

基于格子 Boltzmann 方法的气动声学计算

司海青¹ 石岩¹ 王兵¹ 吴晓军²

(1. 南京航空航天大学民航/飞行学院, 南京, 210016; 2. 中国空气动力研究与发展中心, 绵阳, 621000)

摘要:研究了应用于气动声学计算中的格子 Boltzmann 方法(Lattice Boltzmann method, LBM), 采用非平衡外推格式处理壁面边界条件, 远场无反射边界条件采用吸收层边界条件。首先, 将 LBM 应用于顶盖驱动的空腔流动模拟进行程序验证; 然后, 数值研究气动声学中的几个典型问题, 特别讨论了黏性对 LBM 数值解的影响, 并与传统的四阶精度低色散保持格式(Dispersion-relation-preserving, DRP)比较, 检验了该方法模拟气动声学基本问题的能力, 为进一步运用该方法模拟复杂物体产生噪声奠定基础。研究表明, 尽管标准 LBM 方法在时间、空间上仅有二阶精度, 但是, LBM 方法计算得到的结果能和分析解保持一致, 它是有效且可行的气动声学计算方法。

关键词:格子 Boltzmann 方法; 壁面边界条件; 吸收层边界条件; 计算气动声学; 计算流体力学

中图分类号: V211.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-2615(2013)05-0616-05

Computational Aeroacoustics Based on Lattice Boltzmann Method

Si Haiqing¹, Shi Yan¹, Wang Bing¹, Wu Xiaojun²

(1. College of Civil Aviation and Flight, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China;
2. China Aerodynamics Research and Development Center, Mianyang, 621000, China)

Abstract: The lattice Boltzmann method (LBM) is studied and extended into computational aeroacoustics (CAA), and a non-equilibrium extrapolation scheme for LBM is applied to treating wall boundary and an absorbing boundary condition is used to prevent wave reflection at the far field boundary. Firstly, LBM code is validated by simulating the lid-driven cavity flow. Then, several benchmark problems in CAA are numerically studied and comparisons between LBM and conventional four-order dispersion-relation-preserving (DRP) scheme are also performed. The ability of LBM to simulate these problems is tested, which helps to further study aerodynamic noise from complex bodies. It is demonstrated that the calculated results by LBM for benchmark problems are in good agreement with the exact solution although the standard LBM has two-order accuracy in space and time, and LBM is an effective and feasible method for aero-acoustical calculations.

Key words: lattice Boltzmann method (LBM); wall boundary condition; absorbing boundary condition; computational aero acoustics; computational fluid dynamics

格子 Boltzmann 方法(Lattice Boltzmann method, LBM)的产生与发展, 不仅在计算流体力学领域中产生了深远的影响, 它所使用的处理方法和观点对其他学科也是富有启发性的。

尽管 LBM 方法^[1]在计算流体力学领域中已得到较多应用, 但它在计算气动声学领域中的研

究^[2-5]与应用相对较晚。近几年, 在计算动力学(Computational aeroacoustics, CAA)研究领域, LBM 正逐渐受到国外研究者的足够重视, Buick 等^[5]运用 LBM 解决无黏性的声传播问题, 然后, Dellar 等^[6]运用该方法求解含有黏性的声传播问题。Marie 等^[7]分析研究了 LBM 的一些特性, 并

基金项目:国家自然科学基金(11272151)资助项目。

收稿日期: 2012-11-27; **修订日期:** 2013-02-27

通信作者: 司海青, 男, 副教授, E-mail: sihaiqing@126.com。

进行模态分析。基于经典声学问题, Li 等^[8]研究了修正的 LBM 格式精度。众所周知, LBM 是一个处理黏性问题的解算器, 由于稳定性问题, 这意味着不能直接利用 LBM 方法数值模拟无黏声学问题, 因而黏性对 LBM 数值求解这类无黏声学问题的影响需要进一步研究, 目前文献中未见这方面的相关研究, 而国内运用 LBM 方法处理气动声学问题的研究也不多见。声波从声源到远场的传播是一个长时间、长距离的过程, 要准确模拟这个过程就需要低耗散、低色散的数值格式。因此, 低色散和低耗散特性是数值模拟声波必须保证的两个特性。本文首先通过模拟二维高斯声波传播问题, 并与真解比较, 进行色散与耗散特性分析; 特别是, 当声波传播过程中遇到固体壁面时, LBM 方法模拟声波反射的能力也需要进一步的研究, 目前这方面的详细讨论并不多, 本文将选取 2 个这方面的经典算例, 验证 LBM 方法的有效性, 并与传统的低色散保持格式 (Dispersion-relation-preserving, DRP) 进行比较, 为将来研究复杂物体产生气动噪声的模拟奠定基础。数值模拟中采用标准 LBM 方法, 运用非平衡外插格式处理壁面边界条件, 远场无反射边界条件采用吸收层边界条件, 计算网格采用均匀等距网格。

