

## 多轴转向车辆模糊 $H_\infty$ 保性能控制

王吉华<sup>1,2</sup> 魏民祥<sup>1</sup> 李玉芳<sup>1</sup> 魏建伟<sup>1</sup>

(1. 南京航空航天大学能源与动力学院, 南京, 210016; 2. 山东理工大学交通与车辆工程学院, 淄博, 255049)

**摘要:**为提高多轴转向车辆的控制性能和操纵稳定性,考虑多轴转向车辆的轮胎非线性、不确定性和外界干扰,提出一种基于区域极点约束和 T-S(Takagi-Sugeno)模糊模型的  $H_\infty$  模糊保性能控制方法。分析基于轮胎立方非线性动力学的多轴转向车辆三自由度非线性模型,建立具有不确定性和外界干扰的多轴转向车辆模糊 T-S 模型。针对固定极点配置适用范围问题,对各个局部线性子系统设计区域极点约束的保性能控制器,并共用 T-S 模糊模型的前件和采用并行分配补偿法(Parallel distributed compensation, PDC)计算出总控制器。应用 Matlab 软件的线性矩阵不等式(Linear matrix inequality, LMI)和模糊逻辑控制(Fuzzy logic control, FLC)工具箱对某五轴转向车辆控制器进行求解,并对原非线性闭环系统进行控制仿真。结果表明控制算法有效,具有一定的鲁棒性,并有利于改善多轴转向动态性能和提高操纵稳定性。

**关键词:**多轴转向车辆; T-S 模糊  $H_\infty$  保性能控制; 轮胎非线性; 区域极点约束; 模糊 T-S 模型; 鲁棒性

**中图分类号:** U461.6      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1005-2615(2013)05-0677-09

## T-S Fuzzy $H_\infty$ Guaranteed Cost Control of Multi-steering Vehicle

Wang Jihua<sup>1,2</sup>, Wei Minxiang<sup>1</sup>, Li Yufang<sup>1</sup>, Wei Jianwei<sup>1</sup>

(1. College of Energy and Power Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China;

2. School of Transportation and Vehicle Engineering, Shandong University of Technology, Zibo, 255049, China)

**Abstract:** To improve the performances of control and handling stability of multi-steering vehicle, considering tire nonlinearity, uncertainties and external disturbances, a method of  $H_\infty$  fuzzy guaranteed cost control for multi-steering vehicle is presented based on region pole constraints and fuzzy Takagi-Sugeno (T-S) model. Based on tire cubic nonlinearity dynamics, the nonlinear model of multi-steering vehicle with three degrees of freedom is analyzed, and the fuzzy T-S model of multi-steering vehicle with uncertainties and external disturbances is established. According to the problem of application scope of fixed pole assignment, guaranteed cost controllers of all local linear subsystems with region pole constraints are designed, and the whole controller is derived by using antecedent of the T-S fuzzy model and parallel distributed compensation (PDC) method. Using the linear matrix inequality (LMI) and fuzzy logic control (FLC) toolboxes of Matlab software, the controllers of a certain five-axle-steering vehicle are solved and control of original nonlinear closed-loop system is simulated. The simulation results show that the presented control method is effective and robust, and is beneficial to enhance dynamic performances and handling stability of multi-steering vehicle.

**Key words:** multi-steering vehicle; T-S fuzzy  $H_\infty$  guaranteed cost control; tire nonlinearity; region pole constraint; fuzzy T-S model; robustness

**基金项目:**国家自然科学基金(51005113)资助项目。

**收稿日期:** 2012-10-15; **修订日期:** 2013-06-10

**通信作者:** 王吉华, 男, 博士, 副教授, E-mail: wangjihualunwen@163.com。

多轴车辆在通过性、制动性和操纵稳定性方面都明显优于两轴车辆,在大宗货物公路运输、工程和军用等车辆中的运用越来越广泛。多轴转向是其关键技术之一,为了改善多轴转向性能、增强操纵稳定性和提高安全性,近年来对多轴转向和四轮转向(4WS)车辆的控制引起国内外专家学者的普遍关注。

目前针对多轴转向或4WS车辆的控制有很多文献报道,大多是在线性模型基础上设计控制器。文献[1,2]为了使车辆状态响应达到期望的性能,研究了转向的状态跟踪控制;文献[3~6]针对参数不确定性、外界干扰等,分别提出了  $H_2/H_\infty$  控制、最优控制等。由于多轴转向或4WS车辆的模型非线性普遍存在,基于线性模型设计的控制器应用将受到一定的限制,而且并非总是有效<sup>[7]</sup>。文献[8]基于滑膜面提出滑膜控制,文献[9,10]等基于专家经验知识设计模糊控制器,这些非线性控制器设计并没考虑车辆模型的非线性,而是根据既定的滑膜面或专家经验由状态或状态偏差直接计算出控制量。控制器的控制效果与模型的精度有很大的关系,而多轴转向或4WS车辆转向时存在较强的非线性、不确定性和外界干扰,针对被控对象的线性模型或不利用其模型设计的控制器,其控制的鲁棒性都将受到一定的影响。

基于此,为了提高控制系统的鲁棒性和车辆转向性能,论文建立多轴转向车辆非线性解析模型,同时考虑系统存在的不确定性和外界干扰进行控制器设计。车辆模型非线性存在于悬架、轮胎等诸多方面,但轮胎非线性是其重要因素之一,为便于论述设计方法,论文只考虑轮胎非线性,建立多轴转向车辆非线性模型,并结合存在的不确定性和外界干扰,利用模糊 T-S 推理理论,将其转换为局部线性模型的模糊 T-S 逼近模型;又考虑到极点配置是根据系统性能要求设计控制器的重要方法,而且固定极点配置,由于系统非线性、不确定性和外界干扰的影响,其控制品质必然下降,所以论文在控制器设计时,利用区域极点约束理论,并结合建立的模糊 T-S 模型以及保性能控制理论,设计多轴转向车辆各选定工作点的局部  $H_\infty$  模糊保性能控制器,然后利用 PDC 方法得总控制器。最后对某五轴转向车辆进行控制器求解和对原非线性闭环控制系统进行仿真,验证了控制算法的有效性,并可有效地提高多轴转向车辆控制系统的鲁棒性和高速转向性能。

