

## 基于分岔理论的直升机地面共振分析

邵松 朱清华 张呈林 倪先平

(南京航空航天大学直升机旋翼动力学重点实验室, 南京, 210016)

**摘要:**基于拉格朗日法建立了旋翼/机体耦合的直升机地面共振动力学模型,该模型考虑了非线性桨叶摆振阻尼的影响。采用非线性分岔理论对无阻尼地面共振动力学系统的自激振动边界进行了预测,并与经典的Cloeman特征方程法得出的结果进行了对比验证。随后利用该理论分析了无阻尼及含桨叶非线性摆振阻尼的地面共振系统的动力学特性。结果表明,采用非线性桨叶摆振阻尼使地面共振动力学系统在自激振动区域呈现出有限幅度的极限环振动,同时也避免了系统在该区域运动发散,且极限环振动幅值与非线性阻尼相关。

**关键词:**地面共振;自激振动;Coleman方法;分岔理论;极限环振动

中图分类号:V211.52

文献标识码:A

文章编号:1005-2615(2011)03-0351-06

## Investigation of Helicopter Ground Resonance Based on Bifurcation Theory

Shao Song, Zhu Qinghua, Zhang Chenglin, Ni Xianping

(Science and Technology on Rotorcraft Aeromechanics Laboratory,  
Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China)

**Abstract:** Based on the Lagrangian method, the coupled rotor/fuselage ground resonance model is presented, considering the effect of nonlinear blade lag damping. The nonlinear bifurcation theory is applied to the boundary prediction of self-excited oscillation zone of non-damping ground resonance dynamic system. And the validation of the system is presented with the result of classic Coleman characteristic equation method. The nonlinear bifurcation theory is also used to investigate the dynamic behaviors of ground resonance systems with blade lag and without damping. It is shown that the system containing the blade lag damping proceeds the limit cycle oscillation (LCO) and avoids the motion divergence in self-excited oscillation zone. Moreover, the amplitude of LCO is related to the nonlinear damping.

**Key words:** ground resonance; self-excited oscillation; Coleman theory; bifurcation theory; limit cycle oscillation

直升机“地面共振”是一种旋翼和机体耦合的自激振动,地面共振的发散程度极大,往往在几秒钟内就会导致机体及旋翼的破坏<sup>[1]</sup>。经典的地面共振分析模型由Coleman和Feignold在1958年完成,该模型能够较为准确地确定直升机地面共振的稳定性边界<sup>[2]</sup>。近年来,Zhao等<sup>[3]</sup>、Smith和Howard<sup>[4]</sup>和胡国才<sup>[5]</sup>等对该问题进行了深入的研

究,并取得了较为理想的分析结果。前述的直升机地面共振理论多集中于线性模型,现代直升机设计过程中非线性阻尼器的引入避免了地面共振问题的发生,而基于线性假设的地面共振模型显然不适应对其动力学特性进行预测及分析<sup>[6]</sup>,近年来兴起的非线性分岔理论揭示了系统的各种运动状态之间的相互联系,能够有效地分析振动系统的非线性

基金项目:航空科学基金(08A52003)资助项目。

收稿日期:2010-11-16;修订日期:2011-03-21

通讯作者:张呈林,男,教授,博士生导师,E-mail:zclntae@nuaa.edu.cn。

动力学特性<sup>[7]</sup>。

由于直升机地面共振问题的复杂性,即使简单的分析模型在推导的过程中仍然需要大量的线性假设,如摆振角的小角度假设等,本文基于拉格朗日法在推导直升机地面共振动力学模型过程中未作该方面的假设,得到了适合于非线性动力学分析的地面共振模型,并采用分岔理论对其非线性动力学特性进行研究。

## 1 地面共振动力学方程推导

### 1.1 地面共振动力学模型

图1为直升机地面共振平面分析模型<sup>[1]</sup>,其中 $xoy$ 为地面坐标系, $x'o'y'$ 为桨毂中心不旋转坐标系,假设桨叶刚性,不考虑气动力,忽略桨叶的挥舞和扭转效应,机身沿 $x$ 和 $y$ 向运动, $\zeta_k$ 表示桨叶摆振运动。

