第 45 卷第 1 期
2013 年 2 月

南 京 航 空 航 天 大 学 学 报
Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics

Vol. 45 No. 1
Feb. 2013

基于一般二元关系的多粒度粗糙集模型

顾力平[1,2]　杨习贝[1]

(1. 江苏科技大学计算机科学与工程学院,镇江,212003;2. 南通职业技术大学电子信息工程学院,南通,226007)

摘要:多粒度粗糙集模型是经典粗糙集模型的一种重要扩展形式。它使用了一族等价关系而非一个等价关系来进行目标概念的近似逼近。在多粒度粗糙集模型概念中,有乐观和悲观两种形式。本文从一般二元关系的角度出发,对多粒度粗糙集模型进行进一步扩展,分别给出了基于一般二元关系的乐观和悲观多粒度粗糙集模型的概念,并对这两种模型的性质进行了讨论。

关键词:乐观多粒度;悲观多粒度;粗糙集模型;一般二元关系;近似集

中图分类号:TP18　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1005-2615(2013)01-0124-06

Multigranulation Rough Set Models Based on General Binary Relations

Gu Liping[1,2], *Yang Xibei*[1]

(1. School of Computer Science and Engineering, Jiangsu University of Science & Technology, Zhenjiang, 212003, China;
2. School of Electronic and Information Engineering, Nantong Vocational College, Nantong, 226007, China)

Abstract: Multigranulation rough set is a very important expansion of the classical rough set model. It uses a family of equivalence relations instead of a single equivalence relation for approximating target. In the concept of multigranulation rough set model, optimistic and pessimistic cases are different. In this paper, from the viewpoint of general binary relations, the muligranulation rough set model is further expanded. The general binary relations based optimistic and pessimistic rough set models are presented respectively. The properties about these two general rough set models are also discussed.

Key words: optimistic multigranulation; pessimistic multigranulation; rough set model; general binary relations; approximate set

粗糙集模型[1-4]是由波兰学者 Pawlak 提出的一种用于处理不精确和不确定性问题的新型数据工具。Pawlak 的经典粗糙集模型是建立在不可分辨关系,即等价关系的基础上的,因而其应用范围非常有限。如何对粗糙集模型进行扩展对于粗糙集理论的发展具有极其重要的意义。

从拓展不可分辨关系的角度来看,基于容差关系(自反、对称)的粗糙集模型已被成功地应用于处理数据分类、不完备信息系统等众多领域[5-6];而基于相似关系(自反、传递)的粗糙集模型因其能用来描述对象之间的相似程度,因而可以用于处理具有缺席型未知属性值的不完备信息系统[7]。除此之外,当考虑信息系统中具有大小可比较的属性值性质时,Greco 等学者提出了基于优势关系的粗糙集模型[8],可用于处理多准则决策分析问题。从更为广义的角度出发,Yao 首先研究了基于一般二元关系的粗糙集模型[9],这个二元关系可以是线性的、自反的、甚至于不满足这些条件的更为一般的二元关系,这对于粗糙集理论的发展是具有极其重要的意义的。

基金项目:国家自然科学基金(61100116)资助项目;江苏省自然科学基金(BK2011492)资助项目;江苏省高校自然科学基金(11KJB520004)资助项目;南通市政府课题"海量数据频繁模式挖掘及其应用研究"资助项目。

收稿日期:2012-03-22;**修订日期**:2012-05-09

通信作者:顾力平,男,研究员,1956 年出生,E-mail:ntglp@163.com。

另一方面，值得注意的是 Pawlak 的粗糙集模型是建立在仅仅一个不可分辨关系的基础上的，上述的一些基于拓展二元关系的粗糙集模型也是如此，仅仅使用了一个二元关系来构造对象的邻域进行近似逼近。钱宇华等人认为在决策分析问题中，多个决策者之间的关系有可能是相互独立的，因而需采用多个二元关系来进行目标的近似逼近，为此他提出了多粒度粗糙集模型的概念[10-12]。在钱宇华的多粒度粗糙集模型中，他采用了两个及两个以上的不可分辨关系进行概念的近似逼近，并分析了多粒度粗糙集模型与经典粗糙集之间的关系。在钱宇华的多粒度粗糙集模型中，主要有两种不同的近似逼近方式，一种是乐观多粒度粗糙集方法[10-11]，另一种是悲观多粒度粗糙集方法[12]。

