

双轴向纤维增强复合材料层合板强度准则

钱元 周光明 蔡登安 刘伟先

(南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室,南京,210016)

摘要:为了更加准确地对双轴向纤维增强复合材料在双向载荷作用下的强度进行预测,本文针对 Tsai-Wu 强度理论进行了理论分析和实验研究。首先,讨论 Tsai-Wu 张量准则在双向纤维增强复合材料中的应用问题,并确定用双轴拉伸实验来测定准则其中的一个强度参数 F_{12} 。其次,采用数值模拟方法,结合 Taguchi 实验设计方法对十字形试件进行外形设计和参数优化,得到了中心应力水平高、过渡区域应力集中系数小的十字形试件。最后,对十字形试件进行不同载荷比的双轴拉伸实验,通过实验数据计算得到强度参数 F_{12} ,并拟合了该材料应力平面第一象限的强度包络线。研究表明,经实验数据修正后的 Tsai-Wu 强度包络线能够准确地反映出材料的强度特性。

关键词:强度准则;双向拉伸;十字形试件;强度参数

中图分类号: TB332 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-2615(2013)02-0179-07

Investigation of Strength Criterion for Biaxial Fiber-Reinforced Composite Laminated Plates

Qian Yuan, Zhou Guangming, Cai Dengan, Liu Weixian

(State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China)

Abstract: To predict the strength of biaxial fiber-reinforced composites under biaxial tensile loads more accurately, Tsai-Wu tensor criterion is studied through theoretical and experimental methods. Firstly, the applicability of Tsai-Wu tensor criterion in the field of biaxial fiber-reinforced composites is discussed and one of strength parameters in criterion F_{12} is defined by biaxial tensile experiment. Secondly, overall design and parameter optimization of cruciform specimen are performed by the methods of numerical simulation and Taguchi experiment, so a type of cruciform specimen with the properties of high stress level at central weak region and small stress concentration factor is designed. Finally, the specimens are tested by some biaxial tensile experiments at different loading ratios. Strength parameters F_{12} at different loading ratios are calculated by experimental strength data and the failure envelopes with different values of F_{12} are constructed in the first quadrant of the stress plane. The study shows that failure envelopes fitted by experimental strength parameters are much closer to the intensity properties of the composites.

Key words: strength criterion; biaxial tension; cruciform specimen; strength parameter

随着各种先进复合材料的开发和应用,纤维增强复合材料在承力结构中的应用比重越来越大,使得复合材料承受的应力状态也越来越复杂。因此,

针对复杂应力状态下层合板的破坏特性的研究也越发必要。

强度准则是判断材料强度特性的重要依据,复

合材料的强度指标(X_t, X_c, Y_t, Y_c, S)可通过简单的力学性能实验测得。但复杂应力状态下的强度值不可能由简单的单向实验逐个给出,因此,复合材料强度准则所要解决的问题就是利用几个单向基本强度,判定复合材料在各种应力组合状态下的强度。

复合材料的强度准则中,以最大应力准则、最大应变准则、Tsai-Hill 强度理论和 Tsai-Wu 张量理论应用的较多。最大应力准则和最大应变准则是两个适用于判定脆性材料的强度准则。Tsai-Hill 强度理论^[1]优点是给出了一个光滑连续的失效包络线,体现了基本破坏强度之间的相互作用,考虑了复合材料的正交各向异性,该理论对材料主方向拉压性能相同的复合材料较为适用。而 Tsai-Wu 张量理论^[2]在准则方程中包含了更多的强度指标,通过增加应力的一次项反映复合材料拉、压强度不同的特性。同时,该准则解决了 Tsai-Hill 与 Hoffman 准则中所缺的 $\sigma_1\sigma_2/X_tX_c$ 和 $\sigma_1\sigma_2/Y_tY_c$ 项的问题,可以说是复合材料强度领域的一个较为完善的准则。