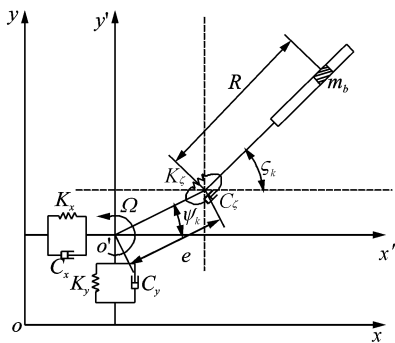


图1 地面共振平面分析模型

### 1.2 动能项

基于机身及桨叶的刚体假设,则机体及桨叶的动能分别表示为式(1,2)

$$T_f = \frac{1}{2}m_x u_1^2 + \frac{1}{2}m_y u_2^2 \quad (1)$$

$$T_{bk} = \frac{1}{2}m_b \dot{\rho}_k^2 \quad (2)$$

式中:下标 $f$ 和 $k$ 分别表示机身和桨叶; $m_x$ 和 $m_y$ 分别表示机体的纵横向位移; $u_1$ 和 $u_2$ 表示机身在地面坐标下的纵横向运动; $\rho$ 表示桨叶质心在地面坐标系下的相对坐标。综合考虑多片桨叶可得式(3)所示的机身及旋翼动能项

$$T = T_f + \sum_{k=1}^N T_{bk} \quad (3)$$

### 1.3 势能项

由机身及桨叶运动产生的弹性恢复力可以得到其势能表达式,如式(4~6)所示

$$U_f = \frac{1}{2}K_x u_1^2 + \frac{1}{2}K_y u_2^2 \quad (4)$$

$$U_{bk} = \frac{1}{2}K_z \zeta_k^2 \quad (5)$$

式中: $K_x$ 和 $K_y$ 为机身起落架等效线性刚度, $K_z$ 为摆振铰等效线性刚度。组集多片桨叶可得总的势能项如式(6)所示

$$U = U_f + \sum_{k=1}^N U_{bk} \quad (6)$$

### 1.4 耗散能项

机身和桨叶耗散能项由起落架阻尼及桨叶摆振铰阻尼提供,如式(7~9)所示

$$D_f = \frac{1}{2}C_x \dot{u}_1^2 + \frac{1}{2}C_y \dot{u}_2^2 \quad (7)$$

$$D_{bk} = \frac{1}{2}C_z \dot{\zeta}_k^2 \quad (8)$$

$$D_{nlk} = V_z \zeta_k |\dot{\zeta}_k| \quad (9)$$

式中: $C_x$ 和 $C_y$ 为起落架纵横向当量线性阻尼系数; $C_z$ 为桨叶摆振铰当量线性阻尼系数;下标 $nl$ 表示非线性阻尼耗散能项; $V_z$ 为摆振非线性阻尼器系数。

按照动能及势能项的组集方法可得如式(10)所示的机身/旋翼耦合动力学系统的耗散项

$$D = D_f + \sum_{k=1}^N (D_{bk} + D_{nlk}) \quad (10)$$

### 1.5 动力学方程推导

基于前述的能量表达式,采用拉格朗日方程法,得到如式(11)所示的非线性地面共振动力学系统方程组

$$F(\ddot{q}, \dot{q}, q, t) = 0 \quad (11)$$

式中: $q$ 为广义自由度。进一步处理,可得如式(12)所示的形式

$$A(\dot{q}, q, t)\ddot{q} = f(\dot{q}, q, t) \quad (12)$$

最后得到式(13)所示的状态空间方程,采用四阶Runge-Kutta数值积分方法对其求解

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = A^{-1}f \end{cases} \quad (13)$$