## 1 多轴转向车辆三自由度模糊 T-S 模型

### 1.1 三自由度非线性模型

考虑侧倾运动的多轴转向车辆三自由度模型,如图1所示,分别为车辆的俯视图和后视图, $c.m.$ 和  $c.s.$  分别为车辆质心和簧上质量质心; $oxyz$  为固定于车辆质心的车辆车标系,原点  $o$  和  $c.m.$  重合; $o_1$  为车辆静止时侧倾轴和簧上质心垂线的交点; $\beta$  为质心侧偏角; $\omega_r$  为横摆角速度; $\phi$  为簧上质量的侧倾角; $\dot{\phi}$  为侧倾角速度; $u_c$  为质心前进速度; $v$  为质心侧向速度; $V$  为质心处的速度; $m_s$  为车辆簧上质量; $h_s$  为静止状态下车辆簧上质量质心到  $o_1$  的距离; $l_i$  为第  $i$  轴相对于质心的位移; $\delta_i$  为第  $i$  轴车轮转角; $\alpha_i$  为第  $i$  轴车轮侧偏角; $F_{yi}$  为第  $i$  轴受到的侧偏力;下标  $i$  均表示车辆第  $i$  轴,  $i=1, 2, \dots, n$ 。

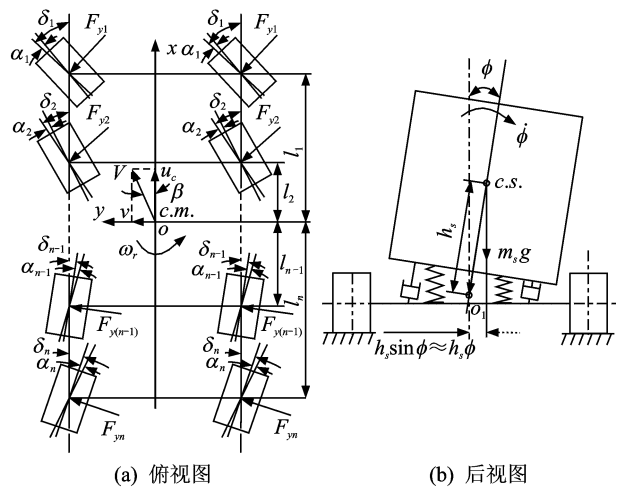


图1 多轴转向车辆三自由度动力学模型

对车辆沿  $y$  轴侧向运动、车辆绕  $z$  轴横摆运动和簧上质量的侧倾运动,由牛顿第二定律和动量矩定理可得

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n 2F_{yi} = mu_c(\dot{\beta} + \omega_r) - m_s h_s \ddot{\phi} \\ \sum_{i=1}^n M_{xi} = \sum_{i=1}^n 2F_{yi} l_i = I_{zz} \dot{\omega}_r - I_{xz} \ddot{\phi} \\ \sum_{i=1}^n M_{xi} = I_{xx} \ddot{\phi} - I_{xz} \dot{\omega}_r - m_s h_s u_c (\dot{\beta} + \omega_r) \end{cases} \quad (1)$$

式中: $M_{xi}$  为侧偏力对车辆产生的力矩; $M_{xi}$  为第  $i$  轴悬架对车辆簧上质量产生的侧倾力矩; $m$  为车辆质量; $I_{zz}$  表示车辆绕  $z$  轴转动惯量; $I_{xz}$  表示绕  $x$  和  $z$  轴的惯量积; $I_{xx}$  表示簧上质量绕  $x$  轴转动惯量。通过悬架弹簧和减振器对簧上质量的作用,可得

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{M}_{xi} = \sum_{i=1}^n (-K_{\phi_i} \phi - C_{\dot{\phi}_i} \dot{\phi}) + m_s g h_s \phi \quad (2)$$

式中:  $K_{\phi_i}$  为第  $i$  轴悬架侧倾刚度;  $C_{\dot{\phi}_i}$  为第  $i$  轴悬架等效黏性摩擦系数。

文献[11,12]基于非线性立方轮胎模型建立车辆转向非线性模型,并分别应用于分叉特性研究和混沌同步控制,均取得了较好的效果。论文采用此轮胎模型,  $\mathbf{F}_{yi}$  为

$$\mathbf{F}_{yi} \approx -(k_{1i} \alpha_i + k_{2i} \alpha_i^3) \quad (3)$$

式中,  $k_{1i}$  和  $k_{2i}$  为第  $i$  轴非线性立方轮胎模型的系数。

由于在各工作点附近求解相应局部线性化模型时,需要将输入量和各状态量进行分离,如式(6,7),所以这里要将  $\mathbf{F}_{yi}$  表达式中的状态  $\omega_r$  和  $\beta$  与  $\delta_i$  进行分离,  $i=1,2,\dots,n$ 。将  $\alpha_i = \left(\frac{v+l_i \omega_r}{u_c}\right) - \delta_i \approx \beta + \frac{l_i \omega_r}{u_c} - \delta_i$  代入式(3),并考虑到高速小角度转向,忽略  $\beta$  和  $\delta_i$  高于二次方的项及其乘积项,可得

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{yi} \approx & -k_{1i} \beta - \frac{k_{1i} l_i}{u_c} \omega_r - 3 \frac{k_{2i} l_i^2}{u_c^2} \beta \omega_r^2 - \\ & \frac{k_{2i} l_i^3}{u_c^3} \omega_r^3 + \left(k_{1i} + 3 \frac{k_{2i} l_i^2}{u_c^2} \omega_r^2\right) \delta_i \end{aligned} \quad (4)$$

考察式(4)中各桥车轮转角输入  $\delta_i$ , 论文采用全桥主动转向控制,令  $\mathbf{u}_z = [\delta_1 \ \delta_2 \ \dots \ \delta_n]^T$ ,  $\delta_1 = \delta_{1c} + \delta_{1d}$ ,  $\delta_{1d}$  为驾驶者控制输入,  $\delta_{1c}$  为前轮控制器的控制输入,则可将  $\mathbf{u}_z$  分解为  $\mathbf{u}_z = \mathbf{u}_d + \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}_d = [\delta_{1d} \ 0 \ \dots \ 0]^T$ ,  $\mathbf{u} = [\delta_{1c} \ \delta_2 \ \dots \ \delta_n]^T$ ,  $\mathbf{u}$  为控制器输入向量;而  $\delta_1 \sim \delta_n$  需满足 Ackerman 几何关系,只需前轮转角  $\delta_1$  和任何一个后桥车轮转角确定,其他桥的车轮转角即可确定。不妨假设  $\delta_1$  和  $\delta_2$  确定,则  $[\delta_1 \ \delta_2 \ \dots \ \delta_n]^T$  和  $[\delta_1 \ \delta_2]^T$  之间存在确定的线性变换关系,于是简化得到  $\mathbf{u}_z = \mathbf{u}_d + \mathbf{u} = [\delta_1 \ \delta_2]^T + [\delta_{1d} \ 0]^T$ ,  $\mathbf{u}_d = [\delta_{1d} \ 0]^T$ ,  $\mathbf{u} = [\delta_{1c} \ \delta_2]^T$ 。

