第 45 卷第 5 期 南 京 航 空 航 天 大 学 学 报 Vol. 45 No. 5
2013 年 10 月 Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics Oct. 2013

基于切比雪夫多项式的旋翼响应及稳定性

周　薇　韩景龙　陈全龙
（南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室，南京，210016）

摘要：根据 Hamilton 原理，采用准定常气动力模型，建立直升机旋翼的有限元方程，利用移位的第一类切比雪夫多项式计算了旋翼的周期响应。在分析周期响应的稳定性时，通过移位的第一类切比雪夫多项式的积分运算，能够快速准确地求得旋翼系统的 Floquet 转移矩阵。算例显示，本方法所得的解析周期响应与时间有限元法所得数值解吻合良好，稳定性分析准确且无需借助 Hsu 法等数值方法，验证了将切比雪夫多项式理论引入到直升机气弹响应研究的可行性和正确性。

关键词：非线性动力学；移位的第一类切比雪夫多项式；近似解析解；稳定性
中图分类号：V211.52　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1005-2615(2013)05-0628-05

Rotor Response and Stability Based on Chebyshev Polynomials

Zhou Wei, *Han Jinglong*, *Chen Quanlong*
(State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures,
Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China)

Abstract: According to the Hamilton principle, using quasi-steady aerodynamic model, the finite element equations of the helicopter rotor are established, and the periodic responses of rotor can be calculated via the shifted Chebyshev polynomials of the first kind. In the stability study of periodic responses, the Floquet transition matrix can be obtained quickly and accurately by the integral operation of shifted Chebyshev polynomials of the first kind. The example shows that the analytic periodic responses obtained by the suggested method coincide with the numerical solutions obtained by the time finite element method, and the stability analysis is accurate without the help of any other numerical approach such as Hsu method. It is proved that Chebyshev polynomials theory brought into aeroelastic response research area is viable and correct.

Key words: nonlinear dynamics; shifted Chebyshev polynomials of the first kind; approximate analytical solution; stability

旋翼气动弹性响应与稳定性问题，是直升机动力学的一个重要研究课题。旋翼动力学模型是包含了结构、惯性和气动载荷非线性的高维时变常微分方程组。通常采用数值积分法、时间有限元法或谐波平衡法计算其周期响应，再利用 Hsu 法[1]等数值方法计算 Floquet 转移矩阵，从而根据 Floquet 理论判断周期响应的稳定性[2-5]。然而，上述做法也存在不足之处，例如：通过数值解难以全面考察系统解的性质；数值积分误差会随计算时间积累并且无法消除[6]；谐波平衡法是一种解析方法，它避免了上述数值方法的不足，但其精度受预定谐波项数限制，且对高阶谐波求解困难[5,7]。除此之外，在稳定性分析中，目前采用的计算 Floquet 转移矩阵的数值方法普遍精度较低[8]。

基金项目：高等学校博士学科点专项科研基金(20113218110002)资助项目；江苏高校优势学科建设工程资助项目。
收稿日期：2012-09-07；**修订日期**：2013-03-31
通信作者：韩景龙，男，教授，博士生导师，E-mail：hjlae@nuaa.edu.cn。

切比雪夫多项式在数值逼近领域有着重要应用。研究表明，利用 15 到 18 项移位的第一类切比雪夫级数可以精确地逼近三角函数[9]以及高维系统的 Floquet 转移矩阵[10]。本文将切比雪夫多项式理论引入到直升机旋翼气动弹性响应研究，计算了桨叶的周期响应，并分析了所得周期响应的稳定性。有关移位的第一类切比雪夫多项式理论，乘法、积分算子矩阵的取值，详见文献[9～14]。

1　桨叶动力学方程以及研究方法

以有限元法建立桨叶运动方程[15]。在旋转坐标系下，应用 Hamilton 变分原理导出

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta U-\delta T-\delta W)\,\mathrm{d}t=0 \tag{1}$$