## 2 地面共振稳定性分析方法

### 2.1 Coleman 特征方程法

Coleman 推导了铰接式直升机的地面共振动力学方程,并在此基础上利用特征多项式为零的条件得到式(14)和式(15)<sup>[2,8-9]</sup>

$$(1 - \Lambda_1) \left( \frac{\Omega}{\omega_r} \right)^2 - 2b_r \left( \frac{\Omega}{\omega_r} \right) + c_r = 0 \quad (14)$$

$$(1 - \Lambda_1) \left( \frac{\Omega}{\omega_r} \right)^2 - 2b_i \left( \frac{\Omega}{\omega_r} \right) + c_i = 0 \quad (15)$$

式中: $\Lambda_1 = \frac{e}{R}$ ,  $\omega_r = \sqrt{\frac{K_x}{M_x}}$ ;  $b_r, c_r, b_i$  和  $c_i$  见文献[8]。

联立式(14,15)可得

$$\left(\frac{\Omega}{\omega_r}\right) = \frac{c_r - c_i}{2(b_r - b_i)} \quad (16)$$

同时,式(14)乘以  $b_i$  减去(15)乘以  $b_r$  可得

$$\left(\frac{\Omega}{\omega_r}\right)^2 = \frac{b_r c_i - c_r b_i}{(1 - \Lambda_1)(b_i - b_r)} \quad (17)$$

联立方程(16,17)得

$$4(b_r c_i - c_r b_i)(b_i - b_r) - (1 - \Lambda_1)(c_r - c_i)^2 = 0 \quad (18)$$

按照文献[8]中  $b_r, c_r, b_i$  和  $c_i$  的定义方式可以将方程(16,18)转化成

$$\left(\frac{\Omega}{\omega_r}\right) = [1 + (q/p)y] \sqrt{X} \quad (19)$$

$$y^2 \{ p^2 [\Lambda_1 + (\Lambda_2/X)] - (pq/\lambda X) \} + 2pq\Lambda_1 y - (1 - \Lambda_1)q^2 = 0 \quad (20)$$

式中  $p, q$  和  $y$  见文献[8]。求解方程(20)可得

$$(1 - \Lambda_1) \left( \frac{q}{py} \right) = \Lambda_1 \pm \left\{ \frac{\Lambda_1 X + \Lambda_2(1 - \Lambda_1)}{X} - \frac{(1 - \Lambda_1)\Lambda_3 X(1 - X)}{(1 - X)^2 + \lambda_f^2 X} \right\} \quad (21)$$

将式(21)中的  $q/py$  代入式(19)中可得无阻尼旋翼/机体耦合地面共振动力学系统稳定性边界

$$\left(\frac{\Omega}{\omega_r}\right) = \frac{\sqrt{X}}{1 - \Lambda_1} \left[ 1 \pm \left\{ \frac{\Lambda_1 X + \Lambda_2(1 - \Lambda_1)}{X} - \frac{(1 - \Lambda_1)\Lambda_3 X(1 - X)}{(1 - X)^2 + \lambda_f^2 X} \right\} \right] \quad (22)$$

式中:  $X = \frac{\omega_f}{\omega_r}$ ,  $\Lambda_2 = \frac{K_\xi}{I_b \omega_r^2}$ ,  $I = m_b R^2$ ,  $\Lambda_3 = \frac{Nm_b}{2(m_f + Nm_b)}$ ,  $\lambda_f = \frac{C_f}{m_f \omega_r}$ 。

## 2.2 分岔理论分析法

分岔现象是指振动系统的定性行为随着系统参数的改变而发生质的变化。非线性地面共振动力学系统(11)中参数旋翼转速  $\Omega$  连续变动时,若系统的相轨迹拓扑结构在  $\Omega = \Omega_0$  时突然发生变化,则表明系统在该点发生了分岔,在  $(q, \Omega)$  空间中,平衡点和极限环随参数变化的图形称为分岔图。生成分岔图的有解析法和数值法,由于本文的地面共振非线性动力学系统可以直接进行数值积分进行求解,因此本文拟采用数值积分的结果选取时间序列的极大值点,进而得出系统随参数  $\Omega$  变化的分岔图。