本文从多粒度的角度出发，对钱宇华的多粒度粗糙集模型进行进一步的拓展，采用一般的二元关系构建多粒度粗糙集模型。

1　多粒度粗糙集模型

形式化地，一个信息系统可被定义为二元组 $S=\langle U,AT\rangle$，其中

- U 表示所有对象的集合，称为论域；
- AT 表示所有属性的集合。

对于 $\forall a\in AT$，定义映射 $a:U\rightarrow V_a$，V_a 表示属性 a 的值域，即 $a(x)\in V_a(x\in U)$。

在信息系统 S 中，根据属性集合 $A\subseteq AT$，可得到一个不可分辨关系，即等价关系形如

$$IND(A)=\{(x,y)\in U^2:\forall a\in A,a(x)=a(y)\}\quad(1)$$

定义 1　令 S 为一信息系统，$A\subseteq AT$，对于 $\forall X\subseteq U$，X 的下近似集合 $\underline{R}(X)$ 与上近似集合 $\overline{R}(X)$ 分别定义为

$$\underline{A}(X)=\{x\in U:[x]_A\subseteq X\}$$

$$\overline{A}(X)=\{x\in U:[x]_A\cap X\neq\varnothing\}\quad(2)$$

式中：$[x]_A=\{y\in U:(x,y)\in IND(A)\}$ 表示 U 中所有与 x 具有不可分辨关系 $IND(A)$ 的对象的集合，即由 x 决定的等价类。

定义 2[10-11]　令 S 为一信息系统，$A_1,A_2,\cdots,A_m\subseteq AT$，对于 $\forall X\subseteq U$，X 的乐观多粒度下近似集合 $\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{O}(X)$ 与上近似集合 $\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{O}(X)$ 分别定义为

$$\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{O}(X)=\{x\in U:[x]_{A_1}\subseteq X\vee[x]_{A_2}\subseteq X\vee\cdots\vee[x]_{A_m}\subseteq X\}\quad(3)$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{O}(X)=\sim\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{O}(\sim X)\quad(4)$$

其中 $\sim X$ 表示集合 X 的补集。

定义 3[12]　令 S 为一信息系统，$A_1,A_2,\cdots,A_m\subseteq AT$，对于 $\forall X\subseteq U$，X 的悲观多粒度下近似集合 $\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{P}(X)$ 与上近似集合 $\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{P}(X)$ 分别定义为

$$\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{P}(X)=\{x\in U:[x]_{A_1}\subseteq X\wedge[x]_{A_2}\subseteq X\wedge\cdots\wedge[x]_{A_m}\subseteq X\}\quad(5)$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{P}(X)=\sim\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{P}(\sim X)\quad(6)$$

由定义 2 和定义 3 可以看出，乐观多粒度下近似要求至少有一个粒度层次上的等价类包含在目标概念中，而悲观多粒度下近似则要求所有粒度层次上的等价类都包含在目标概念中，因而悲观多粒度下近似的要求比乐观多粒度下近似的要求要更严格。乐观多粒度上近似和悲观多粒度上近似都是根据其下近似的补集加以定义的。据此，很容易得到如下所示的性质。

定理 1[12]　令 S 为一信息系统，$A_1,A_2,\cdots,A_m\subseteq AT$，对于 $\forall X\subseteq U$，有

$$\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{P}(X)\subseteq\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{O}(X)$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{O}(X)\subseteq\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{P}(X)\quad(7)$$