1 格子 Boltzmann 方法

基于 BGK 碰撞模型的标准格子 Boltzmann 方程可以写成如下形式

$$f_{\alpha}(x + e_{\alpha}\delta t, y + e_{\alpha y}\delta t, t + \delta t) - f_{\alpha}(x, y, t) = \frac{f_{\alpha}^{\text{eq}}(x, y, t) - f_{\alpha}(x, y, t)}{\tau}\delta t \quad (1)$$

式中: f_{α} 为 α ($\alpha=0, 1, \dots, M$) 方向上的粒子分布函数, M 为粒子碰撞方向的个数; f_{α}^{eq} 为局部平衡分布函数; δt 为时间步长; e_{α} ($e_{\alpha x}, e_{\alpha y}$) 为粒子的离散速度; τ 为松弛时间, 它可以用黏性 ν 、温度 T 和时间步长来表示

$$\tau = \frac{\nu}{T} + \frac{\delta t}{2} \quad (2)$$

宏观的物理量可以由式(3)求出

$$\begin{aligned} \rho(x, y, t) &= \sum_{\alpha=0}^M f_{\alpha}(x, y, t) \\ \rho u(x, y, t) &= \sum_{\alpha=0}^M f_{\alpha}(x, y, t) e_{\alpha} \end{aligned} \quad (3)$$

压力 p 可直接由理想气体状态方程得到。

离散速度模型采用 D2Q9 模型^[9] (其中 D 代

表维空间, Q 代表离散速度, D2Q9 模型即为二维空间 9 个离散速度的模型)

$$e_{\alpha} = \begin{cases} (0, 0) & \alpha = 0 \\ (\cos\theta_{\alpha}, \sin\theta_{\alpha})c, \theta_{\alpha} = (\alpha - 1)\pi/2 & \alpha = 1, 2, 3, 4 \\ \sqrt{2}(\cos\theta_{\alpha}, \sin\theta_{\alpha})c, \theta_{\alpha} = (\alpha - 5)\pi/2 + \pi/4 & \alpha = 5, 6, 7, 8 \end{cases} \quad (4)$$

式中 c 为声速。

平衡态分布函数为

$$f_{\alpha}^{\text{eq}}(\rho, u) = \omega_{\alpha}\rho \left[1 + \frac{3(e_{\alpha} \cdot u)}{c^2} + \frac{9(e_{\alpha} \cdot u)^2}{2c^4} - \frac{3u^2}{2c^2} \right] \quad (5)$$

$$\omega_{\alpha} = \begin{cases} 4/9 & \alpha = 0 \\ 1/9 & \alpha = 1, 2, 3, 4 \\ 1/36 & \alpha = 5, 6, 7, 8 \end{cases} \quad (6)$$

式中 ω_{α} 为权系数。

壁面边界条件采用 Guo 等^[10]提出的非平衡态外推格式, 边界点处的粒子分布函数按式(7)计算

$$f_{\alpha}|_{(O)} = f_{\alpha}^{\text{eq}}|_{(O)} + [f_{\alpha}|_{(B)} - f_{\alpha}^{\text{eq}}|_{(B)}] \quad (7)$$

式中: O 为边界点; B 为与边界点相邻的第一个内点。

远场无反射边界条件采用吸收层边界条件^[8], 在吸收区域内, 粒子分布函数满足以下方程

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + e_{\alpha} \cdot \nabla f_{\alpha} + \sigma(f_{\alpha}^{\text{eq}} - F) = -\frac{1}{\tau}(f_{\alpha} - f_{\alpha}^{\text{eq}}) \quad (8)$$

式中: σ 为吸收系数; F 为平衡分布函数的目标函数。

2 结果与分析

2.1 顶盖驱动方腔流动模拟

为检验 LBM 代码的有效性, 选取该常用经典算例进行验证。模拟中初始密度为 1, 顶盖驱动的速度为 0.1, 网格采用均匀等距网格, 基于方腔长度和顶盖速度的雷诺数分别取为 100 和 1 000 两种情况进行模拟。图 1 分别给出雷诺数 100, 1 000 情况的流线, 能够很清楚地看到主、次涡的分布。表 1 给出了主涡位置的比较, 目前结果能和文献[11]结果保持一致。通过该算例的模拟, 表明本文程序模拟流动的有效性及其可行性, 为下一步气动声学模拟奠定基础。