式中：δU 为应变能变分；δT 为动能变分；δW 为气动力虚功。各变分详细表达式见文献[15]。

沿展向把桨叶分成若干梁单元，每个梁单元具有 15 个运动自由度，分布在单元的 5 个节点上(图 1)。u,v,w,φ 分别为桨叶弹性轴上各节点拉伸、摆振、挥舞、扭转自由度的弹性位移。气动力计算采用准定常气动力理论和 Drees 入流模型[15]。将全部梁单元进行组装，得到离散化后总的桨叶能量变分方程

$$\delta\Pi=\int_{\psi_1}^{\psi_2}\delta\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{q}-\boldsymbol{F}]\,\mathrm{d}\psi=0 \tag{2}$$

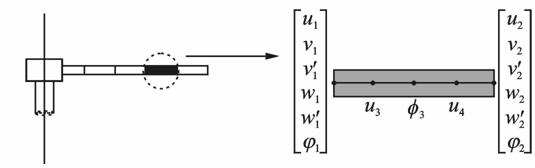

图 1　桨叶的空间有限元图解

根据变分选取的任意性，推导出总的桨叶运动有限元方程

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{q}-\boldsymbol{F}=0 \tag{3}$$

式中：$\boldsymbol{q}(t)=\{u_1,v_1,v_1',w_1,w_1',\varphi_1,\cdots,u_N,v_N,v_N',w_N,w_N',\varphi_N\}$是桨叶总节点位移向量；$\boldsymbol{M},\boldsymbol{C},\boldsymbol{K}$ 分别为质量、阻尼和刚度矩阵；$\boldsymbol{F}$ 为广义力向量且非线性项全部存在于 $\boldsymbol{F}$ 中。在前飞状态下，旋翼的桨叶要产生周期挥舞运动，因而方程(3)含有周期系数，设其周期为 T。

将式(3)整理成状态方程的形式

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}(t),t)\boldsymbol{q}(t)+\boldsymbol{C}(t) \tag{4}$$

式中，矩阵 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}(t),t)$ 以 T 为周期且包含非线性项；常向量 $\boldsymbol{C}(t)$ 也以 T 为周期。

根据切比雪夫多项式理论：任意一个连续函数在区间[0,1]上可以展开为移位的第一类切比雪夫级数。首先，进行周期归一化，对时间变量 t 做变换 $t=T\times s(s\in[0,1])$，将式(4)转化为关于 s 求导

$$\mathrm{d}\boldsymbol{q}(s)/\mathrm{d}s=T\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}(s),s)\boldsymbol{q}(s)+T\cdot\boldsymbol{C}(s) \tag{5}$$

再把向量 $\boldsymbol{q}(s)$，$\boldsymbol{C}(s)$ 以及矩阵 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}(s),s)$ 中每个元素在[0,1]上展开为 m 项移位的第一类切比雪夫级数：$\boldsymbol{q}_i(s)=\{\boldsymbol{T}^*(s)\}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}^i$，$\boldsymbol{C}_i(s)=\{\boldsymbol{T}^*(s)\}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}^i$，$\boldsymbol{A}_{ij}(\boldsymbol{q}(s),s)=\{\boldsymbol{T}^*(s)\}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}^{ij}$。其中，$\{\boldsymbol{T}^*(s)\}=\{\boldsymbol{T}_0^*(s)\ \boldsymbol{T}_1^*(s)\ \cdots\ \boldsymbol{T}_{m-1}^*(s)\}^{\mathrm{T}}$ 是 $m\times1$ 维列向量，其元素为移位的第一类切比雪夫多项式的前 m 项；$\boldsymbol{b}^i=\{b_0^i\ b_1^i\cdots\ b_{m-1}^i\}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{c}^i=\{c_0^i\ c_1^i\cdots\ c_{m-1}^i\}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{d}^{ij}=\{d_0^{ij}\ d_1^{ij}\cdots\ d_{m-1}^{ij}\}^{\mathrm{T}}$ 为 $m\times1$ 维列向量，其中 $\boldsymbol{b}^i$ 未知，$\boldsymbol{c}^i$ 已知，$\boldsymbol{d}^{ij}$ 中含有未知变量 $\boldsymbol{b}^i$。假设式(5)中的 $\boldsymbol{q}(s)$ 为 $n\times1$ 维，下面定义 $n\times nm$ 维矩阵 $[\hat{\boldsymbol{T}}^*(s)]^{\mathrm{T}}$

$$[\hat{\boldsymbol{T}}^*(s)]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}\otimes\{\boldsymbol{T}^*(s)\}^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

