波精度将会明显下降[8-11],说明这种方法不具有鲁棒性。将Huber方法用于SPKF的观测更新,可得到基于Huber方法的鲁棒滤波方法。Karlgaard[8]和Wang[9]推导了基于非线性观测方程统计线性回归近似鲁棒滤波。以HUKF为例,简单介绍其推导过程。

k 时刻状态真值和预测值的关系如下

$$\boldsymbol{x}_k = \hat{\boldsymbol{x}}_k^- + \delta\boldsymbol{x}_k \tag{10}$$

预测误差 $\delta\boldsymbol{x}_k$ 的方差为 P_{xx}^-。

对观测方程进行线性化,其斜率矩阵为

$$\boldsymbol{H}_k = ((\boldsymbol{P}_{xx}^-)^{-1}\boldsymbol{P}_{xy})^{\mathrm{T}} \tag{11}$$

构造线性回归模型

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_k - h(\hat{\boldsymbol{x}}_k^-) + \boldsymbol{H}_k\hat{\boldsymbol{x}}_k^- \\ \hat{\boldsymbol{x}}_k^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_k \\ \boldsymbol{I} \end{bmatrix}\boldsymbol{x}_k + \begin{bmatrix} \eta_k \\ -\delta\boldsymbol{x}_k \end{bmatrix} \tag{12}$$

定义下述各量

$$\boldsymbol{S}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_k & 0 \\ 0 & \boldsymbol{P}_{xx}^- \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{S}_k^{-1/2}\begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_k - h(\hat{\boldsymbol{x}}_k^-) + \boldsymbol{H}_k\hat{\boldsymbol{x}}_k^- \\ \hat{\boldsymbol{x}}_k^- \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$\boldsymbol{M}_k = \boldsymbol{S}_k^{-1/2}\begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_k \\ \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$\xi_k = \boldsymbol{S}_k^{-1/2}\begin{bmatrix} \eta_k \\ -\delta\boldsymbol{x}_k \end{bmatrix} \tag{16}$$

则 ξ 的协方差阵为单位矩阵,并有

$$\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{M}_k\boldsymbol{x}_k + \xi_k \tag{17}$$

定义Huber方法的代价函数

$$\boldsymbol{v}_i = (\boldsymbol{M}_k\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{z}_k)_i \tag{18}$$

$$J(\boldsymbol{x}_k) = \sum_{i=1}^{m}\rho(\boldsymbol{v}_i) \tag{19}$$

$$\rho(\boldsymbol{v}_i) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\boldsymbol{v}_i^2 & |\boldsymbol{v}_i| \leqslant \gamma \\ \gamma|\boldsymbol{v}_i| - \dfrac{1}{2}\gamma^2 & |\boldsymbol{v}_i| > \gamma \end{cases} \tag{20}$$

在式(18,19)中求残差的第 i 个分量 $\boldsymbol{v}_i$ 以及 $\boldsymbol{v}_i$ 的函数时,要用到待估计的未知量,处理的方法是用前一次迭代得到的估计值代入求解。当 γ 取1.345时,纯高斯分布条件下,该方法的估计效率为基于 l_2 范数估计的95%,关于 γ 的更详细讨论可参见文献[11]。定义 $\varphi(\boldsymbol{v}_i)=\rho'(\boldsymbol{v}_i)$,令式(19)最小

$$\sum_{i=1}^{m}\varphi(\boldsymbol{v}_i)\frac{\partial\boldsymbol{v}_i}{\partial\boldsymbol{x}_i} = 0 \tag{21}$$

定义 $\psi(\boldsymbol{v}_i)=\varphi(\boldsymbol{v}_i)/\boldsymbol{v}_i$

$$\psi(\boldsymbol{v}_i) = \begin{cases} 1 & |\boldsymbol{v}_i| \leqslant \gamma \\ \dfrac{\gamma}{|\boldsymbol{v}_i|} & |\boldsymbol{v}_i| > \gamma \end{cases} \tag{22}$$

$$\boldsymbol{\varPsi} = \mathrm{diag}[\psi(\boldsymbol{v}_i)] \tag{23}$$

$$\boldsymbol{M}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varPsi}(\boldsymbol{M}_k\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{z}_k) = 0 \tag{24}$$