在 Tsai-Wu 张量准则的适用性方面已有许多研究者开展了大量的理论与实验验证工作^[3-4]。准则中耦合强度参数 F_{12} 是两个主应力乘积项的系数,它反映了材料 1,2 两个主方向抗拉(抗压)强度的相互影响,称为影响系数,是一个还未完全解决和备受争议的问题。实际应用中,考虑双轴拉伸实验的复杂性,对于单向纤维增强复合材料,在计算时一般取 $F_{12} = 0$ 或 $F_{12} = -1/2\sqrt{F_{11}F_{22}}$ 。

双向纤维增强复合材料是指在互相垂直的两个方向上具有相同力学性能的材料,该种材料在纵、横向都具有良好的力学性能,克服了单向纤维复合材料横向性能弱的缺点。对于双轴增强复合材料强度问题,仍然采用针对单向材料所确定 F_{12} 的表达式显然不合适的,需要通过对材料进行在两个正应力均不为零的情况下进行组合应力或双轴加载破坏实验得到。

国外学者针对双轴向材料的双向受载问题进行了一些研究。Welsh 和 Adams^[5] 针对碳/环氧复合材料的 $[0^\circ/90^\circ]_s$ 对称层合板设计了十字形试件,进行了双轴拉伸强度的实验研究,最后得到了铺层方式对材料双向强度的影响。

本文将设计合理的双向加载实验方法来确定强度参数 F_{12} 。结合有限元方法和 Taguchi(田口)实验设计方法设计出双轴加载十字形试件,并对其

进行不同比例的双向载荷的加载。根据实验结果拟合出应力平面第一象限的强度包络线,并采用实验结果进行验证。

1 强度参数 F_{12} 的测定方法

1.1 F_{12} 的实验测定方法

强度参数 F_{12} 是两个主应力乘积项的系数,它反映了 1,2 两个材料主方向抗拉(抗压)强度的相互影响,称为影响系数。得到该系数的直接方法是在两个正应力均不为零的情况下进行组合应力或双轴加载破坏实验,为此 Tsai 和 Wu 设计了 6 种实验方案,见表 1。

表 1 6 种测量方案的应力分布

应力状态	σ_1	σ_2	σ_6
45°偏轴拉伸	$2/T$	$2/T$	$2/T$
45°偏轴压缩	$-2/C$	$-2/C$	$-2/C$
45°正向剪切	V	$-V$	0
45°负向剪切	$-V'$	V'	0
双轴拉伸	P	P	0
双轴压缩	$-P'$	$-P'$	0

其中, T, C, V, V', P, P' 分别是各种应力状态下材料发生破坏时的应力。根据所具备的实验条件,本文采用实验结果数据较为精确且容易分析的双轴拉伸的方法对参数 F_{12} 进行测定。

1.2 双轴向拉伸实验方法

本文拟通过不同载荷比的双轴拉伸实验,分别得出强度参数 F_{12} 的值,比较强度包络线的吻合程度。定义载荷比 f 为横向(90° 方向)载荷 P_2 与纵向(0° 方向)载荷 P_1 的比值,即 $f = P_2/P_1$ 。根据 Tsai-Wu 张量准则

$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\sigma_6^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 = 1 \quad (1)$$

其中

$$\begin{cases} F_1 = \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} & F_{11} = \frac{1}{X_tX_c} \\ F_2 = \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} & F_{22} = \frac{1}{Y_tY_c} \\ F_{66} = \frac{1}{S^2} \end{cases} \quad (2)$$

式中: X_t 和 X_c 为材料 0° 方向的拉压强度; Y_t 和 Y_c 为材料 90° 方向的拉压强度; S 为材料的面内剪切强度。

在双向拉伸应力状态下,相比平面双向正应

力,剪应力的数值非常小,故忽略剪应力的影响。因此,当双轴拉伸应力状态为 $\sigma_2 = fP, \sigma_6 = 0$ 时, F_{12} 的表达式变为

$$F_{12} = \frac{1}{2fP^2} \left[1 - P \left(\frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} \right) - fP \left(\frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \right) - \left(\frac{P^2}{X_t X_c} + \frac{f^2 P^2}{Y_t Y_c} \right) \right] \quad (3)$$