2　基于一般二元关系的乐观多粒度粗糙集模型

2.1　基本定义

令 U 为论域，$R_1,R_2,\cdots,R_m$ 为论域上的一族二元关系，这些二元关系不一定是等价关系，可以是容差关系、相似关系等要求更为宽松的二元关系。对于 $\forall x\in U$，就可以得到对象 x 在这些二元关系上的一族邻域，即 $R_1(x),R_2(x),\cdots,R_m(x)$，其中对于 $\forall i=1,2,\cdots,m$，有 $R_i(x)=\{y\in U:(x,y)\in R_i\}$。据此，可以定义基于一般二元关系的多粒度粗糙集模型。

定义 4　令 U 为论域，$R_1,R_2,\cdots,R_m$ 为论域

上的一族二元关系，对于 $\forall X\subseteq U$，X 的乐观多粒度下近似集合 $\underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}(X)$ 与上近似集合 $\overline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}(X)$ 分别定义为

$$\underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}(X)=\{x\in U:[x]_{R_1}\subseteq X \vee [x]_{R_2}\subseteq X \vee \cdots \vee [x]_{R_m}\subseteq X\} \tag{8}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}(X)=\sim \underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}(\sim X) \tag{9}$$

定理 2　令 U 为论域，$R_1,R_2,\cdots,R_m$ 为论域上的一族二元关系，对于 $\forall X\subseteq U$，有

$$\overline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}(X)=\{x\in U:[x]_{R_1}\cap X\neq\varnothing \wedge [x]_{R_2}\cap X\neq\varnothing \wedge \cdots \wedge [x]_{R_m}\cap X\neq\varnothing\} \tag{10}$$

证明：根据定义 4，对于 $\forall x\in U$，有

$$x\in \overline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}(X)\Leftrightarrow x\in U-\underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}(\sim X)$$

$$\Leftrightarrow x\in [x]_{R_1}(\sim X)\wedge [x]_{R_2}(\sim X)\wedge \cdots \wedge [x]_{R_m}(\sim X)$$

$$\Leftrightarrow [x]_{R_1}\cap X\neq\varnothing \wedge [x]_{R_2}\cap X\neq\varnothing \wedge \cdots \wedge [x]_{R_m}\cap X\neq\varnothing$$

2.2　基本性质

定理 3　令 U 为论域，$R_1,R_2,\cdots,R_m$ 为论域上的一族二元关系，对于 $\forall X\subseteq U$，有

(1) $\underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}(\varnothing)=\overline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}(\varnothing)=\varnothing$

(2) $\underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}(\sim X)=\sim \overline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}(X)$

(3) $\overline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}(\sim X)=\sim \underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}(X)$

(4) $\underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}(X)=\bigcup_{i=1}^{m}\underline{R_i}(X)$

(5) $\overline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}(X)=\bigcap_{i=1}^{m}\overline{R_i}(X)$

其中 $\underline{R_i}(X)$ 和 $\overline{R_i}(X)$ 为基于一般二元关系 R_i 的下、上近似集。

证明：(1) 根据定义 4，显然成立。

(2) 根据式(8,10)，对于 $\forall x\in U$，有

$$x\in \underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}(\sim X)\Leftrightarrow [x]_{R_1}\subseteq(\sim X)\vee [x]_{R_2}\subseteq(\sim X)\vee\cdots\vee [x]_{R_m}\subseteq(\sim X)$$

$$\Leftrightarrow [x]_{R_1}\cap X=\varnothing \vee [x]_{R_2}\cap X=\varnothing \vee\cdots\vee [x]_{R_m}\cap X=\varnothing$$

$$\Leftrightarrow x\notin \overline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}(X)$$