式中：$\boldsymbol{I}$ 为 $n\times n$ 单位矩阵；$\otimes$代表 Kronecker 乘法。

由移位的第一类切比雪夫多项式的乘积和积分运算性质，在区间[0,1]上将式(5)对 s 进行积分

$$\begin{aligned}&[\hat{\boldsymbol{T}}^*(s)]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{B}\}-[\hat{\boldsymbol{T}}^*(s)]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{q}(0)\}=\\&[\hat{\boldsymbol{T}}^*(s)]^{\mathrm{T}}[\bar{\boldsymbol{A}}]\{\boldsymbol{B}\}+[\hat{\boldsymbol{T}}^*(s)]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{G}]\{\boldsymbol{C}\}\end{aligned} \tag{7}$$

式中，$[\bar{\boldsymbol{A}}]_{nm\times nm}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{1,1}&\boldsymbol{A}_{1,2}&\cdots&\boldsymbol{A}_{1,n}\\\boldsymbol{A}_{2,1}&\boldsymbol{A}_{2,2}&\cdots&\boldsymbol{A}_{2,n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\boldsymbol{A}_{n,1}&\boldsymbol{A}_{n,2}&\cdots&\boldsymbol{A}_{n,n}\end{bmatrix}$；$[\boldsymbol{A}_{i,j}]_{m\times m}=[\boldsymbol{G}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{d}^{ij})]_{m\times m}$；$\{\boldsymbol{B}\}=\{b_0^1\ b_1^1\cdots\ b_{m-1}^1\cdots b_0^n\ b_1^n\cdots\ b_{m-1}^n\}^{\mathrm{T}}$ 是由 $nm\times1$ 维未知数组成的列向量；$\{\boldsymbol{C}\}=\{c_0^1\ c_1^1\cdots\ c_{m-1}^1\cdots c_0^n\ c_1^n\cdots\ c_{m-1}^n\}^{\mathrm{T}}$ 是 $nm\times1$ 维已知列向量；$\boldsymbol{G}$ 为移位的第一类切比雪夫多项式的积分算子矩阵；$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{d}^{ij})$ 为关于 $\boldsymbol{d}^{ij}$ 的乘积算子矩阵。积分算子矩阵 $\boldsymbol{G}$ 和乘积算子矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的取值参见文献[9～13]。

由式(7)知，如下非线性代数方程组成立

$$[\boldsymbol{I}-\bar{\boldsymbol{A}}]\{\boldsymbol{B}\}=\{\boldsymbol{q}(0)\}+[\boldsymbol{G}]\{\boldsymbol{C}\} \tag{8}$$

求解上述非线性方程，得到系数$\{\boldsymbol{B}\}$，则 $\boldsymbol{q}(s)$ 可知。做逆变换 $s=\dfrac{t}{T}$，得到 $\boldsymbol{q}(t)$，即为系统(4)在$[0,T]$时刻响应。将 $\boldsymbol{q}(T)$ 代入式(8)作为下一周期的初值进行计算，依次类推，经过多个周期计算，即可求得旋翼系统稳态响应。

在稳定性分析中，对移位的第一类切比雪夫级数周期解，只需将单位矩阵的每个列向量分别作为初始条件，利用积分算子矩阵 $\boldsymbol{G}$，在一个周期上对

周期解处的线化系统进行积分，取其周期末点的值，即为 Floquet 转移矩阵$\Phi(T)$的相应列向量[9]。当周期解表示为 15 到 18 项移位的第一类切比雪夫多项式时，所得 Floquet 转移矩阵具有较高精度[10]。根据 Floquet 理论，若 Floquet 乘子的模均小于 1，则系统周期解渐近稳定性；否则不稳定。