## 3 结果与分析

本文以文献[10]提供的直升机地面共振系统动力学特性参数作为数值算例,进行系统的稳定性边界及预测其非线性动力学特性的研究,算例为铰接式旋翼,其中主要参数为  $N=3, R=3.48 \text{ m}, e=$

$0.1524 \text{ m}, m_b=1.46 \text{ kg}, m_f=94.86 \text{ kg}$  和  $K_x=1.648 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$  等。

### 3.1 线性无阻尼系统

图2显示的是由式(22)得到的无阻尼直升机地面共振系统稳定性边界图,图中显示在  $\Omega = 121 \sim 211 \text{ r/min}$  范围内旋翼机身耦合动力学系统处于自激振动区域,即在该区域直升机发生地面共振。

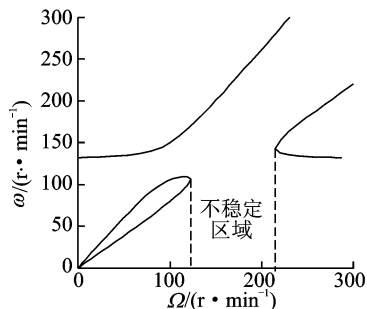


图2 Coleman 稳定性边界图

基于图2给出的地面共振系统稳定性边界,本文基于极值法给出了自激振动区域上下边界附近的摆振角随  $\Omega$  变化的分岔图,如图3,4所示。图3所示的摆振角分岔图可以看出系统在  $\Omega = 120.9 \sim 120.95 \text{ r/min}$  范围内系统发生分岔,与图2相比,图3的分岔图中不仅更准确给出了无阻尼地面共振系统失稳的临界值,而且给出了系统的运动随  $\Omega$  的变化规律。图5,6分别显示的是  $\Omega = 120.9 \text{ r/min}$  时摆振角的时域响应和摆振角及摆振角速度相平面轨迹图,图中清楚地显示了地面共振系统在未发生自激振动时,由于系统无阻尼,桨叶的摆振运动呈现微小幅度的振荡,系统处于稳定状态。图7,8显示的是  $\Omega = 120.95 \text{ r/min}$  时摆振角的时域响应和摆振角及摆振角速度相平面轨迹图,在分岔点产生后,系统发生自激振动,系统的振幅迅速增大,随着旋翼转速的增加,地面共振动力学系统的运动迅速发散。图4中的摆振角分岔图反映了系统在  $\Omega = 210.9 \sim 210.95 \text{ r/min}$  范围内发生分岔,该分岔使得地面共振系统从自激振动区域向稳定状态发展。图9~12分别显示的是  $\Omega = 210.9 \text{ r/min}$  和  $\Omega = 210.95 \text{ r/min}$  时桨叶摆振角的时域响应和摆振角及摆振角速度相平面轨迹图,对比两个状态的时域响应及相平面轨迹图表明系统在分岔发生后,地面共振系统迅速由多频的高幅值振动向稳定方向发展,由于系统未考虑阻尼,因而从图11摆振角时域响应图可以看出系统在稳定状态仍呈现出幅度很小的振荡。

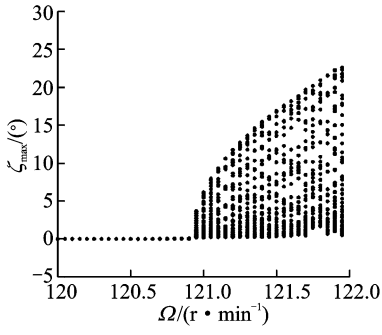


图3 摆振角分岔图(120 ≤ Ω ≤ 122 r/min)