本文研究的双向材料在互相垂直的两个方向上具有相同的强度性能,即有 $X_t = Y_t, X_c = Y_c$ 。所以材料的强度参数满足如下关系: $F_{11} = F_{22}, F_1 = F_2$ 。因此,参数 F_{12} 的计算公式改写为

$$F_{12} = \frac{1}{2fP^2} \left[1 - P(1+f) \left(\frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} \right) - P^2 \frac{(1+f^2)}{X_t X_c} \right] \quad (4)$$

对于双向纤维增强复合材料,计算出 F_{12} 后,代入 Tsai-Wu 张量准则方程,可得 $\sigma_1 - \sigma_2$ 应力平面的椭圆方程

$$F_1(\sigma_1 + \sigma_2) + F_{11}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 = 1 \quad (5)$$

根据式(4),便可绘制双向纤维增强复合材料在 $\sigma_1 - \sigma_2$ 坐标面内的强度包络线。

2 双向拉伸实验件结构设计

本文采用的双轴拉伸的试件类型为十字形试件,试件在互相垂直的两个方向上伸出四端,形成加载臂。4 个加载臂在试件中心交汇,形成中心薄弱区,薄弱区厚度较其他区域要薄一些,其目的为使试件在加载时在该处发生破坏。加载臂之间利用一定的倒角作为过渡,减少应力集中现象的影响,如图 1 所示。

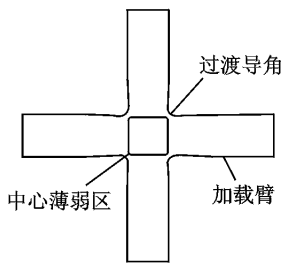


图 1 十字形试件示意图

2.1 边界条件

为保证试件最终破坏是由双轴拉伸引起的,十字形试件上必须满足对称的应力或应变分布,则必须有纵向共线力 $F = F'$,横向共线力 $P = P'$,如图 2(a)所示。此外,力 F 和 F' 必须垂直力 P 和 P' 。为了保证载荷共线,从而避免产生引起十字形试件中心薄弱区非对称应力或应变分布的附加弯矩,十

字形试件的中心点必须保持静止不动。图 2(b)为两端固支两端加载的布局形式。其优点是装置相对简单,但两方向的位移 Δ_x 和 Δ_y 引起试件弯曲,导致试件中心薄弱区非对称的应力或应变分布。

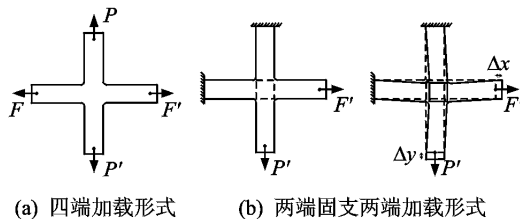


图 2 试件加载形式

本文拟采用有限元方法对十字形试件进行双向拉伸载荷作用的数值模拟,以便对其外形和结构参数进行优化设计。文中采用两端简支约束和两端加载的布局方式建立 2-D 有限元模型。在水平加载臂左端约束 x, z 方向的位移,竖直加载臂下端约束 y, z 方向的位移,这样便可避免完全固支造成试件弯曲而引起附加弯矩。集中载荷等效分布在水平加载臂右端和竖直加载臂上端边缘的各节点上,采用载荷比为 1/1 的加载方式,设计载荷大小为 10 kN。