2 算例分析

本文以无铰式直升机旋翼为例，其特性参数如表 1 所示。

表 1 旋翼特性参数

参数	数值
旋翼半径 R/m	4.92
弦长 c/m	0.27
旋翼转速 Ω/(rad·s^{-1})	44.4
桨叶片数 N_b	4
洛克数 γ	5.2
均质桨叶线密度 m_0/(kg·m^{-1})	5.56
桨盘实度 σ	0.07

沿展向把桨叶分成 5 个梁单元(图 2)，在旋转坐标系下，建立桨叶运动方程

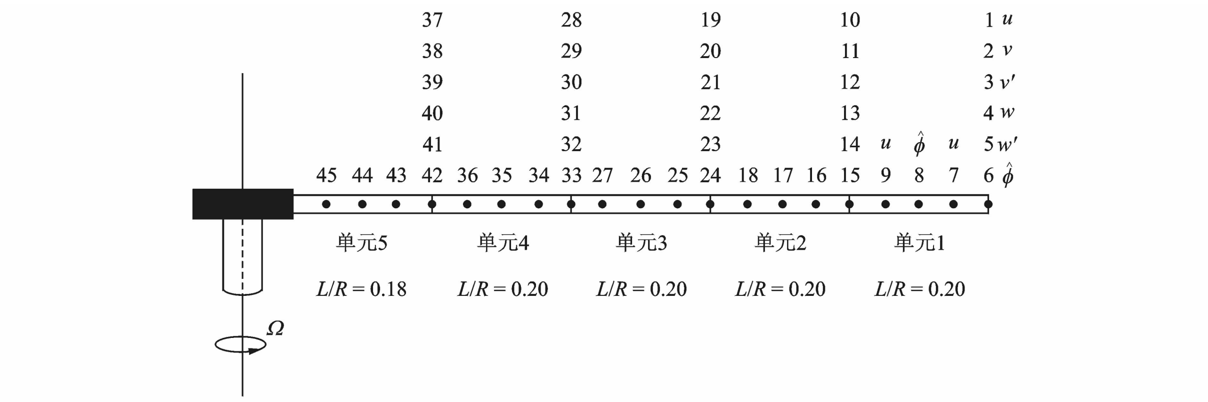

图 2 算例所使用的桨叶空间有限元

$$\bar{M}\ddot{q}+\bar{C}\dot{q}+\bar{K}q-\bar{F}=0 \tag{9}$$

式中：$\boldsymbol{q}(t)$是总节点位移向量，$\boldsymbol{q}(t)=\{u_1,v_1,v'_1,w_1,w'_1,\varphi_1,\cdots,u_{14},\varphi_{10},u_{15}\}$。算例采用准定常气动力和 Drees 入流模型[15]。前进比$\mu=0.2$时，入流参数$\lambda_0=0.012\ 4$，$\lambda_C=0.013\ 8$，$\lambda_S=-0.004\ 97$，总距$\theta_0=6.65°$，周期变距$\theta_C=2°$，$\theta_S=-3.67°$。

将各参数量纲一化后，代入方程(9)。为降低方程维数、节省求解时间，计算时取桨叶前六阶固有模态[5,15]，将方程(9)转化为模态坐标方程

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{p}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{p}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{p}-\boldsymbol{F}=0 \tag{10}$$

整理成状态方程形式如下

$$\dot{\boldsymbol{p}}(t)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}(t),t)\boldsymbol{p}(t)+\boldsymbol{C}(t) \tag{11}$$