用迭代法解式(24)

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k^{(j+1)} = (\boldsymbol{M}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varPsi}^{(j)}\boldsymbol{M}_k)^{-1}\boldsymbol{M}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varPsi}^{(j)}\boldsymbol{z}_k \tag{25}$$

式中 j 表示第 j 次迭代。迭代结束后求得估值的方差

$$\boldsymbol{P}_{xx}^+ = (\boldsymbol{M}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varPsi}\ \boldsymbol{M}_k)^{-1} \tag{26}$$

一般只迭代一次[8-9],迭代初值可以取 $(\boldsymbol{M}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_k)^{-1}\boldsymbol{M}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}_k$,也可以取UKF观测更新后的估计值(文献[8]中式(46)),仿真中发现后者的各方面性能略微优于前者,本文以后者作为新方法的比较对象。

由上述推导过程可知,此方法在构建基于Huber方法的鲁棒滤波算法时,采用了式(11)所示的统计线性化模型。如果采用这种线性化的方程进行方差传递,应有

$$\boldsymbol{P}_{yy} = \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{P}_{xx}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}} \tag{27}$$

然而,用UT进行方差传递时,不是采用式(27),而是在式(27)基础上考虑线性化误差的方差补偿方法,经推导可得式(5)[4],显然式(5)要比式(27)更精确。Karlgaard和Wang方法中用观测方程的线性化近似(即没有考虑在方差传递时的线性化误差方差补偿)进行滤波,造成对传递方差(即观测方差)的低估,进而影响滤波精度,这在第3节中的数值仿真中可以直观体现。

2 无需线性化近似的HUKF

将Huber方法直接应用于非线性的观测方程,不对其进行线性化近似,得到了一种真正意义上的非线性鲁棒滤波算法。

构造非线性回归模型(加性观测噪声)

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_k \\ \hat{\boldsymbol{x}}_k^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(\boldsymbol{x}_k) \\ \boldsymbol{x}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_k \\ -\delta\boldsymbol{x}_k \end{bmatrix} \tag{28}$$

类似于式(13~17)的过程

$$\breve{\boldsymbol{z}}_k = \boldsymbol{S}_k^{-1/2}\begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_k \\ \hat{\boldsymbol{x}}_k^- \end{bmatrix} \tag{29}$$

$$g(\boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{S}_k^{-1/2}\begin{bmatrix} h(\boldsymbol{x}_k) \\ \boldsymbol{x}_k \end{bmatrix} \tag{30}$$

式中 S_k 的构造如式(13);$\breve{\boldsymbol{z}}_k$ 是为了表示和第1.2节中 $\boldsymbol{z}_k$ 的区别。则有

$$\breve{z}_k = g(\boldsymbol{x}_k) + \xi_k \tag{31}$$

式中ξ_k 的构造如式(16)。

$$\breve{\boldsymbol{v}}_i = (g(\boldsymbol{x}_k) - \breve{z}_k)_i \tag{32}$$

同样,在计算上面的残差时将上一次的迭代值代入求解,在本例中由于只进行一次迭代,把状态预测值代入。类似于式(20～23)构造$\breve{\Psi}$。

$\breve{\Psi}$作用可以从两个角度进行解释[10]。(1)重加权作用,对不同大小的残差乘以不同的权重(权重大小为$\psi(\boldsymbol{v}_i)$的绝对值),也就是说,用$\breve{\Psi}$取代残差的单位方差阵;(2)求残差的加权平方和。也等价于对式(27)中的方差进行重新构建,定义$\widetilde{\boldsymbol{S}}_k$ 为修正后的方差矩阵

$$\widetilde{\boldsymbol{S}}_k = \boldsymbol{S}_k^{1/2}\breve{\Psi}(\boldsymbol{S}_k^{1/2})^{\mathrm{T}} \tag{33}$$