2.2 试件外形设计

综合目前国内外学者对常用十字形试件形状的研究状况^[6,7],首先考虑将如下 4 种十字形形状方案,如图 3 所示。

试件外形的设计原则首先要提高中心薄弱区的平均应力,令试件在加载过程中在该处破坏,其次要减缓过渡区域的应力集中现象。

图 3 中方案 a 中心区域和加载臂直接以圆弧

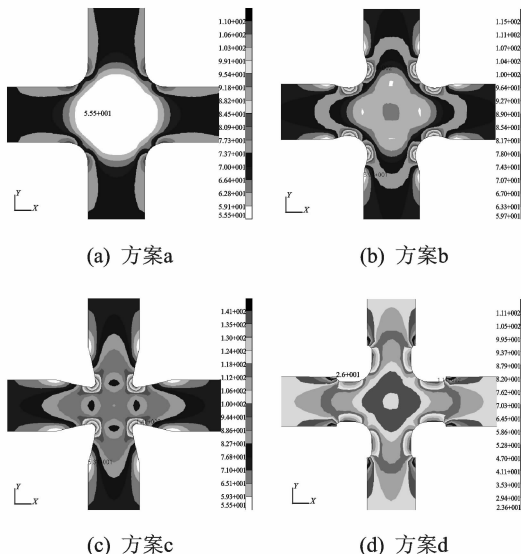


图 3 4 种试件外形

过渡接,方案 b 采用内圆角过渡,方案 c 采用锥形过渡,方案 d 采用台阶形过渡。除了方案 a 以外,其他 3 种方案均显著提高了中心薄弱区的平均应力,特别是方案 c,对中心薄弱区平均应力的提高最显著。但也不难发现,在过渡区截面最小的地方出现了明显的应力急剧增大的现象。

结合方案 b~d 三种形状方案的优点,在相邻两加载臂之间设计“锥形+圆角”过渡区域,取得了比以上 4 种形状方案均好一些的预期结果,如图 4 所示。

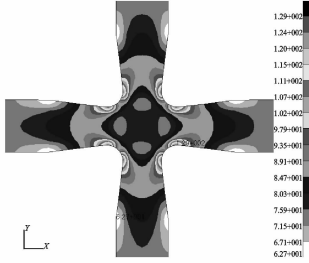


图 4 外形优化后试件应力分布

该种方案试件中心薄弱区的平均应力有了提高,且具有较大的均匀应力分布区域。然而,过渡区域最窄处的应力集中现象仍然存在,需要针对试件结构参数进行调整优化,以减缓应力集中现象。

2.3 结构参数优化

为量化地考察十字形试件受载时的力学性能,引入应力集中系数的概念。应力集中系数 β 是指最大应力或峰值应力 σ_m 与基准应力 σ_0 的比值,即 $\beta = \sigma_m / \sigma_0$ 。本文中应力集中系数为十字形试件受到的最大应力与中心薄弱区平均应力的比值。另外,一个需要考察的性能是中心薄弱区的平均应力 α 。

本文采用十字形试件轴对称且中心对称的。具体的结构参数有薄弱区相对厚度系数 $t = t_c / t_a$ (t_c 为薄弱区厚度, t_a 为加载臂厚度)和加载臂宽度 W 、减薄区形状尺寸 (W_a, W_c, R_a, R_c)、加载臂平直段长度 L_a 、锥形过渡区倒角 R_b 和锥形角度 θ ,如图 5 所示。

根据双向加载实验机的行程和夹具尺寸确定 $L = 300$ mm, $W = 50$ mm,为保证中心薄弱区具有均匀有效的应力水平,试件的夹持段长度应在 50 mm 左右,因而 L_a 需大于夹持段长度。同时,试件还应具备相对足够大的中心薄弱区范围(包括四周的倒角过渡区)。综合以上因素,将 L_a 的数值设置为 70 mm。根据材料单向力学性能实验得到试件材料参数见表 2。