式中：$\boldsymbol{p}(t)=\{p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6,\dot{p}_1,\dot{p}_2,\dot{p}_3,\dot{p}_4,\dot{p}_5,\dot{p}_6\}^{\mathrm{T}}$为系统总的量纲一模态自由度；周期$T=\frac{2\pi}{44.4}$。由切比雪夫多项式理论，做变换$t=T\times s(s\in[0,1])$，将式(11)变换为周期为 1 且关于$s$求导的方程

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p}(s)/\mathrm{d}s=T\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}(s),s)\boldsymbol{p}(s)+T\cdot\boldsymbol{C}(s)\quad s\in[0,1] \tag{12}$$

然后把$\boldsymbol{p}(s)$，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}(s),s)$，$\boldsymbol{C}(s)$中的每一个元素在[0,1]上展开成 15 项移位的第一类切比雪夫级数形式，在区间[0,1]上对s积分，得到式(8)形式的非线性代数方程组。求解该非线性代数方程组，即可获得切比雪夫系数$\{\boldsymbol{B}\}$，从而求得$\boldsymbol{p}(s)$。做逆变换$s=\frac{t}{T}$得到$\boldsymbol{p}(t)$，即为系统(10)在[0,T]时刻的解析响应。经过多个周期的计算，即可得到系统的稳态响应。图 3 给出了各个模态自由度稳态响应的相图。

对系统(11)的稳态响应做周期为T的 Poincaré 截面，各自由度响应在 Poincaré 截面上均投影为一个不动点，从而证明系统在做周期运动。

将模态自由度还原为物理自由度，所得解析响应与时间有限元法(采用 15 个时间单元，5 阶形函数)的数值解进行比较。图 4 以桨尖位置为例，显示了由上述两种方法求得的挥舞、摆振、扭转响应相图。两者结果吻合良好，从而验证了本文方法的正确性。

下面分析桨叶周期运动的稳定性。对周期归一化后的稳态响应$\boldsymbol{p}_p(s)$施加小扰动$\Delta\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(s)-\boldsymbol{p}_p(s)$，其中$\boldsymbol{p}_p(s)(s\in[0,1])$为已求得的桨叶周