(3) 与(2)的证明类似。

(4) 根据式(8)，对于 $\forall x\in U$，有

$$x\in \underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}(X)\Leftrightarrow [x]_{R_1}\subseteq X\vee [x]_{R_2}\subseteq X\vee\cdots\vee [x]_{R_m}\subseteq X$$

$$\Leftrightarrow x\in \underline{R_1}(X)\vee x\in \underline{R_2}(X)\vee\cdots\vee x\in \underline{R_m}(X)$$

$$\Leftrightarrow x\in \bigcup_{i=1}^{m}\underline{R_i}(X)$$

(5) 与(4)的证明类似。

定理 4　令 U 为论域，$R_1,R_2,\cdots,R_m$ 为论域上的一族二元关系，对于 $\forall X_1,X_2,\cdots,X_n\subseteq U$，有

(1) $\underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}\left(\bigcap_{j=1}^{n}(X_j)\right)=\bigcup_{i=1}^{m}\left(\bigcap_{j=1}^{n}\underline{R_i}(X_j)\right)$

(2) $\overline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}\left(\bigcup_{j=1}^{n}(X_j)\right)=\bigcap_{i=1}^{m}\left(\bigcup_{j=1}^{n}\overline{R_i}(X_j)\right)$

(3) $\underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}\left(\bigcap_{j=1}^{n}(X_j)\right)\subseteq\bigcap_{j=1}^{n}\left(\underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}(X_j)\right)$

(4) $\overline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}\left(\bigcup_{j=1}^{n}(X_j)\right)\supseteq\bigcup_{j=1}^{n}\left(\overline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}(X_j)\right)$

证明：(1) 根据定义 4，对于 $\forall x\in U$，有

$$x\in \underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}\left(\bigcap_{j=1}^{n}(X_j)\right)$$

$$\Leftrightarrow \exists i=1,2,\cdots m,[x]_{R_i}\subseteq\left(\bigcap_{j=1}^{n}(X_j)\right)$$

$$\Leftrightarrow \exists i=1,2,\cdots m,\forall j=1,2,\cdots n,[x]_{R_i}\subseteq X_j$$

$$\Leftrightarrow \exists i=1,2,\cdots m,\forall j=1,2,\cdots n,x\in \underline{R_i}(X_j)$$

$$\Leftrightarrow \exists i=1,2,\cdots m,x\in \bigcap_{j=1}^{n}\underline{R_i}(X_j)$$

$$\Leftrightarrow x\in \bigcup_{i=1}^{m}\left(\bigcap_{j=1}^{n}\underline{R_i}(X_j)\right)$$

(2) 根据定理 2，对于 $\forall x\in U$，有

$$x\in \overline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}\left(\bigcup_{j=1}^{n}(X_j)\right)$$

$$\Leftrightarrow \forall i=1,2,\cdots,m,[x]_{R_i}\cap\left(\bigcup_{j=1}^{n}(X_j)\right)\neq\varnothing$$

$$\Leftrightarrow \forall i=1,2,\cdots,m;\exists j=1,2,\cdots,n;[x]_{R_i}\cap X_j\neq\varnothing$$

$$\Leftrightarrow \forall i=1,2,\cdots,m;\exists j=1,2,\cdots,n;x\in \overline{R_i}(X_j)$$

$\Leftrightarrow \forall i=1,2,\cdots,m; x \in \bigcup_{j=1}^{n} \overline{R_i}(X_j)$

$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{m} \left(\bigcup_{j=1}^{n} \overline{R_i}(X_j) \right)$

(3) 根据定义 4,对于 $\forall x \in U$,有

$x \in \underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O} \left(\bigcap_{j=1}^{n} (X_j) \right)$

$\Rightarrow \exists i=1,2,\cdots m; [x]_{R_i} \subseteq \left(\bigcap_{j=1}^{n} (X_j) \right)$

$\Rightarrow \exists i=1,2,\cdots m; \forall j=1,2,\cdots n; [x]_{R_i} \subseteq X_j$

$\Rightarrow \forall j=1,2,\cdots n; x \in \underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}(X_j)$

$\Rightarrow x \in \bigcap_{j=1}^{n} \left(\underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}(X_j) \right)$