在式(4)中令  $g_i = k_{1i} + 3 \frac{k_{2i} l_i^2}{u_c^2} \omega_r^2$ ,  $f_i = -k_{1i} \beta - \frac{k_{1i} l_i}{u_c} \omega_r - 3 \frac{k_{2i} l_i^2}{u_c^2} \beta \omega_r^2 - \frac{k_{2i} l_i^3}{u_c^3} \omega_r^3$ , 将式(4)代入式(1), 并取状态向量  $\mathbf{x} = [\omega_r, \beta, \phi, \dot{\phi}]^T$ , 输出  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ , 若  $\mathbf{E}$  可逆,则得多轴转向车辆的非线性状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{u}_z \\ \mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} \end{cases} \quad (5)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n 2f_i \\ \sum_{i=1}^n 2f_i l_i \\ \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_{xi} + m_s h_s u_c \omega_r \\ p \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}^{-1} \cdot \\ \begin{bmatrix} 2g_1 & \dots & 2g_n \\ 2g_1 l_1 & \dots & 2g_n l_n \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{l_i - l_2}{l_1 - l_2} & \frac{l_1 - l_i}{l_1 - l_2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \\ \begin{bmatrix} 0 & m u_c & 0 & -m_s h_s \\ I_{zz} & 0 & 0 & -I_{zx} \\ -I_{zx} & -m_s h_s u_c & 0 & I_{xx} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_z = [\delta_1 \ \delta_2]^T, \end{aligned}$$

$\mathbf{C} = \mathbf{I}_4$ ,  $\mathbf{I}_4$  表示四阶单位矩阵,  $\sum_{i=1}^n \mathbf{M}_{xi}$  表达式如式(2)。

## 1.2 模糊 T-S 模型

将 Takagi 和 Sugeno 提出的 T-S 模糊推理思想应用于非线性系统建模中,可建立非线性系统的局部线性逼近模型。选定非线性系统的不同工作点(状态点),在各工作点附近线性化,并建立相应模糊规则,求出各工作点附近的模糊线性子模型,整个模糊 T-S 模型为模糊线性子模型的模糊线性组合。

对于非线性系统式(5),选定其某个工作点  $\mathbf{x}_j$  ( $j$  表示第  $j$  个工作点,  $j=1,2,\dots,m$ ,  $m$  表示建模时选定的工作点总数),若  $\mathbf{x}_j = \mathbf{0}$ ,令  $\mathbf{u}_z = \mathbf{0}$ ,式(5)在  $[\mathbf{x}_j \ \mathbf{u}_z] = [\mathbf{0} \ \mathbf{0}]$  处分别对  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{u}_z$  求偏导数,可得

$$\dot{\mathbf{x}} \approx \mathbf{A}_j \mathbf{x} + \mathbf{B}_j \mathbf{u}_z \quad (6)$$

$$\text{式中: } \mathbf{A}_j = \left. \frac{\partial(\dot{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{\mathbf{x}_j = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_z = \mathbf{0}}}; \mathbf{B}_j = \left. \frac{\partial(\dot{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{u}_z} \right|_{\substack{\mathbf{x}_j = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_z = \mathbf{0}}}。$$

若  $\mathbf{x}_j \neq \mathbf{0}$ ,在  $\mathbf{x}_j$  附近要找到矩阵  $\mathbf{A}_j$  和  $\mathbf{B}_j$ , 满足式(6)。令  $\mathbf{A}_{jk}$  为  $\mathbf{A}_j$  第  $k$  行,  $f_k(\mathbf{x})$  为  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  第  $k$  个元素,  $\nabla$  表示梯度,取指标  $E = \frac{1}{2} \|\nabla f_k(\mathbf{x}_j) - \mathbf{A}_{jk}\|_2^2$ ,在  $\mathbf{A}_{jk} \mathbf{x}_j = f_k(\mathbf{x}_j)$  约束条件下极小化,可得<sup>[13]</sup>

$$\mathbf{A}_{jk} = \nabla f_k(\mathbf{x}_j) + \frac{f_k(\mathbf{x}_j) - (\mathbf{x}_j)^T \nabla f_k(\mathbf{x}_j)}{\|\mathbf{x}_j\|_2^2} \mathbf{x}_j \quad (7)$$

从而求出  $\mathbf{A}_j$ 。由于  $\mathbf{u}_z$  任意,令  $\mathbf{B}_j = \mathbf{g}(\mathbf{x}_j)$ ,则确定线性模型( $\mathbf{A}_j \ \mathbf{B}_j$ )。

根据模糊 T-S 推理理论,若同时考虑式(5)存在不确定性和外界干扰,其在工作点  $x_j$  附近的模糊线性子模型可用模糊规则描述为

$$\begin{cases} \text{Plant rule } j: \text{ if } x_1 \text{ is } M_1^j \text{ and } \cdots \text{ and } x_4 \text{ is } M_4^j \\ \text{then } \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}_j + \Delta\mathbf{A}_j)\mathbf{x} + (\mathbf{B}_j + \Delta\mathbf{B}_j)\mathbf{u}_z + \mathbf{H}_j \omega \end{cases} \quad (8)$$

式中:  $x_1 \sim x_4$  为状态向量  $\mathbf{x}$  的 4 个分量;  $M_1^j \sim M_4^j$  分别为第  $j$  条规则中 4 个状态分量对应的模糊规则前件;  $\mathbf{A}_j \in \mathbf{R}^{4 \times 4}$ ;  $\mathbf{B}_j \in \mathbf{R}^{4 \times n}$ ;  $\omega$  为外界干扰; 矩阵  $\Delta\mathbf{A}_j \in \mathbf{R}^{4 \times 4}$  和  $\Delta\mathbf{B}_j \in \mathbf{R}^{4 \times n}$  表示系统不确定性,用满足广义匹配条件方法表示为

$$\begin{cases} \Delta\mathbf{A}_j = \mathbf{E}_j \mathbf{D}_j \mathbf{F}_{1j} \\ \Delta\mathbf{B}_j = \mathbf{E}_j \mathbf{D}_j \mathbf{F}_{2j} \end{cases} \quad (9)$$

式中:  $\mathbf{E}_j$ ,  $\mathbf{F}_{1j}$  和  $\mathbf{F}_{2j}$  是表示不确定性的已知常数矩阵;  $\mathbf{D}_j$  是未知的时变不确定矩阵,对于有界的不确定性  $\Delta\mathbf{A}_j$  和  $\Delta\mathbf{B}_j$ ,其可满足  $\mathbf{D}_j \mathbf{D}_j^T \leq \mathbf{I}$ 。

应用并行分配补偿法 (Parallel distributed compensation, PDC) 方法,其整个系统的 T-S 模糊系统模型为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \sum_{j=1}^m \mu_j [\mathbf{A}_j \mathbf{x} + \mathbf{B}_j \mathbf{u}_z + \Delta\mathbf{A}_j \mathbf{x} + \Delta\mathbf{B}_j \mathbf{u}_z + \mathbf{H}_j \omega] \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (10)$$