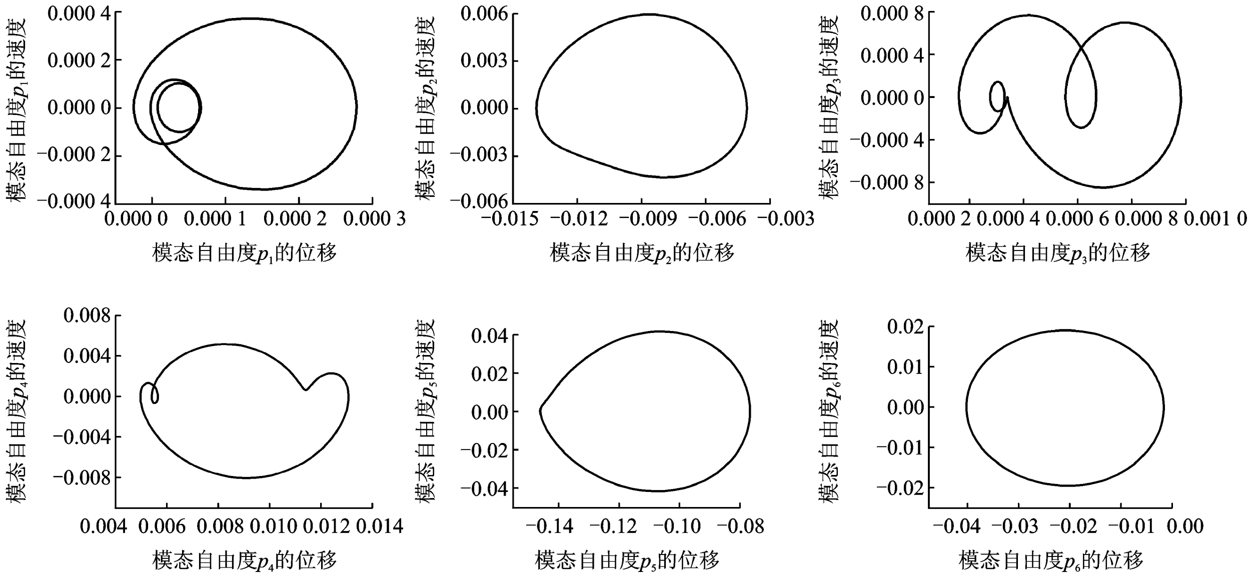

图 3　利用移位的第一类切比雪夫多项式求得的各模态自由度相图

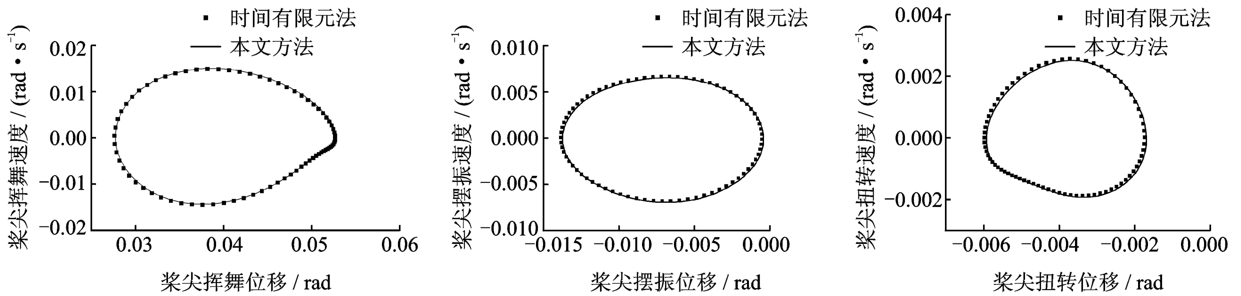

图 4　桨尖挥舞、摆振、扭转相图对比

期响应。将系统(12)在 $\boldsymbol{p}_p(s)$ 处线化，则微扰运动 $\Delta\boldsymbol{p}$ 满足线性常微分方程

$$\Delta\dot{\boldsymbol{p}}=\widetilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{p}_p(s),s)\Delta\boldsymbol{p} \tag{13}$$

式中："•"表示对 s 求导；$\widetilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{p}_p(s),s)$ 是系统(12)在周期解 $\boldsymbol{p}_p(s)$ 处的 Jacobi 矩阵。利用移位的第一类切比雪夫多项式的积分算子矩阵 $\boldsymbol{G}$，以单位矩阵的每个列向量分别作为初始积分条件，在一个周期上对系统(13)进行积分(公式(5)到(8)的计算过程)，即可分别获得对应初始条件下 $\Delta\boldsymbol{p}(s)$ 的解析表达式。取其周期末点的值，即为原系统 Floquet 转移矩阵 $\Phi(T)$ 相应列向量的取值。计算 $\Phi(T)$ 特征值(Floquet 乘子)的模，该算例 Floquet 乘子的模分别为 0.553，0.132，0.208，0.631，0.123 和 0.198，均小于 1，所以此旋翼系统在前进比为 0.2 时的周期响应渐近稳定。

3　结束语

本文将切比雪夫多项式理论引入到直升机气动弹性响应研究，计算了旋翼具有移位的第一类切比雪夫级数形式的周期响应，并分析了其周期响应的稳定性。研究发现，切比雪夫多项式在求解复杂高维强非线性系统响应时保持了较高精度，所得解析解与时间有限元法的数值结果吻合良好；利用其积分算子矩阵可以直接求得较精确的解析 Floquet 转移矩阵，进而分析稳定性，无需借助其他专门计算近似 Floquet 转移矩阵的数值方法。

参考文献：

[1]　余林，张呈林. 前飞状态下旋翼桨叶气动弹性稳定性分析[J]. 南京航空航天大学学报，1996，28(3)：315-322.

Yu Lin，Zhang Chenglin. Analysis of aeroelastic stability of rotor blades in forward flight[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics，1996，28(3)：315-322.