易知,$\widetilde{\boldsymbol{S}}_k$ 和$\boldsymbol{S}_k$ 中对应$\hat{\boldsymbol{x}}_k^-$ 的部分没有变化

$$\widetilde{\boldsymbol{S}}_k^x = \widetilde{\boldsymbol{S}}_k(m+1:m+n,\quad m+1:m+n) = \boldsymbol{S}_k(m+1:m+n,\quad m+1:m+n) = \boldsymbol{P}_{xx}^- \tag{34}$$

定义$\widetilde{\boldsymbol{R}}_k$ 为修正后的观测噪声方差阵

$$\widetilde{\boldsymbol{R}}_k = \widetilde{\boldsymbol{S}}_k(1:m,\quad 1:m) \tag{35}$$

用$\widetilde{\boldsymbol{R}}$ 取代$\boldsymbol{R}_k$ 对式(2)用标准 UKF 进行滤波。

另一种解释是构造伪观测值(截断观测值),当$|\boldsymbol{v}_i|>\gamma$ 时,用$\mathrm{sign}(\boldsymbol{v}_i)\gamma$ 来取代$\boldsymbol{v}_i$,定义修正后的残差为

$$\tilde{\boldsymbol{v}} = \breve{\Psi}\boldsymbol{v} \tag{36}$$

等价于修正$\breve{z}_k$,定义修正后的$\breve{z}_k$ 为$\tilde{z}_k$

$$\tilde{z}_k = g(\hat{\boldsymbol{x}}_k^-) + \tilde{\boldsymbol{v}} \tag{37}$$

易知,$\tilde{z}_k$ 和$\breve{z}_k$ 中对应$\hat{\boldsymbol{x}}_k^-$ 的部分没有变化

$$\tilde{z}_k^x = \tilde{z}_k(m+1:m+n) = \breve{z}_k(m+1:m+n) = \hat{\boldsymbol{x}}_k^- \tag{38}$$

定义$\tilde{\boldsymbol{y}}_k$ 为修正后的观测值

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_k = \tilde{z}_k(1:m) = g(\hat{\boldsymbol{x}}_k^-) + \breve{\Psi}(1:m,\quad 1:m)\boldsymbol{v}(1:m) \tag{39}$$

用$\tilde{\boldsymbol{y}}_k$ 取代$\boldsymbol{y}_k$ 对式(2)用标准 UKF 进行滤波。

可以证明上述两种处理方法的效果是相同的。采用上述方法重新构造信息时,只能重新构造观测噪声方差阵和观测值的一种,而不能对两者都进行重新构造,新方法没有对观测方程进行线性化近似,保持了UT 在方差传递中原有的精度。

3　实例仿真

用单变量非平稳增长模型来考察算法的性能。

$$x_k = 0.5x_{k-1} + 25\frac{x_{k-1}}{1+x_{k-1}^2} + 8\cos(1.2(k-1)) + w_{k-1} \tag{40}$$

$$z_k = \frac{x_k^2}{20} + v_k \quad k = 1,2,\cdots,K \tag{41}$$

其中系统噪声$w_k-1\sim N(0,1)$,仿真时间$K=500$,仿真时用于产生仿真数据的初始真值$x_0=0.1$,Monte Carlo 仿真次数取为$M=50$。在进行滤波解算时,设定滤波初始值为$\hat{x}_0^+=0$,$P_0^+=1$。观测噪声为式(42)所示的混合高斯分布,$\varepsilon=0.5$,$\sigma_1=1$,σ_2 取σ_1 的不同倍数。

$$pdf(v_k) = (1-\varepsilon)N(0,\sigma_1) + \varepsilon N(0,\sigma_2) \tag{42}$$

定义第m 次实验的时域均方误差为

$$\mathrm{TMSE}(m) = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}(x_k^m - \hat{x}_k^{+m})^2 \tag{43}$$