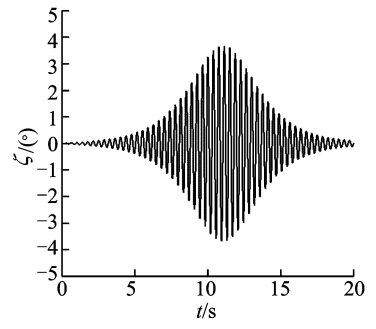


图7 摆振角时域响应曲线(Ω = 120.95 r/min)

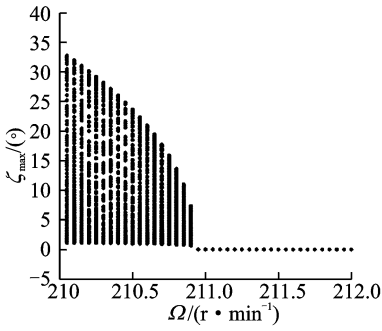


图4 摆振角分岔图(210 ≤ Ω ≤ 212 r/min)

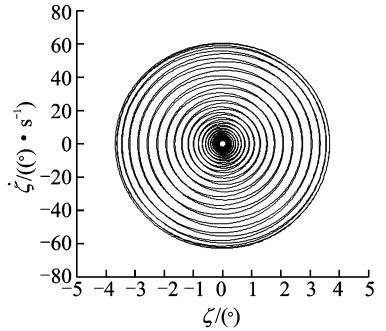


图8 摆振角及角速度相平面图(Ω = 120.95 r/min)

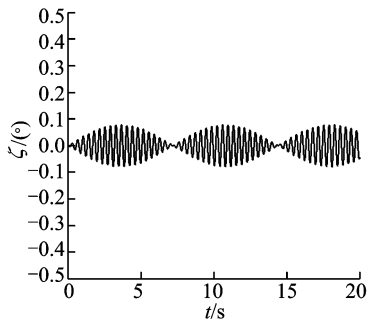


图5 摆振角时域响应曲线(Ω = 120.9 r/min)

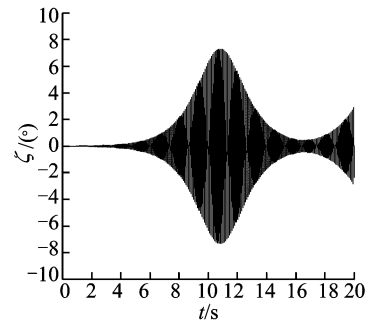


图9 摆振角时域响应曲线(Ω = 210.9 r/min)

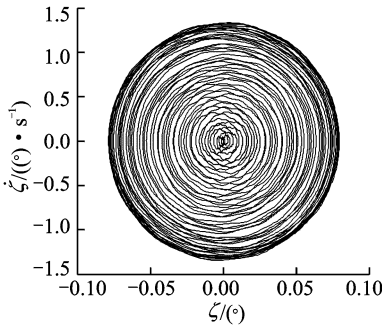


图6 摆振角及角速度相平面图(Ω = 120.9 r/min)

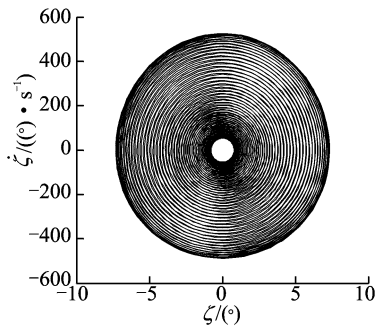


图10 摆振角及角速度相平面图(Ω = 210.9 r/min)

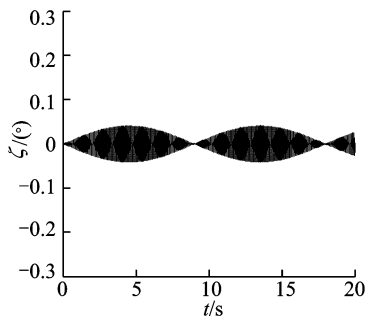


图11 摆振角时域响应曲线 ( $\Omega=210.95 \text{ r/min}$ )