(4) 根据定理 2,对于 $\forall x \in U$,有

$x \in \bigcup_{j=1}^{n} \left(\overline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}(X_j) \right)$

$\Rightarrow \exists j=1,2,\cdots,n; x \in \overline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}(X_j)$

$\Rightarrow \exists j=1,2,\cdots,n; \forall i=1,2,\cdots,m; [x]_{R_i} \cap X_j \neq \varnothing$

$\Rightarrow \forall i=1,2,\cdots,m; [x]_{R_i} \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} (X_j) \right) \neq \varnothing$

$\Rightarrow x \in \overline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O} \left(\bigcup_{j=1}^{n} (X_j) \right)$

值得注意的是与基于等价关系的乐观多粒度粗糙集模型不同,在基于一般二元关系的多粒度粗糙集模型中,以下性质不成立:

(1) $\underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}(U) = U$, $\overline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}(U) = U$

(2) $\underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}(X) \subseteq X$, $X \subseteq \overline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}(X)$

(3) $\underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O} \left(\bigcap_{j=1}^{n} (X_j) \right) \supseteq \bigcap_{j=1}^{n} \left(\underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}(X_j) \right)$

(4) $\overline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O} \left(\bigcup_{j=1}^{n} (X_j) \right) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \left(\overline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}(X_j) \right)$

3　基于一般二元关系的悲观多粒度粗糙集模型

3.1　基本定义

沿袭定义 3 中 Qian 关于悲观多粒度粗糙集模型的定义,根据一般二元关系得到对象的邻域族,可定义如下所示的基于一般二元关系的悲观多粒度粗糙集模型。

定义 5　令 U 为论域,$R_1, R_2, \cdots, R_m$ 为论域上的一族二元关系,对于 $\forall X \subseteq U$,X 的悲观多粒度下近似集合 $\underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{P}(X)$ 与上近似集合 $\overline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{P}(X)$ 分别定义为

$$\underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{P}(X) = \{x \in U: [x]_{R_1} \subseteq X \wedge [x]_{R_2} \subseteq X \wedge \cdots \wedge [x]_{R_m} \subseteq X\} \tag{11}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{P}(X) = \sim \underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{P}(\sim X) \tag{12}$$

定理 5　令 U 为论域,$R_1, R_2, \cdots, R_m$ 为论域上的一族二元关系,对于 $\forall X \subseteq U$,有

$$\overline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{P}(X) = \{x \in U: [x]_{R_1} \cap X \neq \varnothing \vee [x]_{R_2} \cap X \neq \varnothing \vee \cdots \vee [x]_{R_m} \cap X \neq \varnothing\} \tag{13}$$

证明:与定理 2 的证明过程类似。

3.2　基本性质

定理 6　令 U 为论域,$R_1, R_2, \cdots, R_m$ 为论域上的一族二元关系,对于 $\forall X \subseteq U$,有

(1) $\underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{P}(\varnothing) = \overline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{P}(\varnothing) = \varnothing$

(2) $\underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{P}(\sim X) = \sim \overline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{P}(X)$

(3) $\overline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{P}(\sim X) = \sim \underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{P}(X)$

(4) $\underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{P}(X) = \bigcap_{i=1}^{m} \underline{R_i}(X)$

(5) $\overline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{P}(X) = \bigcup_{i=1}^{m} \overline{R_i}(X)$

证明:与定理 3 的证明过程类似。

定理 7　令 U 为论域,$R_1, R_2, \cdots, R_m$ 为论域上的一族二元关系,对于 $\forall X_1, X_2, \cdots, X_n \subseteq U$,有

(1) $\underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{P} \left(\bigcap_{j=1}^{n} (X_j) \right) = \bigcap_{i=1}^{m} \left(\bigcap_{j=1}^{n} \underline{R_i}(X_j) \right)$

(2) $\overline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{P} \left(\bigcup_{j=1}^{n} (X_j) \right) = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} \overline{R_i}(X_j)$