定义k 时刻的50 次实验的均方根估计误差为

$$\mathrm{RMSE}(k) = \sqrt{\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}(x_k^m - \hat{x}_k^{+m})^2} \tag{44}$$

定义k 时刻的50 次实验的平均估计标准差为

$$\mathrm{MSD}(k) = \sqrt{\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}(P_k^+(1,1))^m} \tag{45}$$

定义总的MSE 为

$$\mathrm{MSE} = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\mathrm{MSE}(m) \tag{46}$$

定义估计值与估计方差一致性比率R_c 为

$$R_c = \frac{\mathrm{number}(\mathrm{RMSE} - 3\mathrm{MSD} < 0)}{K} \tag{47}$$

式(32～35)中m 和k 分别表示第m 次Monte Carlo 仿真和k 时刻,分别取$1\sim M$ 和$1\sim K$。

对$\sigma_2=k\sigma_1$,$k=0,1,\cdots,15$ 共16 种情况进行了仿真,本文只给出$k=5$ 和$k=12$ 两种条件(条件1 和条件2)时的仿真结果。图1 和图2 是两种条件下各滤波算法的时域MSE(TMSE),图3～5,图6～8 分别为两种条件下3 种滤波算法在k 时刻的RMSE 和3σ(3MSD)。表1 为两种条件下3 种滤波算法的MSE 以及所有时间点内估计值和估计方差相一致的比率。HUKF1 为基于观测方程统计线性化近似的HUKF,HUKF2 为本文提出的算法。

表1　各滤波器在两种条件下的MSE 和R_c

滤波算法	条件1		条件2	
	MSE	R_c	MSE	R_c
UKF	109.119	0.72	231.059	0.38
HUKF1	151.412	0.32	215.306	0.25
HUKF2	84.342	1.00	82.056	1.00