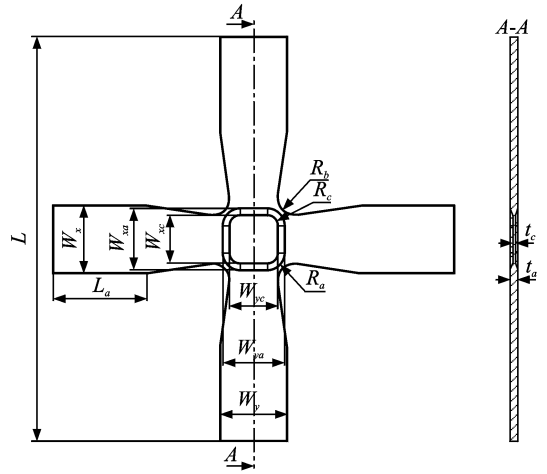


图 5 试件结构参数

表 2 试件单向力学性能

力学性能	E	μ_{21}	G_{12}	X_T	X_C
数值/MPa	21 165	0.114	3 420	385	297

2.3.1 过渡区域参数优化

相邻加载臂之间采用倒角连接,可以有效减小 β 。同时,参数 R_b 及 θ 的变化很大程度上影响 α ,且不是互相独立的,两者之间存在着较为明显的相互耦合影响。因此,在对两者进行设计时,应采用 Taguchi(田口)实验设计方法进行组合分析,以得到最佳的组合参数。

该工况下 $L_a = 70$ mm, $t = t_c / t_a = 2$ mm / 4 mm = 0.5, $W_c = 36$ mm, $R_c = 8$ mm, $R_b = 10 \sim 16$ mm(间隔为 2 mm), $\theta = 4^\circ \sim 8^\circ$ (间隔为 2°),计算结果见图 6,7。

随着 R_b 的增大, α 逐渐减小;而随着 θ 的增加, α 逐渐增大。对于 β 来说有着类似的变化趋势,而随着 θ 的增大, β 逐渐增大。为了保证 α 较高的应力水平和系数 β 较小的影响,综合分析以上组合方案,选取过渡区倒角半径 $R_b = 12$ mm 和锥形角度 $\theta = 8^\circ$ 的模型方案较为合适。

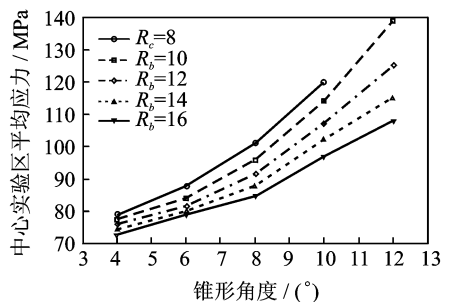


图 6 倒角半径和锥形角度对平均应力的影响

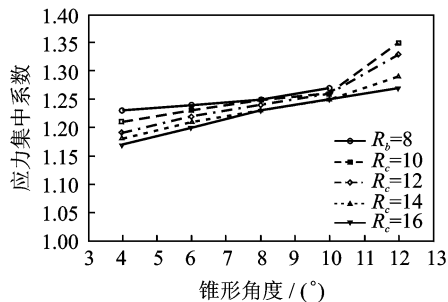


图 7 倒角半径和锥形角度对应力集中系数的影响

2.3.2 中心薄弱区域参数优化

将中心薄弱区的厚度 t_c 分为 1.5 和 2 mm 两种类别,然后分别讨论不同加载臂厚度 t_a 对 β 和 α 的影响。

该工况下 $L_a = 70$ mm; $W_c = 36$ mm; $R_c = 8$ mm; $R_b = 12$ mm; $\theta = 8^\circ$; $t_c = 1.5$ mm, 2 mm; $t_a = 3.0 \sim 5.5$ mm(间隔为 0.5 mm),计算结果见图 8,9。