式中:  $\mu_j = h_j / \left( \sum_{p=1}^m h_p \right)$ ,  $h_j = \prod_{q=1}^4 M_q^j$ ,  $h_j$  为第  $j$  条规则模糊前件的各分量模糊求与合成,采用连乘算法,  $\mu_j$  为第  $j$  条规则的总模糊权系数,  $j, p = 1, 2, \dots, m, q = 1, 2, 3, 4$ 。

## 2 控制器设计

### 2.1 LMI 区域

传统极点配置是在期望精确位置,但因模型不精确性和各种扰动存在,使这种控制方式在应用上受到一定的限制,而实际系统极点只要控制在一个适当区域中就能保证一定的动态和稳态性能<sup>[14]</sup>。下面将针对线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI) 区域极点约束、模型不确定性和外界干扰等,基于模糊 T-S 模型进行模糊  $H_\infty$  保性能控制器设计。

若有区域  $D = \{s \in \mathbf{C}: \mathbf{L} + s\mathbf{M} + \bar{s}\mathbf{M}^T < 0\}$ , 则  $D$  是一个 LMI 区域, 矩阵值函数

$$f_D(s) = \mathbf{L} + s\mathbf{M} + \bar{s}\mathbf{M}^T \quad (11)$$

为  $D$  的特征函数<sup>[14]</sup>, 其中:  $f_D(s) < 0$ , 表示  $f_D(s)$  负定;  $\mathbf{L} = \mathbf{L}^T = (\tau_{\lambda\gamma})_{1 \leq \lambda, \gamma \leq n_1} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_1}$ ;  $\mathbf{M} = (\pi_{\lambda\gamma})_{1 \leq \lambda, \gamma \leq n_1} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_1}$ 。

对于区域极点配置问题,研究圆形区域就足够了<sup>[15]</sup>,所以可由存在干扰和不确定性非线性系统(5)的性能要求,假定其极点约束在如图 2 所示阴影部分的 LMI 区域。

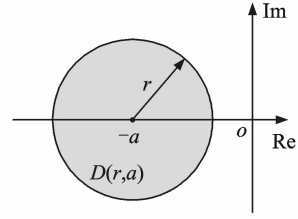


图 2 系统极点约束的 LMI 区域

由式(11),可知区域  $D(r, q)$  的特征函数为

$$f_{D(r,a)}(s) = \begin{bmatrix} -r & a \\ a & -r \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \bar{s} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (12)$$

### 2.2 模糊 T-S 控制器设计

对于存在干扰和不确定性的非线性系统(5),基于模糊 T-S 推理方法设计控制器,也是先对各个工作点  $x_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) 建立模糊规则。针对局部线性模型(8)设计控制器,各条模糊规则和式(8)使用相同模糊前件,再采用 PDC 方法,得到系统总模糊 T-S 控制器。其局部控制规则为

$$\begin{cases} \text{Control rule } j: \text{ if } x_1 \text{ is } M_1^j \text{ and } \cdots \text{ and } x_4 \text{ is } M_4^j \\ \text{then } \mathbf{u} = \mathbf{k}_j \mathbf{x} \quad j = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (13)$$

则系统的总控制器为

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^m \mu_j \mathbf{k}_j \mathbf{x} \quad (14)$$

将式(9,14)代入式(10),并由  $\mu_j = h_j / \left( \sum_{p=1}^m h_p \right)$ ,

$\sum_{j=1}^m \mu_j = 1, j, p = 1, 2, \dots, m$ , 同时由于  $\mathbf{u}_d$  仅为驾驶员外界输入,控制器设计时不作考虑,得闭环系统模糊 T-S 状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^m \mu_j \mu_p \{ [\mathbf{A}_j + \mathbf{B}_j \mathbf{k}_p + \mathbf{E}_j \mathbf{D}_j (\mathbf{F}_{1j} + \mathbf{F}_{2j} \mathbf{k}_p)] \mathbf{x} + \mathbf{H}_j \omega \} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad j, p = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (15)$$

### 2.3 区域极点约束模糊 $H_\infty$ 保性能控制器设计

对整个模糊 T-S 模型式(10)的状态反馈闭环系统(15),定义二次型性能指标

$$J = \int_0^\infty [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt \quad (16)$$

式中  $\mathbf{Q}$  和  $\mathbf{R}$  是给定的对称正定加权矩阵。

由文献[14]对保性能控制律的定义,将 LMI

区域理论推广到基于模糊 T-S 模型、不确定和干扰有界的非线性系统中,并结合  $H_\infty$  保性能控制理论<sup>[16]</sup>,可得到如下定理

**定理 1** 对于  $j, p=1, 2, \dots, m$ , 针对复平面上稳定的 LMI 区域式(12)、模糊闭环系统式(15)和性能指标(16), 如果对给定的  $H_\infty$  指标  $\eta > 0$  和满足  $D_j(t)D_j^T(t) \leq I$  所有的  $D_j(t)$ , 存在对称正定实矩阵  $V$ 、实矩阵  $W_p$ 、常数  $\sigma, \epsilon > 0$ , 使如下 LMI 不等式系统有可行解

$$\begin{cases} \Phi_{jj} \leq 0 (j=1, \dots, m) & \Phi_{jp} + \Phi_{pj} \leq 0 (j < p \leq m) \\ \Psi_{jj} \leq 0 (j=1, \dots, m) & \Psi_{jp} + \Psi_{pj} \leq 0 (j < p \leq m) \\ \Theta_{jj} < 0 (j=1, \dots, m) \end{cases} \quad (17)$$

式中

$$\Phi_{jp} = \begin{bmatrix} U_{1jp} & VC^T & VF_{1j}^T + W_p^T F_{2j}^T \\ CV & -\sigma I & 0 \\ F_{1j}V + F_{2j}W_p & 0 & -I \end{bmatrix}$$

$$\Psi_{jp} = \begin{bmatrix} U_{2jp} & VQ^{1/2} & W_p^T R^{1/2} & VC^T & VF_{1j}^T + W_p^T F_{2j}^T \\ Q^{1/2}V & -I & 0 & 0 & 0 \\ R^{1/2}W_p & 0 & -I & 0 & 0 \\ CV & 0 & 0 & -\epsilon I & 0 \\ F_{1j}V + F_{2j}W_p & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix}$$

$$\Theta_{jp} = \begin{bmatrix} U_{3jp} & \pi_{\lambda\gamma} (VF_{1j}^T + W_p^T F_{2j}^T) \\ \pi_{\lambda\gamma} (F_{1j}V + F_{2j}W_p) & -I \end{bmatrix}_{1 \leq \lambda, \gamma \leq n_1}$$

$$U_{1jp} = A_j V + V A_j^T + B_j W_p + W_p^T B_j^T + \sigma \eta^{-2} H_j H_j^T + E_j E_j^T$$

$$U_{2jp} = A_j V + V A_j^T + B_j W_p + W_p^T B_j^T + \epsilon H_j H_j^T + E_j E_j^T$$

$$U_{3jp} = \tau_{\lambda\gamma} V + \pi_{\lambda\gamma} (A_j V + B_j W_p) + \pi_{\lambda\gamma} (V A_j^T + W_p^T B_j^T) + E_j E_j^T$$