2.2 二维高斯声波模拟

为研究 LBM 方法的色散特性, 对经典问题二

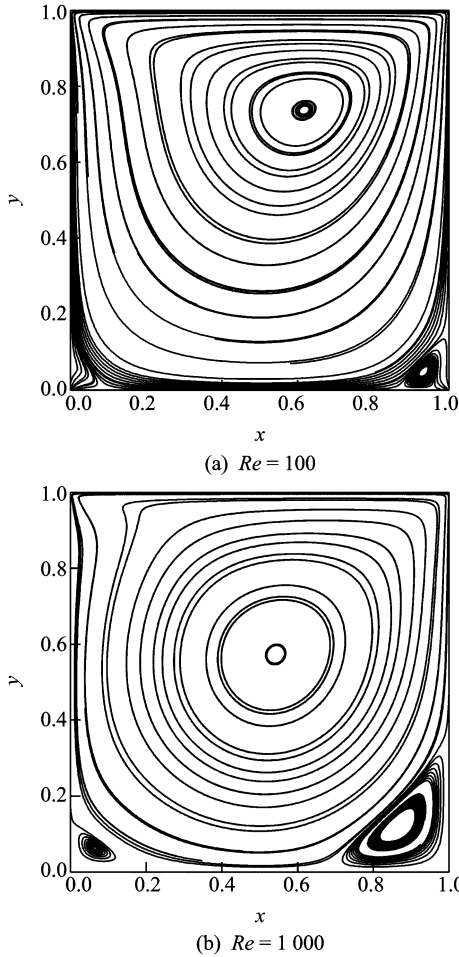


图1 雷诺数为100与1000所对应的顶盖驱动空腔流线

表1 雷诺数为100与1000所对应的主涡中心位置的比较

Re	Ghia ^[11] 的计算结果	本文结果
100	(0.61, 0.73)	(0.617 2, 0.737 5)
1000	(0.53, 0.56)	(0.542 1, 0.572 5)

维高斯声波传播进行数值模拟。采用均匀等距计算网格,计算区域为 $(x, y) = [0, 256] \times [0, 256]$ 。高斯声波的初始状态为

$$\begin{aligned}
 u &= 0 & v &= 0 \\
 p &= \rho = & & \\
 0.1 \exp \left[-\ln 2 \cdot \left(\frac{(x-128)^2 + (y-128)^2}{3^2} \right) \right] & & &
 \end{aligned} \quad (9)$$

图2给出了量纲一时间 $T=70$ 时计算的声波与分析解的比较,能看到沿着 x 轴的N形波。由图2可以看到,采用不同雷诺数($Re = \rho_\infty c_\infty \Delta x / \mu_\infty$)计算得到的LBM数值解与分析解的比较,不同的雷诺数计算会导致声压峰值的不同,雷诺数取值为10000或100000时,计算得到的声压峰值更

加接近分析解,而且这两个大雷诺数计算得到的数值解非常接近。因此,实际数值计算中雷诺数取值为10000已足够满足要求。为使LBM的数值解更好地逼近分析解,在利用LBM求解无黏声学问题时,需要设置一个较大的雷诺数值,这既能保证LBM本身的稳定性,又可以更好地逼近分析解。本文其他算例中的雷诺数也取值为10000。另外,表2给出了计算解和分析解的 L_1, L_2 范数比较,再次可以看出,与分析解相比,LBM能够得到比较精确的计算解。

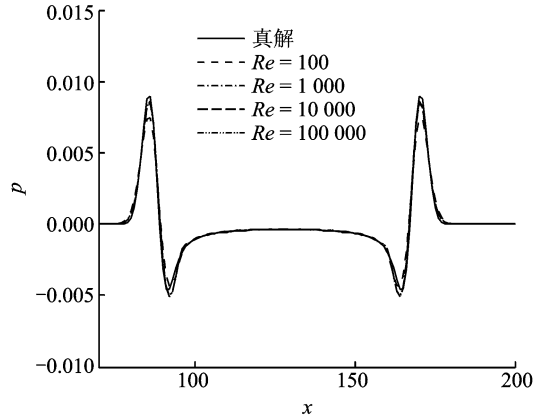


图2 $T=70$ 时刻沿着 $y=0$ 不同雷诺数计算得到的压力波形

表2 计算解与真解的 L 范数对比

$L_p = \left(\frac{1}{n} \sum (\tilde{p} - \tilde{p}_e)^p \right)^{\frac{1}{p}}$	L_1	L_2
$T=0$	0.000 000	0.000 007
$T=70$	0.000 003	0.000 158