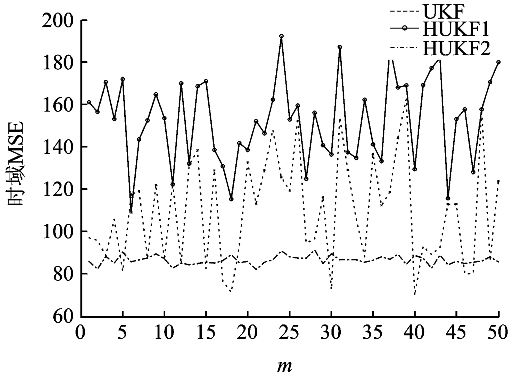

图1 条件1时3种算法的TMSE

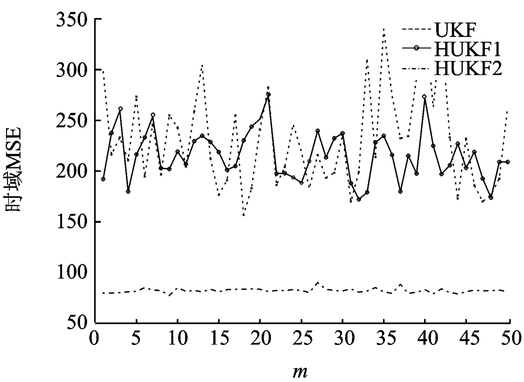

图2 条件2时3种算法的TMSE

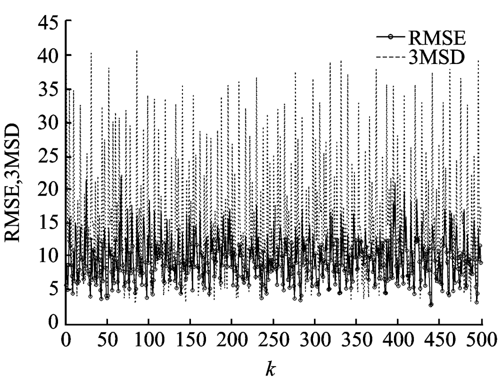

图3 条件1时UKF的RMSE与3σ曲线

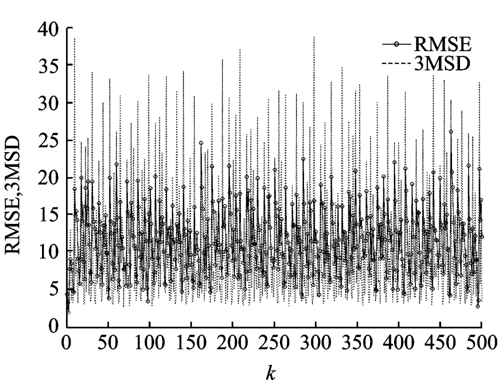

图4 条件1时HUKF1的RMSE与3σ曲线

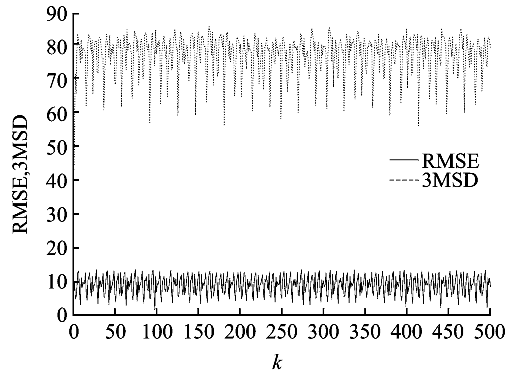

图5 条件1时HUKF2的RMSE与3σ曲线

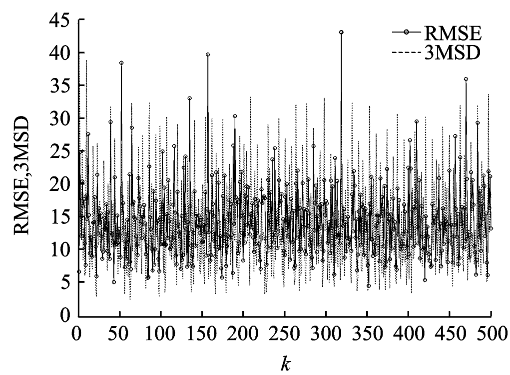

图6 条件2时UKF的RMSE与3σ曲线

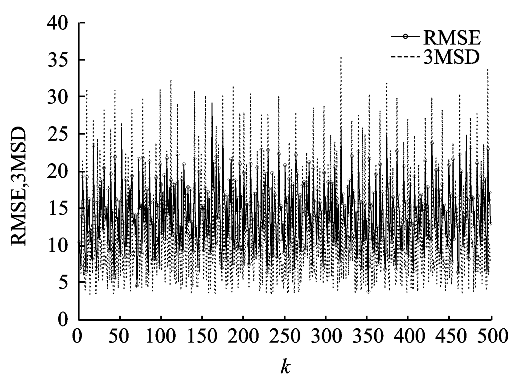

图7 条件2时HUKF1的RMSE与3σ曲线

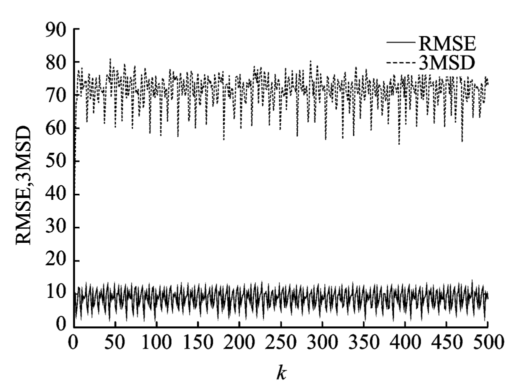

图8 条件2时HUKF2的RMSE与3σ曲线

通过对图和表的分析可以得到以下结论：

(1)滤波精度。由图1，图2 和表1 中各滤波算法之间的比较可以发现：与UKF 和HUKF1 相比，本文提出的方法在滤波精度方面具有非常明显的优势；HUKF1 在第 1 种条件下的精度低于UKF，而在第 2 种情况下结论相反。HUKF1 在每个时刻进行完整的UKF 后，又进行一次基于Huber 方法的线性回归估计，笔者认为这一额外的估计过程具有两面性的作用：一方面在观测噪声分布与假设分布存在偏差时，这一过程可以减小偏差的影响，提高UKF 的滤波精度；另一方面这种线性化近似方法也会对原来的滤波结果产生污染，从而降低滤波精度。当分布偏差较大时，HUKF1 对滤波精度的提升作用占主要方面，其精度高于UKF，这对应于第 2 种仿真条件；当分布偏差相对较小时，该方法对滤波精度的降低作用占主要方面，其精度低于UKF，这对应于第1 种仿真条件。而本文提出的方法HUKF2 只有在观测噪声分布存在偏差时对滤波精度的提高作用，而没有因线性化近似带来的对滤波精度的降低作用，所以精度在两种条件下都具有明显的优势。

(2)估计一致性。由图3～5 的比较、图6～8 的比较以及表1 中3 种算法的一致性比率的比较可以发现：本文的状态估计和方差估计是一致的，而另外两种滤波算法都不一致。

(3)鲁棒性。由图1 和图2 中同一滤波算法在两种不同条件下的滤波精度比较以及表 1 中同一滤波算法在两种不同条件下总 MSE 和 R_c 的比较可以发现：新的方法在两种仿真条件下的估计都具有一致性，其滤波精度在两种情况下也基本没有变化，说明新方法具有较强的鲁棒性；HUKF1 虽然其滤波精度和估计的一致性都比较差，但该算法在两种不同情况下的指标变化不大，说明也具有一定的鲁棒性；UKF 的滤波精度和估计一致性在两种情况下差别较大，说明该方法不具备鲁棒性。

4　结束语

通过对基于观测方程统计线性化近似的HUKF 的分析发现：该近似会降低滤波精度。从Huber 方法的重加权平均和伪观测量(截断观测量)平均两种含义出发，推导了无需对观测方程进行线性化近似的HUKF。新的方法结合了UKF 的高滤波精度特性，以及Huber 方法的鲁棒性，可以在不同条件下达到较高的滤波精度和较好的滤波一致性。仿真结果表明：新方法在滤波精度、估计一致性和鲁棒性等方面都明显优于UKF 和基于观测方程线性化近似的HUKF。

参考文献：