则闭环系统式(15)渐进稳定,  $W_j V^{-1}$  为第  $j$  个操作点的局部状态反馈控制矩阵。由式(14), 具有区域极点约束的  $H_\infty$  模糊保性能总控制器为

$$u = \sum_{j=1}^m \mu_j W_j V^{-1} x$$

应用定理 1, 可对由模糊 T-S 模型描述、存在不确定性和外界有界干扰影响的非线性系统(5), 进行 LMI 区域极点约束的  $H_\infty$  模糊保性能状态反馈控制器设计, 应用 Matlab 的 LMI 工具箱编程可对式(17)的 LMI 系统进行求解得控制器。

### 3 多轴转向车辆控制器求解和仿真分析

#### 3.1 非线性模型的局部线性化与控制器求解

为了验证算法对多轴转向车辆控制的有效性,

基于模糊 T-S 模型对某一五轴转向车辆的控制器进行求解, 并对原非线性、干扰和不确定性闭环系统进行控制仿真。车辆设计中采用的主要参数如表 1 所示。

表 1 控制器求解和仿真的车辆主要参数

| 变量                                  | 数值           | 变量  | 数值      |
|-------------------------------------|--------------|---|---------|
| $m/\text{kg}$                       | 39 280       | $K_{\phi 1}/(\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1})$              | -76 540 |
| $m_s/\text{kg}$                     | 23 568       | $K_{\phi 2}/(\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1})$              | -76 540 |
| $l_1/\text{m}$                      | 4.379 3      | $K_{\phi 3}/(\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1})$              | -92 000 |
| $l_2/\text{m}$                      | 1.749 3      | $K_{\phi 4}/(\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1})$              | -92 000 |
| $l_3/\text{m}$                      | -0.000 733 2 | $K_{\phi 5}/(\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1})$              | -92 000 |
| $l_4/\text{m}$                      | -1.860 7     | $C_{\phi 1}/(\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}\cdot\text{rad}^{-1})$ | -5 864  |
| $l_5/\text{m}$                      | -3.720 7     | $C_{\phi 2}/(\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}\cdot\text{rad}^{-1})$ | -5 864  |
| $h_s/\text{m}$                      | 0.75         | $C_{\phi 3}/(\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}\cdot\text{rad}^{-1})$ | -9 800  |
| $I_{xx}/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$ | 90 000       | $C_{\phi 4}/(\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}\cdot\text{rad}^{-1})$ | -9 800  |
| $I_{zz}/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$ | 311 760      | $C_{\phi 5}/(\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}\cdot\text{rad}^{-1})$ | -9 800  |
| $I_{xz}/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$ | 187 967      |   |         |

根据文献[17]提出的魔术公式, 轮胎侧偏力表示为

$$F_{yi} = D_i \sin\{C_i \arctan[B_i \alpha_i (1 - E_i) + E_i \arctan B_i \alpha_i]\} \quad (18)$$

式中:  $i=1, 2, \dots, 5$ ;  $B_i, C_i, D_i$  和  $E_i$  为魔术公式的曲线拟合系数。根据车辆所使用轮胎提供的实验数据进行曲线拟合, 得到所使用轮胎在不同载荷下“魔术公式”中的参数值为  $C_1=C_2=C_3=C_4=C_5=1.30, D_1=D_2=D_3=7\ 560\ \text{kg}, D_4=D_5=8\ 300\ \text{kg}, B_1=B_2=B_3=0.832\ 8, B_4=B_5=1.77$ 。

在式(18)中, 由于侧偏角  $\alpha_i$  很小,  $\arctan B_i \alpha_i \approx B_i \alpha_i$ , 则

$$F_{yi} \approx D_i \sin(C_i B_i \alpha_i) \quad (19)$$

根据正弦函数的泰勒级数展开式  $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$ , 忽略高于三次方的项, 则由式(3)可得

$$\begin{cases} k_{1i} = -D_i C_i B_i \\ k_{2i} = \frac{D_i C_i^3 B_i^3}{3!} \end{cases} \quad (20)$$

由式(20)可计算得  $k_{1i}$  和  $k_{2i}$ , 由式(4, 5)计算得  $f(x)$  和  $g(x)$ , 选用  $x = [\omega_r, \beta, \phi, \dot{\phi}]^T$  的 4 个工作点为(0 0 0 0), (3 0 0 0), (7 0 0 0)和(12 0 0 0), 将工作点代入式(8, 13), 可得到 4 条模糊规则。根据 1.2 节中工作点附近的局部线性化方法, 对以上 4

个工作点线性化,可得到4个局部线性子模型

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.4587 & 0.1389 & -4.9310 & -0.7926 \\ -0.9603 & -0.2017 & -0.2208 & -0.0355 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1.0879 & -0.3702 & -8.1786 & -1.3147 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.4586 & 0.1391 & -4.9310 & -0.7926 \\ -0.9602 & -0.2017 & -0.2208 & -0.0355 \\ 0.0001 & 0 & 0 & 1 \\ 1.0878 & -0.3696 & -8.1786 & -1.3147 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.4585 & 0.1402 & -4.9310 & -0.7926 \\ -0.96 & -0.2014 & -0.2208 & -0.0355 \\ 0.0003 & 0 & 0 & 1 \\ 1.087 & -0.3666 & -8.1786 & -1.3147 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0.4582 & 0.1428 & -4.9310 & -0.7926 \\ -0.9594 & -0.2009 & -0.2208 & -0.0355 \\ 0.001 & 0 & 0 & 1 \\ 1.0852 & -0.3595 & -8.1786 & -1.3147 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -1.5525 & -0.3078 & 0 & -4.25 \\ 0.4944 & 0.4527 & 0 & 2.5143 \end{bmatrix}^T$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} -1.5517 & -0.3077 & 0 & -4.2481 \\ 0.4934 & 0.4525 & 0 & 2.5117 \end{bmatrix}^T$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} -1.5483 & -0.3073 & 0 & -4.2395 \\ 0.4889 & 0.4519 & 0 & 2.5001 \end{bmatrix}^T$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} -1.5402 & -0.3062 & 0 & -4.2192 \\ 0.4782 & 0.4503 & 0 & 2.4727 \end{bmatrix}^T$$

经验证,  $(A_j, B_j)$  均可控。根据多轴转向车辆的性能要求,可对图2的LMI区域参数选定为  $r=5$ ,  $a=8$ 。于是由式(11,12),可得  $L = (\pi_{\lambda\gamma})_{1 \leq \lambda, \gamma \leq 4} = \begin{bmatrix} -5 & 8 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$ ,  $M = (\pi_{\lambda\gamma})_{1 \leq \lambda, \gamma \leq 4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。