2.3 二维高斯声波壁面反射模拟

为进一步验证壁面边界条件和LBM方法模拟声波遇到壁面反射问题,选取经典的高斯声波壁面反射问题进行数值模拟研究。仍采用均匀等距计算网格,计算区域为 $(x, y) = [0, 256] \times [0, 256]$ 。高斯声波的初始状态为

$$\begin{aligned}
 u &= 0 & v &= 0 \\
 p &= \rho = & & \\
 0.1 \exp \left[-\ln 2 \cdot \left(\frac{(x-128)^2 + (y-32)^2}{5^2} \right) \right] & & &
 \end{aligned} \quad (10)$$

图3给出了沿着 $x-y=128$ 的声压变化,并和DRP格式的计算结果、分析解进行比较。与四阶精度的DRP格式相比,LBM计算结果更接近于分析解。由声波相位可看出,LBM色散特性好于传统的DRP格式。表3给出了LBM计算解与DRP计算解、分析解的 L_1, L_2 范数比较,再次可以

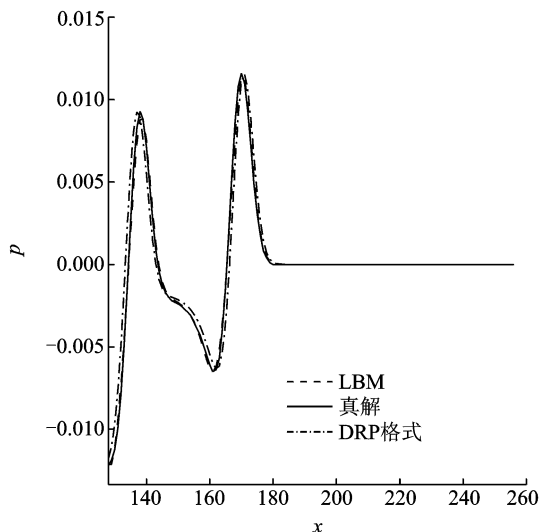


图 3 3 种情况下沿着 $x-y=128$ 的压力波形的比较

表 3 计算解与真解的 L 范数对比

$L_p = \left(\frac{1}{n} \sum (\tilde{p} - \tilde{p}_e)^p \right)^{\frac{1}{p}}$	L_1	L_2
LBM	0.000 010	0.000 254
四阶 DRP 格式	0.000 130	0.000 938

看出,与 DRP 的计算解相比,LBM 的计算结果能够更接近于分析解。

2.4 振荡活塞声辐射问题模拟

选取较复杂的经典问题——振荡活塞声辐射问题进行数值模拟,从而进一步检验 LBM 方法模拟物体振荡产生噪声的能力。图 4 给出了研究问题的计算区域和壁面边界情况,计算区域为 $0 \leq x \leq 100, 0 \leq r \leq 100$,活塞半径为 10,活塞的运动速度为 $u = 10^{-4} \sin\left(\frac{\pi t}{5}\right)$,活塞的中心位于 $r=0$ 处。

为更好地进行比较,图 5 是直接取自文献[12],该图中实线代表传统四阶 DRP 格式计算得到的结果,由此图计算区域的左侧可以看出,DRP 的数值解中产生了数值振荡,特别是在活塞区域数值解还出现了间断。图 6 给出了 LBM 计算得到的 $p=0$ 时的声压等值线,与图 5 相比,LBM 的计算结果比较令人满意,数值解中没有出现振荡和间断现象。

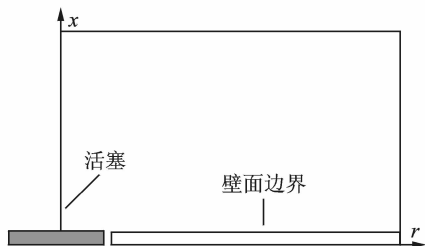


图 4 计算区域与壁面边界

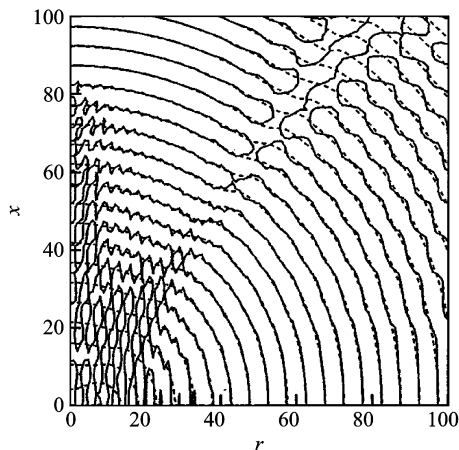


图 5 声压等值线^[12] ($p=0$)