[1] Candy J. Bayesian signal processing[M]. New Jersey: John Wiley & Sons, 2009.

[2] Julier S J, Uhlmann J K. A new extension of the Kalman filter to nonlinear systems[C]// Proc SPIE-Int Soc Opt Eng. Orlando: SPIE, 1997: 182-193.

[3] Van der Merwe R. Sigma-point Kalman filters for probabilistic inference in dynamic state-space models [D]. Portland, USA: OGI School of Sci & Eng, Oregon Health & Sci Univ, 2004.

[4] Lefebvre T, Bruyninckx H, de Schutter J. Comment on "A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators" [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(8): 1406-1409.

[5] Box G E P. Non-normality and tests on variances [J]. Biometrika, 1953, 40 (3): 318-335.

[6] Hampel F R, Roussseeuw P J, Ronchetti E W A. Robust statistics: The approach based on influence functions[M]. New York: Wiley, 1986.

[7] Huber P J. Robust estimation of a location parameter [J]. Annals of Mathematical Statistics, 1964, 35 (2): 73-101.

[8] Karlgaard C D, Schaub H. Huber-based divided difference filtering [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2007, 30(3): 885-891.

[9] Wang X, Cui N, Guo J. Huber-based unscented filtering and its application to vision-based relative navigation [J]. IET Radar, Sonar, Navigation, 2010, 4 (1): 134-141.

[10] Maronna R A, Martin R D, Yohai V J. Robust statistic: theory and methods[M]. England: Wiley, West Sussex, 2006.

[11] Karlgaard C D. Robust adaptive estimation for autonomous Rrendezvous in elliptical orbit[D]. Virginia: Virginia Polytechnic Institute and State Univ. 2010.