令  $I_{2 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , 在式(9,10)中选取:

$\Delta A_j = 0.2A_j$ ,  $\Delta B_j = 0.2B_j$ ,  $H_j = I_4$ ,  $E_j = 0.01I_4$ ,  $D_1 = 0.1I_4$ ,  $D_2 = 0.2I_4$ ,  $D_3 = 0.4I_4$ ,  $D_4 = 0.8I_4$ ,  $F_{11} = 0.02I_4$ ,  $F_{21} = 0.02I_{2 \times 4}$ ,  $F_{12} = 0.01I_4$ ,  $F_{22} = 0.01I_{2 \times 4}$ ,  $F_{13} = 0.005I_4$ ,  $F_{23} = 0.005I_{2 \times 4}$ ,  $F_{14} = 0.0025F_{24}$ ,  $F_{24} = 0.0025I_{2 \times 4}$ ; 在式(16)中取:  $Q = 0.01I_4$ ,  $R = 0.01I_2$ 。利用 Matlab 的 LMI 工具箱, 取  $H_\infty$  指标  $\eta = 0.01$ , 求解定理1中的LMI系统, 求出  $V, W_1, W_2, W_3$  和  $W_4$ 。由  $k_j = W_j V^{-1}$  可进一步求出4个局部线性控制器为

$$k_1 = \begin{bmatrix} 116.8507 & 158.9153 & -28.5674 & 93.6608 \\ 100.1718 & 269.1311 & 57.3213 & 89.1712 \end{bmatrix}$$

$$k_2 = \begin{bmatrix} 118.3840 & 161.4855 & -28.6438 & 94.9223 \\ 102.9166 & 273.8553 & 57.2605 & 91.4376 \end{bmatrix}$$

$$k_3 = \begin{bmatrix} 120.3013 & 162.0795 & -30.3520 & 96.3245 \\ 106.5865 & 275.8581 & 54.5239 & 94.1794 \end{bmatrix}$$

$$k_4 = \begin{bmatrix} 124.0764 & 161.7869 & -34.6155 & 98.9878 \\ 113.9734 & 277.6413 & 47.6314 & 99.5484 \end{bmatrix}$$

根据建立的 T-S 模糊推理系统, 得到各条规则模糊前件的隶属度合成  $h_j$ , 由式(10)中  $\mu_j$  的定义和式(14), 便可求出闭环系统总控制器  $u$ 。

### 3.2 闭环系统仿真

利用 Matlab 的 M 文件编程及其 Simulink 平台, 由式(5)确定的非线性五轴转向车辆为控制对象, 由3.1节中求出的局部线性控制器, 建立基于 T-S 模糊推理的闭环控制系统, 结构如图3所示, 由模糊推理系统得到的各个时刻  $\mu_j$  和式(14)得总控制器。模糊推理系统的输入采用单点模糊集; 输出采用一阶 T-S 模糊规则;  $x$  的4个分量作为4个模糊语言变量输入, 每个变量选定各自的语言变量值, 其隶属度函数根据3.1节中选定的4个工作点采用参数不同的三角形函数, 驾驶者输入  $\delta_{id}$  和干扰输入  $\omega$  采用普通语言变量; T-S 模糊推理的前件同 Mamdani 系统, 其输出为精确控制量  $\delta_{ic}$  和  $\delta_2$ 。

仿真分转向回正和驾驶者前轮角阶跃输入两种情况, 车速均为  $u_c = 70$  km/h。为说明模糊 T-S 推理系统对非线性系统建模及其控制器设计的有效性, 增加了固定极点配置模糊控制和相应开环状态响应的仿真并进行比较, 且固定极点配置控制的  $\omega = [0.1 \sin t, 0.1 \sin t, 0.1 \sin t, 0.1 \sin t]$ , 不确定性  $\Delta A_j = 0.1A_j$ ,  $\Delta B_j = 0.1B_j$ , 而区域极点约束  $H_\infty$  保性能控制的  $\omega = [\sin t, \sin t, \sin t, \sin t]$ , 不确定性  $\Delta A_j = 0.3A_j$ ,  $\Delta B_j = 0.3B_j$ 。

转向回正仿真中, 转向回正后的初始时刻状态为  $\omega_r = 6^\circ/s$ ,  $\beta = 2^\circ$ ,  $\phi = -1^\circ$ ,  $\dot{\phi} = -2^\circ/s$ 。开环状态响应如图4所示, 各状态稳态值均为0, 只有  $\beta$

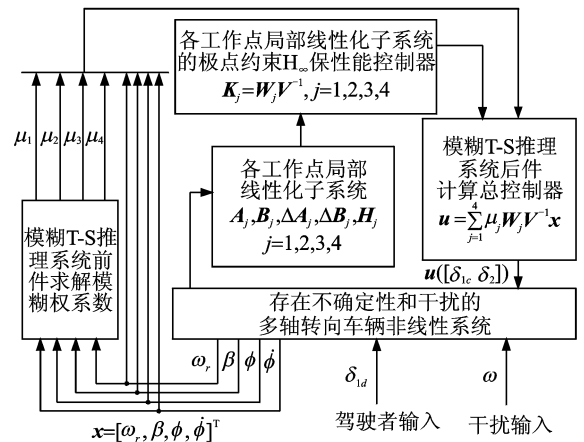


图3 闭环控制系统

出现了一次峰值为  $-0.8^\circ$  超调,但  $\pm 5\%$  误差范围内调节时间均约为 3 s;固定极点配置控制的状态响应如图 5 所示,各状态稳态值均为 0;  $\pm 5\%$  误差范围内调节时间均约为 0.7 s,比开环响应时间快很多;瞬态响应均出现振荡; $\omega_r$  无超调,而  $\beta$ ,  $\phi$  和  $\dot{\phi}$  最大超调值分别约为  $-1.8^\circ$ ,  $-1.8^\circ$  和  $-5.5^\circ/\text{s}$ ;比较图 4,5,固定极点配置控制有时在响应时间上缩短很多,而在平稳性上却得不到提高,两者难以兼顾。区域极点约束  $H_\infty$  保性能控制结果如图 6 所示,各状态稳态值均为 0;  $\pm 5\%$  误差范围内调节时间均约为 0.3 s;瞬态响应  $\phi$  出现轻微振荡, $\dot{\phi}$  出现一次振荡; $\omega_r$ ,  $\beta$  和  $\phi$  均无超调, $\dot{\phi}$  最大超调值约为  $1.3^\circ/\text{s}$ ;和图 4,5 相比较,图 6 中的响应时间、超调量和平稳性都比开环与固定极点配置控制得到了改善。两种控制的控制量如图 7 所示,均在  $-3\sim 7^\circ$  之间,前轮和后轮的转角在工程中均能得到实现。总之,转向回正仿真表明了基于模糊 T-S 推理的区域极点约束  $H_\infty$  保性能控制能对状态响应的各方面性能进行改善。