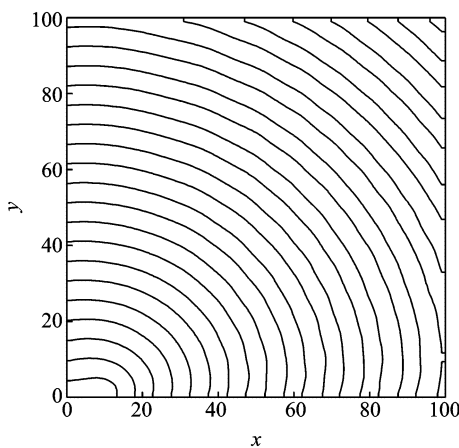


图 6 LBM 计算得到的声压等值线 ($p=0$)

3 结 论

运用格子 Boltzmann 方法,本文数值模拟研究了气动声学中的几个经典问题。通过研究,得到以下结论:

- (1) 对于经典气动声学问题,尽管标准 LBM 方法仅有二阶精度,但 LBM 方法的数值解能和分析解保持一致。
- (2) 与传统的 DRP 格式相比,LBM 方法简单有效,LBM 的数值解更接近于分析解。
- (3) 在利用 LBM 数值研究无黏声学问题时,需要设置较大的雷诺数,即需要较小的黏性,这样既能保证 LBM 的数值稳定性,又能更好地逼近分析解。

参考文献:

[1] 吴杰,舒昌,赵宁. 一种稳定的浸没边界-格子波尔兹曼方法[J]. 南京航空航天大学学报,2013,45(3):

- 316-321.
- Wu Jie, Shu Chang, Zhao Ning. Stable immersed boundary-lattice Boltzmann method[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2013, 45(3): 316-321.
- [2] Si Haiqing, Wang Tongguang. Grid-optimized upwind dispersion-relation-preserving scheme on non-uniform Cartesian grids for computational aeroacoustics[J]. Aerospace Science and Technology, 2008, 12(8): 608-617.
- [3] Si Haiqing, Wang Tongguang, Chen Du. Grid-optimized upwind DRP finite difference scheme on curvilinear grids for computational aeroacoustics[J]. Aerospace Science and Technology, 2011, 15(2): 90-102.
- [4] Liu Li, Li Xiaodong, Hu Fangqing. Nonuniform time-step Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for computational aeroacoustics[J]. Journal of Computational Physics, 2010, 229(19): 6874-6897.
- [5] Buick J, Greated C, Campbell D. Lattice BGK simulation of sound waves[J]. Euro Physics Letter, 1998, 43(3): 235-240.
- [6] Dellar P J. Bulk and shear viscosities in lattice-Boltzmann equations[J]. Phys Rev E, 2001, 64(3): 031203.
- [7] Marie S, Ricot D, Sagaut P. Comparison between lattice Boltzmann method and Navier-Stokes high order schemes for computational aeroacoustics [J]. Journal of Computational Physics, 2009, 228(4): 1056-1070.
- [8] Li X M, So R M C, Leung R C K. Propagation speed, internal energy, and direct aeroacoustics simulation using lattice Boltzmann method[J]. AIAA Journal, 2006, 44(12): 2896-2903.
- [9] He Xiaoyi, Luo Lishi. Theory of the lattice Boltzmann method; from the Boltzmann equation to the lattice Boltzmann equation[J]. Phys Rev E, 1997, 56(6): 6811-6817.
- [10] Guo ZhaoLi, Zheng Chuguang, Shi Baochang. Non-equilibrium extrapolation method for velocity and boundary conditions in the lattice Boltzmann method [J]. Chinese Physics, 2002, 11(4): 366-374.
- [11] Ghia U, Ghia K N, Shin C T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method[J]. Journal of Computational Physics, 1982, 48(3): 387-410.
- [12] Cheong C, Lee S. Grid-optimized dispersion-relation-preserving schemes on general geometries for computational aeroacoustics[J]. Journal of Computational Physics, 2001, 174(1): 248-276.