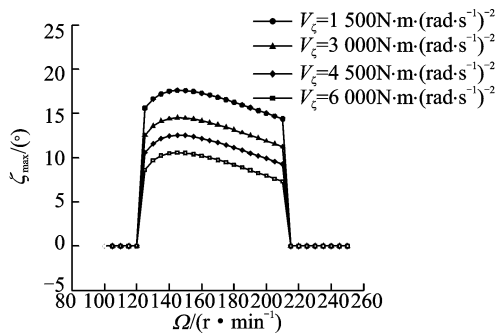


图13 不同  $V_\zeta$  下摆振角分岔图

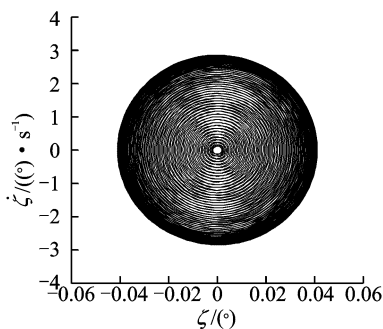


图12 摆振角及角速度相平面图 ( $\Omega=210.95 \text{ r/min}$ )

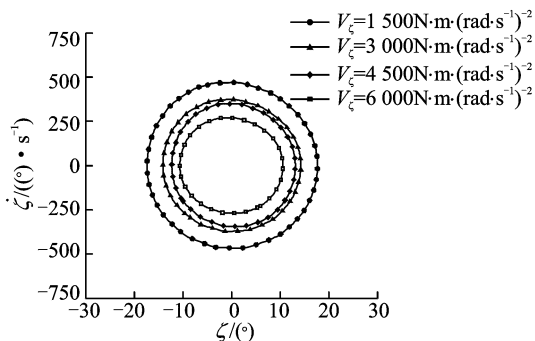


图14 不同  $V_\zeta$  下摆振角及角速度相平面图

### 3.2 摆振非线性阻尼系统

为了分析桨叶摆振铰非线性液压阻尼器的作用,本文在地面共振动力学系统建模过程中以  $D_{nlk} = V_\zeta \zeta |\zeta|$  考虑了该效应。图13给出了不同非线性阻尼系数下的桨叶摆振角分岔图,图中可以看出在非线性阻尼的作用下,系统的自激振动区域的上下边界出现了hopf分岔点,与之相伴随的是系统在自激振动区域形成了有限幅度的极限环振动,系统处于周期运动状态,而避免了前述的在无阻尼系统自激振动区域的运动发散,这表明非线性阻尼效应使地面共振动力学系统的运动形式在自激运动区域发生了质的变化。值得注意的是,从图13可以看出桨叶摆振铰非线性阻尼的变化对系统的自激振动区域的边界影响不大,但对该区域极限环振动的幅值有着重要的影响,由图14所显示的不同非线性阻尼在  $\Omega=140 \text{ r/min}$  的相轨迹平面图可以看出,桨叶的摆振运动呈现很明显的极限环振动,且在桨叶摆振非线性阻尼增大时极限环振动的幅值是逐渐减少的。图15~18分别显示了在  $\Omega=140 \text{ r/min}$  时不同非线性阻尼系统摆振角的时域响应曲线图,通过对比这几张图可以看出,地面共振系统非线性阻尼的作用下显现出周期运动,且摆振角的振幅随着非线性阻尼的增大而减小。

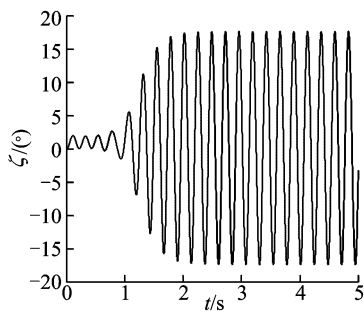


图15 摆振角时域响应图 ( $V_\zeta=1500 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot(\text{rad}\cdot\text{s}^{-1})^{-2}$ )