驾驶者前轮角阶跃输入时,  $\delta_{1d} = 6^\circ$ , 初始状态均为零,开环和两种控制器作用的状态响应分别见图 8~10。开环状态的  $\omega_r$ ,  $\beta$  和  $\phi$  稳态值分别约为  $19^\circ/\text{s}$ ,  $9^\circ$  和  $-3^\circ$ ,  $\dot{\phi}$  为  $0^\circ/\text{s}$ ;  $\pm 5\%$  误差范围内调节

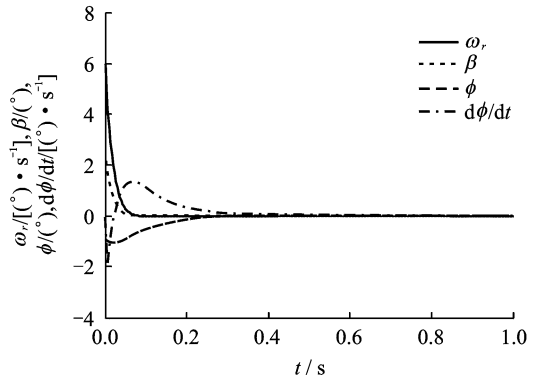


图 6 极点约束  $H_\infty$  保性能控制转向回正状态响应

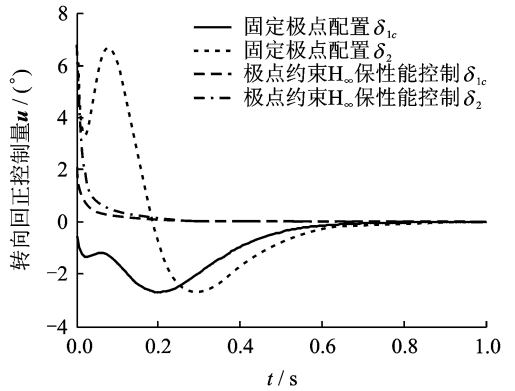


图 7 转向回正闭环控制控制量

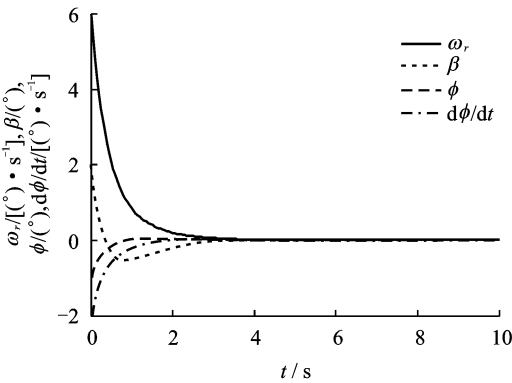


图 4 转向回正试验开环状态响应

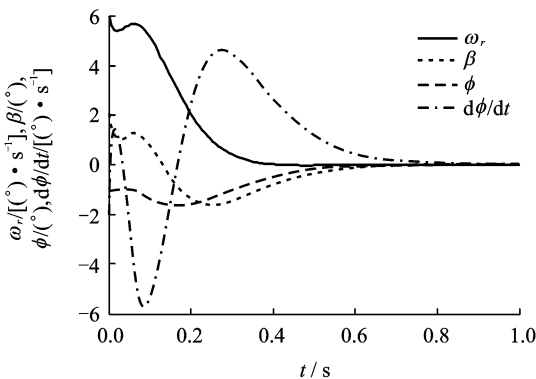


图 5 固定极点配置转向回正状态响应

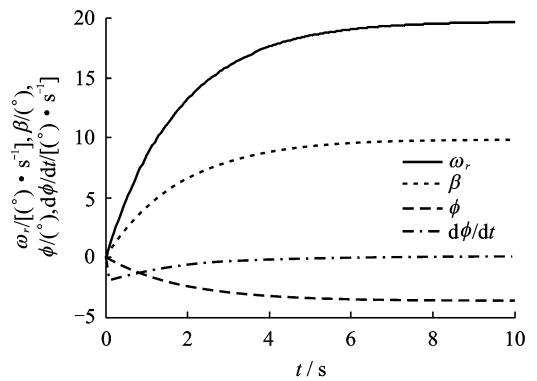


图 8 前轮角阶跃输入开环状态响应

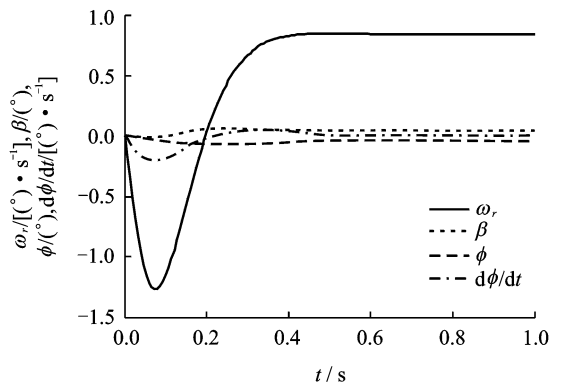


图 9 固定极点配置前轮角阶跃输入状态响应

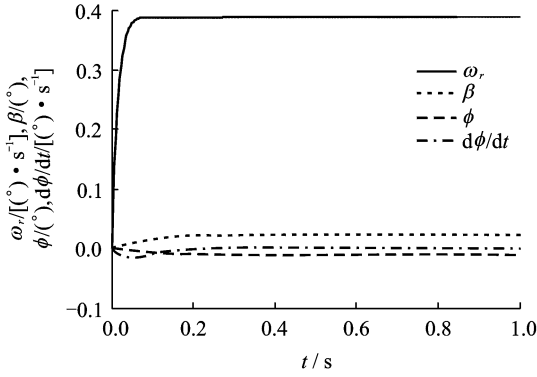


图10 极点约束  $H_{\infty}$  保性能控制  
前轮角阶跃输入状态响应

时间均约为 7 s; 只有  $\dot{\phi}$  出现  $-2^{\circ}/s$  的超调。固定极点配置的  $\omega_r$ ,  $\beta$  和  $\phi$  稳态值分别约为  $0.7^{\circ}/s$ ,  $0.055^{\circ}$  和  $-0.055^{\circ}$ ,  $\dot{\phi}$  为  $0^{\circ}/s$ ;  $\pm 5\%$  误差范围内调节时间均约为 0.4 s;  $\omega_r$  在到达稳态值前反向振荡;  $\dot{\phi}$  也一次反向振荡后超调,  $\phi$  和  $\beta$  无超调; 图 9 和图 8 相比, 响应时间和稳态值明显减小, 虽出现超调和振荡, 但超调值很小, 相应性能得到了提高。区域极点约束  $H_{\infty}$  保性能控制的  $\omega_r$ ,  $\beta$  和  $\phi$  稳态值分别约为  $0.39^{\circ}/s$ ,  $0.025^{\circ}$  和  $-0.014^{\circ}/s$ ,  $\dot{\phi}$  为  $0^{\circ}/s$ ;  $\pm 5\%$  调节时间均小于 0.18 s;  $\omega_r$ ,  $\beta$  和  $\phi$  瞬态过程均无振荡无超调, 仅  $\dot{\phi}$  在到达稳态值前出现一次反向振荡, 峰值约为  $0.019^{\circ}/s$ ; 两种控制的控制量曲线如图 11 所示, 均在  $-6^{\circ} \sim 6^{\circ}$  之间, 前轮和后轮的转角在工程中也均能得到实现。对比开环和固定极点配置模糊控制, 基于模糊 T-S 推理的区域极点约束  $H_{\infty}$  保性能控制能使状态响应性能得到进一步提高。