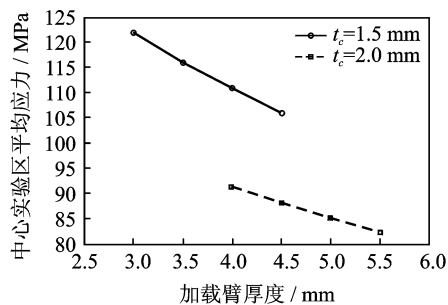


图 8 中心区相对厚度对平均应力的影响

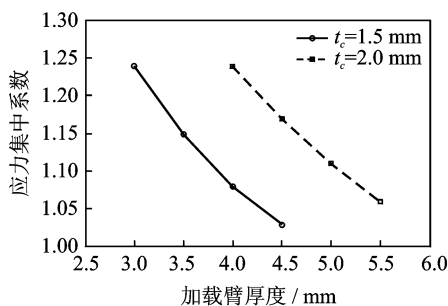


图 9 中心区相对厚度对应力集中系数的影响

随着 t 的减小, α 和 β 均呈现出减小的趋势。同时可以看出,相同的相对厚度下, t_c 为 1.5 mm 时, α 较高,而 β 较低。因此,选取 t_c 为 1.5 mm, t_a 为 4.5 mm 的试件模型较为合适。

中心薄弱区的形状尺寸——薄弱区宽度 W_c 和倒角 R_c 对薄弱区面积和形状的综合效应,同样采用 Taguchi(田口)实验设计方法进行组合分析,最终得出薄弱区宽度 W_c 和倒角 R_c 的最佳组合。

该工况下 $L_a = 70$ mm, $R_b = 12$ mm, $\theta = 8^\circ$, $t =$

$t_c/t_a = 1.5$ mm/4.5 mm = 1/3, $R_c = 4 \sim 12$ mm(间隔为 2 mm), $W_c = 24 \sim 40$ mm(间隔为 4 mm),计算结果见图 10,11。

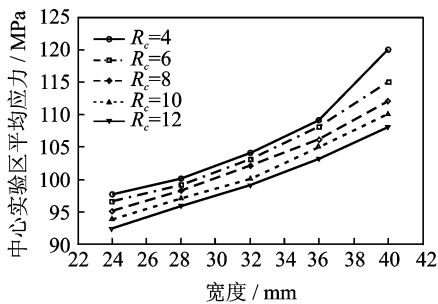


图 10 实验区形状尺寸变化对平均应力的影响

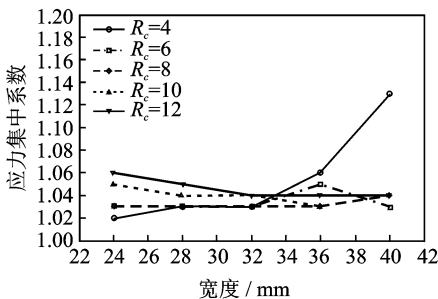


图 11 实验区形状尺寸变化对应力集中系数的影响

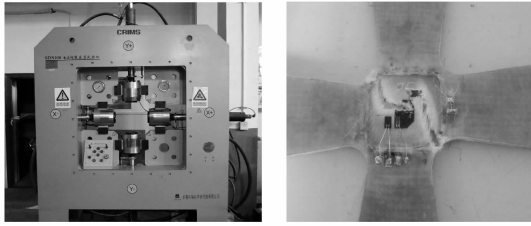
随着 W_c 增加, α 逐渐增加,而随着 R_c 增加,薄弱区的平均应力水平逐渐减小。究其原因: W_c 增加,使得中心薄弱区面积增加,同样的载荷下会分担更多的应力; R_c 增加,使得薄弱区的面积减小,从而使薄弱区分担的应力减小。对于系数 β , W_c 和 R_c 的变化对其的影响并不十分明显。因此,选用 W_c 为 36 mm, R_c 为 8 mm 的结构参数,既保证了薄弱区较高的平均应力水平,也使得试件的应力集中系数尽可能最小。

3 双向拉伸实验

制作成形双向拉伸实验件并采用 1 : 1, 1 : 2, 1 : 3, 1 : 4 四种比例拉伸载荷进行加载,每种比例载荷实验件数量为 4 件,采用 SDS100 电液伺服动静实验机进行双轴向加载,该设备可实现任意比例的拉压双轴加载实验,如图 12(a)所示。实验结果平均值见表 3。

表 3 双向拉伸实验数据

破坏载荷	载荷比			
	$f=1:1$	$f=1:2$	$f=1:3$	$f=1:4$
横向 90°/kN	19.99	10.47	7.24	5.61
纵向 0°/kN	19.95	20.96	21.72	22.42