(3) $\underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{P} \left(\bigcap_{j=1}^{n} (X_j) \right) \subseteq \bigcap_{j=1}^{n} \left(\underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{P}(X_j) \right)$

(4) $\overline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{P} \left(\bigcup_{j=1}^{n} (X_j) \right) \supseteq \bigcup_{j=1}^{n} \left(\overline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{P}(X_j) \right)$ 证明:与定理 4 的证明过程类似。

同样地，与基于一般二元关系的乐观多粒度粗糙集模型类似，基于一般二元关系的悲观多粒度粗糙集模型也不满足以下性质：

(1) $\underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{P}(U)=U$，$\overline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{P}(U)=U$

(2) $\underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{P}(X)\subseteq X$，$X\subseteq \overline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{P}(X)$

(3) $\underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n}(X_j)\right)\supseteq\bigcap_{j=1}^{n}\left(\underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{P}(X_j)\right)$

(4) $\overline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n}(X_j)\right)\subseteq\bigcup_{j=1}^{n}\left(\overline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{P}(X_j)\right)$

定理 8　令 U 为论域，$R_1,R_2\cdots R_m$ 为论域上的一族二元关系，对于 $\forall X\subseteq U$，有

$$\underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{P}(X)\subseteq\underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}(X)\tag{14}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}(X)\subseteq\overline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{P}(X)\tag{15}$$

证明：根据定义 4 和定义 5 中乐观、悲观多粒度下近似的公示，$\forall x\in U$，有

$$x\in\underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{P}(X)\Rightarrow\forall i=1,2,\cdots,m,[x]_{R_i}\subseteq X$$

$$\Rightarrow\exists i=1,2,\cdots,m,[x]_{R_i}\subseteq X$$

$$\Rightarrow x\in\underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}(X)$$

类似地，根据定理 2 和定理 5 的结论，式(15)易证。

定理 8 比较了基于一般二元关系的乐观和悲观多粒度粗糙集模型之间的关系，在基于一般二元关系的环境中，悲观多粒度下近似包含在乐观多粒度下近似中，而乐观多粒度上近似则包含在悲观多粒度上近似中。

3.3　实例分析

考虑如表 1 所示的一个不完备信息系统，其中 $U=\{O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6\}$，$AT=\{a, b, c, d\}$，$V_a=\{a_1, a_2\}$，$V_b=\{b_1, b_2\}$，$V_c=\{c_1, c_2\}$，$V_d=\{d_1, d_2\}$。根据文献[13]提出的特征关系(仅满足自反性)，可以得到如下所示的邻域族：

表 1　不完备信息系统实例

U	a	b	c	d
x_1	a_1	b_1	c_1	d_1
x_2	a_2	*	c_1	d_1
x_3	*	?	c_2	d_2
x_4	a_1	b_2	c_1	d_2
x_5	?	*	c_1	d_2
x_6	a_2	b_1	c_1	*

$R_1(x_1)=\{x_1,x_3,x_4\}$，$R_2(x_1)=\{x_1,x_2,x_5,x_6\}$，

$R_3(x_1)=\{x_1,x_2,x_4,x_5,x_6\}$，$R_4(x_1)=\{x_1,x_2,x_6\}$；

$R_1(x_2)=\{x_2,x_3,x_6\}$，$R_2(x_2)=\{x_1,x_2,x_4,x_5,x_6\}$，

$R_3(x_2)=\{x_1,x_2,x_4,x_5,x_6\}$，$R_4(x_2)=\{x_1,x_2,x_6\}$；

$R_1(x_3)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_6\}$，$R_2(x_3)=U$，