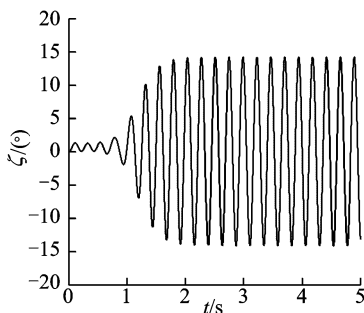


图16 摆振角时域响应图 ( $V_\zeta=3000 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot(\text{rad}\cdot\text{s}^{-1})^{-2}$ )

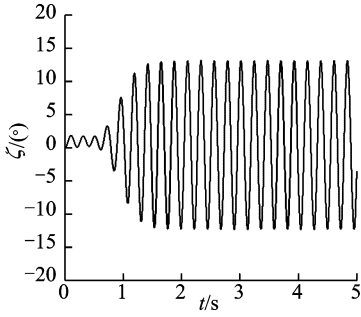


图17 摆振角时域响应图 ( $V_{\xi} = 4\ 500\ \text{N} \cdot \text{m} \cdot (\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})^{-2}$ )

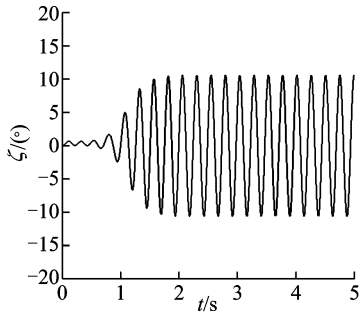


图18 摆振角时域响应图 ( $V_{\xi} = 6\ 000\ \text{N} \cdot \text{m} \cdot (\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})^{-2}$ )

## 4 结束语

本文基于拉格朗日法建立了旋翼/机身耦合的直升机地面共振分析模型。采用Coleman及非线性分岔理论分别给出了系统的自激振动区域,结果表明本文所推导的地面共振模型是正确的。需要指出的是,借助于分岔理论对无阻尼及含有非线性阻尼的地面共振动力学系统的研究表明,非线性阻尼使地面共振系统在自激振动区域处于有限幅度的极限环振动,从而有效地解决了系统在该区域运动发散的问题,且极限环振动的幅值随着非线性阻尼的增加而减小。

### 参考文献:

[1] 张晓谷. 直升机动力学设计[M]. 北京: 航空工业出版社, 1995.

- [2] Coleman R P, Feingold A M. Theory of self-excited mechanical oscillations of helicopter rotors with hinged blades[R]. NACA Report No. 1351, 1958.
- [3] Zhao Y S, Choi Y T, Wereley N M. Semi-active damping of ground resonance in helicopters using magnetorheological dampers [J]. Journal American Helicopter Society, 2004, 49(4): 468-482.
- [4] Smith Edward C, Howard Anna K T. Prediction of air and ground resonance stability of soft-inplane tiltrotors using a semispan analytical mode[J]. Journal of the American Helicopter Society, 2008, 53(2): 164-178.
- [5] 胡国才. 失衡旋翼的直升机自激振动分析模型[J]. 航空学报, 2006, 27(4): 630-634.
- [6] Donald L Kunz. Nonlinear analysis of helicopter ground resonance [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2002, 3(3): 383-395.
- [7] Chung K W, He Y B, Lee B H K. Bifurcation analysis of a two-degree-of-freedom aeroelastic system with hysteresis structural nonlinearity by a perturbation-incremental method [J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 320(1-2): 163-183.
- [8] Robinson C S, King R L, Wood E R. Non-linear simulation of coupled rotor-fuselage response using symbolically derived equations of motion, Part 1: derivation [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering, 2004, 218(1): 1-9.
- [9] Robinson C S, King R L, Wood E R. Non-linear simulation of coupled rotor-fuselage response using symbolically derived equations of motion, Part 2: Confirmation and illustrative cases [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering, 2004, 218(1): 11-22.
- [10] Robinson C S. Modeling and analysis of helicopter ground resonance utilizing symbolic processing and dynamic simulation software [D]. Monterey: Department of Aeronautics and Astronautics of Naval Postgraduate School, 1997.