(a) 双向拉伸机 (b) 试件破坏现象

图 12 双向拉伸实验现象

试件强度数据离散性较小,且破坏均发生在中心薄弱区,见图 12(b),表明十字形双轴拉伸实验方法可行,且所得数据有效。

由于十字形试件形状比较特殊,连接中心薄弱区的 4 个加载臂会分担一部分载荷,所以也无法直接根据试件破坏时所施加的载荷来计算双向拉伸强度。因此,本文参照文献[8]的方法进行换算。首先,计算在 $i(i=x,y,$ 分别代表横向和纵向) 方向加载臂上的载荷 F_{ai} (试件未发生破坏时的载荷) 作用下中心实验区的名义应力 σ_{ii}^m , 名义应力是指载荷 F_{ai} 除以中心实验区垂直于 i 方向的截面积 A_i 所得的比值,即

$$\sigma_{ii}^m = \frac{F_{ai}}{A_i} \quad (6)$$

式中: $A_i = w_i t_c$ (本文研究的十字形试件 $w_x = w_y$, 即 $A_x = A_y$)。然后,根据实验结果,确定在载荷 F_{ai} 作用下十字形试件中心实验区的实际应力 σ_{ii}^s 。定义中心区承力系数 η_i , 即实际应力与名义应力的比值

$$\eta_i = \frac{\sigma_{ii}^s}{\sigma_{ii}^m} \quad (7)$$

双向拉伸实验过程中每一级加载完毕时试件实验区的实际应力 σ_{ii}^s 可以由通过在该区域应变片测量得到的应变转化为应力得到,如图 13 所示。

图 14 所示曲线代表试件在进行 1:1 载荷比加载时两种应力的渐变关系,其斜率即为中心区承力系数 η_i 。假定在整个实验过程中 η_i 数值不变,则用材料破坏时十字形试件中心实验区的名义应力 σ_{ii}^m 乘以该系数就可以确定材料的双轴拉伸强度

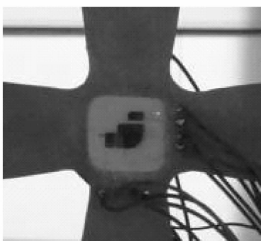


图 13 试件中心薄弱区应变片分布

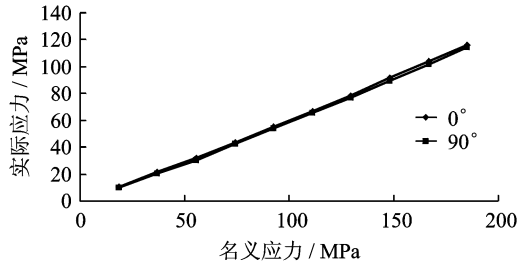


图 14 实际应力和名义应力的相互关系

σ_{ii} , 即

$$\sigma_{ii} = \eta_i \sigma_{ii}^m \quad (8)$$

将式(6)代入式(8),得试件在破坏载荷 F_{ai}^f 下的双向拉伸强度计算公式

$$\sigma_{ii} = \eta_i \frac{F_{ai}^f}{A_i} \quad i = x, y \quad (9)$$

计算得到材料的双向强度,如表 4 所示。

将表 4 数据代入式(4)计算强度参数 F_{12} , 见表 5。

表 4 材料双向抗压强度

双轴拉伸强度	数值/MPa			
σ_{11}	233.27	137.66	97.87	77.92
σ_{22}	232.75	275.54	298.64	313.09

表 5 不同载荷比作用下的参数 F_{12}

f	1/1	1/2	1/3	1/4
$F_{12}/(10^{-6} \text{ MPa}^{-2})$	3.76	4.27	4.51	4.72

得到 F_{12} 后,代入式(4),可得双向纤维增强复合材料的 Tsai-Wu 张量准则椭圆方程,然后便可拟合双向纤维增强复合材料在 $\sigma_1 - \sigma_2$ 坐标面内第一象限的强度包络线,并通过实验强度值对其进行验证,如图 15 所示。