[2]　王浩文，高正，郑兆昌. 前飞状态下直升机旋翼系统气动弹性响应及稳定性分析[J]. 振动工程学报，1999，12(4)：521-528.

Wang Haowen, Gao Zheng, Zheng Zhaochang. Aeroelastic response and stability of helicopter rotor blades in forward flight[J]. Journal of Vibration Engineering, 1999, 12(4): 521-528.

[3] 胡国才,向锦武,张晓谷. 前飞状态直升机旋翼/机体耦合动稳定性分析模型[J]. 航空学报,2004,9(5): 451-455.

Hu Guocai, Xiang Jinwu, Zhang Xiaogu. An analytical model of coupled rotor/airframe helicopter dynamic stability in forward flight[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2004, 9(5): 451-455.

[4] 胡国才. 失衡旋翼的直升机自激振动分析模型[J]. 航空学报,2006,27(4):630-634.

Hu Guocai. Analytical model of helicopter self-excitation with unbalanced rotor[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica,2006,27(4):630-634.

[5] 胡新宇,韩景龙,喻梅. 旋翼/机身非线性气动弹性耦合配平及稳定性分析[J]. 应用数学和力学,2010,31(2): 218-226.

Hu Xinyu, Han Jinglong, Yu Mei. Nonlinear aeroelastic coupled trim and stability analysis of rotor-fuselage[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2010,31(2): 218-226.

[6] 胡海岩. 应用非线性动力学[M]. 北京: 航空工业出版社, 2000.

Hu Haiyan. Applied nonlinear dynamics[M]. Beijing: Aviation Industry Press, 2000.

[7] 陈树辉, 沈建和. 基于增量谐波平衡法的 Mathieu-Duffing 振子分岔及通往混沌道路分析[J]. 科技导报, 2007, 25(22): 22-26.

Chen Shuhui, Shen Jianhe. Bifurcation and analyses of route to chaos of Mathieu-Duffing oscillator by the incremental harmonic balance method[J]. Science and Technology Review, 2007, 25(22): 22-26.

[8] 唐进元, 陈思雨. 阻尼和刚度项含时变参数的强非线性振动系统周期解研究[J]. 振动与冲击, 2007, 26(10): 96-100.

Tang Jinyuan, Chen Siyu. Study on periodic solutions of strong nonlinear systems with time-varying damping and stiffness coefficient[J]. Journal of Vibration and Shock, 2007, 26(10): 96-100.

[9] Sinha S C, Wu D H. An efficient computational scheme for the analysis of periodic systems[J]. Journal of Sound and Vibration, 1991, 151(1): 91-117.

[10] Sinha S C, Juneja V. An approximate analytical solution for systems with periodic coefficients via symbolic computation[C]// AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 32nd Structures, Structural Dynamics and Materials Conference. Baltimore, MD: [s. n.], 1991: 790-797.

[11] 周桐,徐健学. 求非线性动力系统周期解的切比雪夫多项式法[J]. 力学学报, 2001, 33(4): 542-549.

Zhou Tong, Xu Jianxue. Chebyshev polynomials: A useful method to get the periodic solution of nonlinear dynamics[J]. Acta Mechanica Sinica, 2001, 33(4): 542-549.

[12] Zhou T, Xu J X. Research on the periodic orbit of nonlinear dynamic systems using Chebyshev polynomials[J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, 245(2): 239-250.

[13] 周桐,徐健学. 一种新的求解非线性系统周期解方法[J]. 力学季刊,2006, 27(4): 661-667.

Zhou Tong, Xu Jianxue. A new periodic solution of nonlinear dynamics[J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2006, 27(4): 661-667.

[14] Gabale A P, Sinha S C. A direct analysis of nonlinear systems with external periodic excitations via normal forms[J]. Nonlinear Dynamic, 2009, 55:79-93.

[15] Gunji B, Chopra T. University of Maryland advanced rotorcraft code (UMARC) theory manual[R]. UM-AERO 94-18. Maryland: Center for Rotorcraft Education and Research University of Maryland College Park, 1994.