$R_3(x_3)=\{x_3\}$，$R_4(x_3)=\{x_3,x_4,x_5,x_6\}$；

$R_1(x_4)=\{x_1,x_3,x_4\}$，$R_2(x_4)=\{x_2,x_4,x_5\}$，

$R_3(x_4)=\{x_1,x_2,x_4,x_5,x_6\}$，$R_4(x_4)=\{x_3,x_4,x_5,x_6\}$；

$R_1(x_5)=U$，$R_2(x_5)=\{x_1,x_2,x_4,x_5,x_6\}$，

$R_3(x_5)=\{x_1,x_2,x_4,x_5,x_6\}$，$R_4(x_5)=\{x_3,x_4,x_5,x_6\}$；

$R_1(x_6)=\{x_2,x_3,x_6\}$，$R_2(x_6)=\{x_1,x_2,x_4,x_5,x_6\}$，

$R_3(x_6)=\{x_1,x_2,x_4,x_5,x_6\}$，$R_4(x_6)=U$。

若设 $X=\{x_2,x_3,x_6\}$，则根据定义 4 和定义 5，可以得到如下所示的乐观和悲观多粒度粗糙近似集

$$\underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}(X)=\{x_2,x_3,x_6\},\ \overline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}(X)=U;$$

$$\underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{P}(X)=\varnothing,\ \overline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{P}(X)=U。$$

4　结束语

本文从一般二元关系的角度出发，对多粒度粗糙集模型进行了更深入的扩展，不仅给出了基于一般二元关系的乐观和悲观多粒度粗糙集模型，而且对这些模型的性质进行了讨论。

由于在工程应用中，Pawlak 的等价关系往往不太实用，因而将等价关系放宽到较弱的二元关系是利用粗糙集方法进行数据处理的有效手段。利用基于一般二元关系的多粒度粗糙集模型，不仅可以从分类上解决等价关系的严格限制条件，而且可以充分发挥多粒度方法能够用于处理分布式数据的优点，因而相对于基于等价关系的单粒度和多粒度粗糙集模型来说，具有更广泛的适应性。

在本文工作的基础上，笔者下一步的工作就是对多粒度粗糙集模型中知识约简的概念及方法进行讨论。

参考文献:

[1] Pawlak Z. Rough sets—theoretical aspects of reasoning about data[M]. London: Kluwer Academic Publishers, 1991.

[2] Pawlak Z, Skowron A. Rudiments of rough sets[J]. Information Sciences, 2007(177): 3-27.

[3] Pawlak Z, Skowron A. Rough sets: some extensions [J]. Information Sciences, 2007(177): 28-40.

[4] Pawlak Z, Skowron A. Rough sets and boolean reasoning[J]. Information Sciences, 2007(177): 41-73.

[5] Kim D. Data classification based on tolerant rough set[J]. Pattern Recognition, 2001(34): 1613-1624.

[6] Leung Yee, Li Deyu. Maximal consistent block technique for rule acquisition in incomplete information systems[J]. Information Sciences, 2003(115): 85-106.

[7] Stefanowski J, Tsoukias A. Incomplete information tables and rough classification[J]. Computational Intelligence, 2001, 17(3): 545-566.

[8] Greco S, Matarazzo B, Slowinski R. Rough sets theory for multicriteria decision analysis[J]. European Journal of Operational Research, 2002(129):1-47.

[9] Yao Yiyu. Information granulation and rough set approximation[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2001(16): 87-104.

[10] Qian Yuhua, Liang Jiye, Dang Chuangyin. Incomplete multigranulation rough set[J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A, 2010(20): 420-431.

[11] Qian Yuhua, Liang Jiye, Yao Yiyu, et al. MGRS: A multi-granulation rough set [J]. Information Sciences, 2010, 180(6): 949-970.

[12] Qian Yuhua, Liang Jiye, Wei Wei. Pessimistic rough decision [C]// Second International Workshop on Rough Sets Theory. Zhoushan, China:[s. n.],2010: 440-449.

[13] Grzymala-Busse J W. Data with missing attribute values: generalization of indiscernibility relation and rule reduction[J]. Lecture Notes in Computer Science, 2004(3100): 78-95.