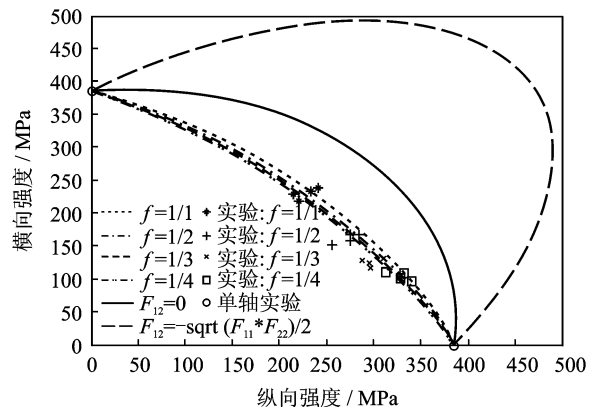


图 15 材料第一象限强度包络线

不同载荷比下获得的强度包络线较为接近,且与实验值较为吻合,可以准确地描述材料的双轴拉伸强度特性。在和 $F_{12} = 0$ 或者 $-1/2\sqrt{F_{11}F_{22}}$ 的强度包络线进行对比的过程中发现,对于双向纤维增强复合材料,应用 Tsai-Wu 张量准则时 F_{12} 的值应根据实验确定,取工程经验值并不能很好地描述该种材料的强度特性。

4 结 论

(1)针对双轴向纤维增强复合材料强度性能,分析研究了确定 Tsai-Wu 张量准则中强度参数 F_{12} 的几种实验方法,经过分析比较,选用双轴拉伸实验来确定强度参数 F_{12} 的值。

(2)通过对双向拉伸十字形试件外形设计和结构参数优化,可使试件中心薄弱区的应力分布均匀且应力水平较高,同时试件的应力集中系数较小,加大了试件在该区域发生破坏的几率。

(3)不同比例拉伸载荷下测试得到的 F_{12} 所拟合的强度包络线差异不大,证实了该材料在双向不同比例的拉伸应力作用下,材料的强度特性差异不大。

(4)通过实验值对本文拟合的强度包络线的验证结果,证实了 Tsai-Wu 张量准则可以较好地应用于双向纤维增强复合材料的双轴拉伸强度校核,但参数 F_{12} 的数值需通过实验得到。

参考文献:

- [1] Tsai S W. Strength characteristics of composite materials[R]. NASA CR-224, 1965.
- [2] Tsai S W, Wu E M. A general theory of strength for anisotropic materials [J]. J Composite Materials, 1971,5(1):58-80.
- [3] Wu E M. Optimal experimental measurements of anisotropic failure tensors[J]. J Composite Materials, 1972,6(4):472-489.
- [4] Naik G N, Gyan S, Satheesh R, et al. Minimum weight design of fiber-reinforced laminated composite structures with maximum stress and Tsai-Wu failure criteria[J]. Journal of Reinforced Plastics and Composites, 2011,30(2):179-192.
- [5] Welsh J S, Adams D F. An experimental investigation of the biaxial strength of IM6/3501-6 carbon/epoxy cross-ply laminates using cruciform specimens [J]. Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, 2002,33(6):829-839.
- [6] Smits A, Van Hemelrijck D, Philippidis T P, et al. Design of a cruciform specimen for biaxial testing of fibre reinforced composite laminates[J]. Composites Science and Technology, 2006,66(7):964-975.
- [7] Makris A, Vandenberg T, Ramault C, et al. Shape optimisation of a biaxially loaded cruciform specimen [J]. Polym Test, 2010,29(2):216-223.
- [8] 陆晓华. 双轴纤维增强复合材料强度准则研究与双向拉伸实验[D]. 南京:南京航空航天大学,2007.
Lu Xiaohua. Strength criteria investigation and biaxial tensile experiment of 2-axial fiber-reinforced composites[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2007.