从以上分析可知, 在轮胎非线性、干扰和不确定性情况下, 模糊 T-S 推理方法对非线性多轴转向车辆建模和控制器设计有效, 并通过对比开环状

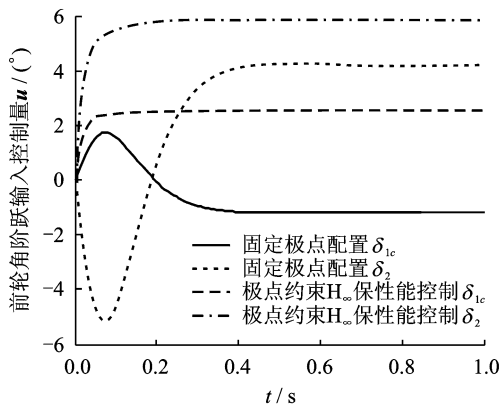


图11 前轮角阶跃输入闭环控制量

态响应和固定极点配置模糊控制的效果, 区域极点约束  $H_{\infty}$  保性能控制的状态响应时间更短, 振荡更小, 且前轮角阶跃输入下稳态值更小, 进一步说明了基于模糊 T-S 模型的区域极点约束  $H_{\infty}$  保性能控制方法能使多轴转向车辆的高速转向更加平稳迅速, 且具有更强抗干扰和抗模型不确定性影响的能力。

## 4 结束语

针对基于轮胎非线性的多轴转向车辆非线性模型, 以及外界干扰和模型参数的不确定性, 基于模糊 T-S 推理方法建立模糊 T-S 模型并设计区域极点约束  $H_{\infty}$  保性能控制器, 经过对某五轴转向车辆的控制器求解和闭环系统仿真, 结果表明了模糊 T-S 推理方法应用于多轴转向车辆非线性系统建模和控制器设计有效, 并且基于模糊 T-S 模型的区域极点约束  $H_{\infty}$  保性能控制方法能有效克服不确定性和外界干扰的影响, 使多轴转向车辆高速转向迅速平稳, 具有一定的鲁棒性和增强了操纵稳定性。

## 参考文献:

- [1] An S J, Yi K, Jung G, et al. Desired yaw rate and steering control method during cornering for a six-wheeled vehicle[J]. International Journal of Automotive Technology, 2008, 9(2): 173-181.
- [2] Kreutz M, Horn M, Zehetner J. Improving vehicle dynamics by active rear wheel steering systems[J]. Vehicle System Dynamics, 2009, 47(12): 1551-1564.
- [3] You S S, Chai Y H. Multi-objective control synthesis: an application to 4WS passenger vehicles[J]. Mechatronics, 1999, 9(4): 363-390.
- [4] Yin G D, Chen N, Wang J X, et al. Robust control for 4WS vehicles considering varying tire-road friction coefficient[J]. International Journal of Automotive Technology, 2010, 11(1): 33-40.
- [5] Kim H J. Robust roll motion control of a vehicle using integrated control strategy[J]. Control Engineering Practice, 2011, 19(8): 820-827.
- [6] Gianone L, Palkovics L, Bokor J. Design of an active 4WS system with physical uncertainties[J]. Control Engineering Practice, 1995, 3(8): 1075-1083.
- [7] Hu Haiyan, Han Qiang. Three-dimensional modeling and dynamic analysis of four-wheel-steering vehicles[J]. Acta Mechanica Sinica, 2003, 19(1): 79-88.
- [8] Hiraoka T, Nishihara O, Kumamoto H. Automatic path-tracking controller of a four-wheel steering vehi-



- cle[J]. *Vehicle System Dynamics*, 2009, 47(10): 1205-1227.
- [9] Alfi A, Farrokhi M. Hybrid state-feedback sliding-mode controller using fuzzy logic for four-wheel-steering vehicles [J]. *Vehicle System Dynamics*, 2009, 47(3): 265-284.
- [10] Zhang Bojun, Liu Chunhui. Modeling and simulating research of integrated fuzzy control for automobile steering stability[C]//2011 International Conference on Energy and Environmental Science. Singapore: Energy Procedia, 2011:1299-1304.
- [11] Dai L, Han Q. Stability and hopf bifurcation of a nonlinear model for a four-wheel-steering vehicle system[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2004, 9(3): 331-341.
- [12] Shun Changchang. Synchronization in a steer-by-wire vehicle dynamic system[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2007, 45(2/3/4/5/6/7/8): 628-643.
- [13] 吴忠强,许世范,岳东. 非线性系统的 T-S 模糊建模与控制[J]. *系统仿真学报*, 2002, 14(2): 253-256.  
Wu Zhongqiang, Xu Shifan, Yue Dong. T-S fuzzy modeling and control for nonlinear systems[J]. *Journal of System Simulation*, 2002, 14(2): 253-256.
- [14] 俞立. 鲁棒控制-线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京:清华大学出版社, 2002.  
Yu Li. *Robust control-linear matrix inequality method*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.
- [15] 孙新柱,胡寿松. 基于区域极点约束的不确定线性系统可靠跟踪控制[J]. *南京航空航天大学学报*, 2006, 38(S): 17-20.  
Sun Xinzhu, Hu Shousong. Reliable tracking control for uncertain linear systems based on region pole assignment[J]. *Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics*, 2006, 38(S): 17-20.
- [16] 王玉惠,吴庆宪,姜长生,等. 具有极点约束的空天飞行器再入姿态的  $H_\infty$  模糊保性能控制[J]. *信息与控制*, 2008, 37(3): 298-304.  
Wang Yuhui, Wu Qingxian, Jiang Changsheng, et al.  $H_\infty$  fuzzy guaranteed cost control with pole constraints for aerospace vehicles re-entry attitude[J]. *Information and Control*, 2008, 37(3): 298-304.
- [17] Bakker E, Pacejka H B, Lidner L. A new tire model with an application in vehicle dynamics studies[C]//SAE Technical Paper Series. USA: SAE Publication Group, 1989: 83-95.