

# 无人机非线性非仿射飞控系统的 自适应模糊 $H_\infty$ 输出反馈控制及其应用

常 勇<sup>1,2</sup> 卢广山<sup>1</sup> 姜长生<sup>1</sup>

(1. 南京航空航天大学自动化学院, 南京, 210016; 2. 洛阳光电设备研究所, 洛阳, 471009)

**摘要:**研究了非仿射非线性系统的模糊自适应  $H_\infty$  输出反馈跟踪。在非仿射非线性模型不确定或未知的情况下, 首先将非仿射系统展开为仿射系统的形式, 使用模糊自适应控制器对系统进行控制, 然后基于 Lyapunov 稳定性定理得出自适应律, 并通过解一个代数 Riccati 方程实现了  $H_\infty$  跟踪性能。在状态不可测情况下, 引入高增益观测器估计系统状态并设计了输出反馈控制器, 实现了系统的输出反馈控制性能。最后, 通过对无人机飞行控制的仿真验证了算法的有效性。

**关键词:** 自适应模糊; 非仿射非线性系统;  $H_\infty$ ; 输出反馈; 高增益观测器

**中图分类号:** TP273      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1005-2615(2013)01-0099-05

## Adaptive Fuzzy $H_\infty$ Output Feedback Control and Its Application in Non-affine Nonlinear Flight Control System of UAV

Chang Yong<sup>1,2</sup>, Lu Guangshan<sup>1</sup>, Jiang Changsheng<sup>1</sup>

(1. College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China;

2. Luoyang Institute of Electro-Optical Equipment, Luoyang, 471009, China)

**Abstract:** A fuzzy adaptive  $H_\infty$  output feedback controller for non-affine nonlinear systems is studied. Considering the uncertainties and un-modeled dynamics, firstly, the non-affine system is expanded to the form of an affine system, and a fuzzy logic adaptive controller is employed to control the system. Then, adaptive laws are designed based on Lyapunov stability theorem. Secondly,  $H_\infty$  tracking performance is achieved through solving an algebra Riccati equation. In unobservable cases of systems states, a high gain observer is employed to obtain the estimation of states, and an output feedback controller is designed to achieve the performance of output feedback control. Finally, a simulation example of flight control of unmanned aerial vehicle (UAV) is given to illustrate the effectiveness of the proposed method.

**Key words:** adaptive fuzzy; non-affine nonlinear system;  $H_\infty$ ; output feedback; high gain observer

非线性系统自适应控制及在无人机飞行控制中的应用是控制领域的研究热点, 已取得了很多重要的成果<sup>[1-10]</sup>。但是这些成果中大部分都是研究仿射非线性系统的, 而对于非仿射非线性系统的研究成果则因为难度大而较少。另一方面, 在控制器设计当中直接考虑无人机飞行系统的非仿射非线

性可提高无人机的飞行控制性能。因此, 开展非仿射控制及在无人机飞行控制中的应用研究具有重要的实际意义。

众所周知, 模糊系统具有万能逼近能力。由于它不需要被控系统的精确数学模型因而被成功用于解决非线性系统的控制问题<sup>[2, 5, 8-9]</sup>, 并且可以方

**基金项目:** 国家自然科学基金(60716028)资助项目。

**收稿日期:** 2012-02-22; **修订日期:** 2012-09-06

**通信作者:** 姜长生, 男, 教授, 博士生导师, E-mail: jiangcs@nuaa.edu.cn。

便地将专家知识嵌入到控制器中。基于模糊系统逼近非线性系统模型,设计观测器观测系统的干扰,然后基于模糊控制方法设计控制器实现系统的鲁棒控制是目前采用模糊控制方法研究非线性问题的重要方法之一<sup>[4,9]</sup>。但这些方法大都应用于仿射非线性系统,而且对模糊逼近非线性系统的模型误差和干扰的观测误差造成的影响还缺少有效的处理方法。

本文针对这些不足,考虑模糊自适应控制方法以解决非仿射非线性系统的控制问题。对于逼近误差、外部干扰以及系统的未建模动态,采用  $H_\infty$  鲁棒控制方法对其进行抑制。在状态不可测时,通过高增益观测器,实现非仿射非线性系统的输出反馈控制。将所设计的控制器用于无人机的纵向跟踪控制问题,仿真表明能够使得无人机纵向飞行具有良好的跟踪性能。

## 1 系统描述与问题的提法

考虑下面的非仿射非线性 SISO 系统

$$y^{(n)} = F(y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}, u) \quad (1)$$

式中:  $y \in \mathbf{R}$  为测量输出;  $u \in \mathbf{R}$  为输入控制;  $y^{(i)}$ ,  $i=1, \dots, n$  为  $y$  的第  $i$  次导数;  $F(\cdot): \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}$  为部分未知或未知的非线性函数。

**引理 1:** 如果在  $U$  上  $\frac{\partial F(\omega)}{\partial \omega}$  存在且连续, 则  $F$  在  $U$  上为 Lipschitz。

**假设 1:** 不等式  $\frac{\partial F(\mathbf{x}, u)}{\partial u} > 0$  对所有  $(\mathbf{x}, u) \in \Omega_x \times \mathbf{R}$  成立, 其中  $\Omega_x$  为可控区间。特别地, 可以认为  $\Omega_x$  为紧集,  $\Omega_x \triangleq \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| \leq b_x\}$ ,  $b_x$  为正常数。本文中,  $\|\cdot\|$  均表示 Euclidean 范数,  $\mathbf{I}$  表示适当维数的单位矩阵。

令  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T = [y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}]^T \in \mathbf{R}^n$  为状态向量, 则式(1)可以重新写为状态空间模型

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}F(\mathbf{x}, u) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \end{aligned} \quad (2)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

目前, 很多文献都考虑了仿射非线性系统, 但他们的结果无法直接应用于非仿射形式的非线性系统(2)。为了给系统(2)设计合适的控制器, 先用 Taylor 级数展开的形式将该非仿射系统化为仿射系统的形式。根据假设, 在标称输入  $u_0$  处对  $F(\mathbf{x}, u)$  进行 Taylor 展开, 可以得到

$$F(\mathbf{x}, u) = F(\mathbf{x}, u_0) + \left. \frac{\partial F(\mathbf{x}, u)}{\partial u} \right|_{u=u_0} (u - u_0) + O(\cdot) \quad (4)$$

式中:  $O(\cdot)$  为高阶无穷小, 一般小于前一阶导数一个数量级。令  $f(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, u_0)$ ,  $g(\mathbf{x}) = \left. \frac{\partial F(\mathbf{x}, u)}{\partial u} \right|_{u=u_0}$  和  $u_\Delta = u - u_0$ , 则式(2)可以重新写为

$$y^{(n)} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u_\Delta + O(\cdot) \quad (5)$$

不难证明  $O(\cdot)$  的有界性。因此, 本文将  $O(\cdot)$  看作系统的有界外部干扰。

控制目标是使输出  $y$  跟踪一个给定的, 有界的期望输出信号  $y_m$ 。本文将通过设计一个基于模糊逻辑的控制器, 以及相应的自适应律来实现输出跟踪。同时, 对给定的抑制水平  $\rho > 0$ , 实现下面的  $H_\infty$  跟踪性能

$$\begin{aligned} \int_0^T \mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} dt &\leq \mathbf{e}^T(0) \mathbf{P} \mathbf{e}(0) + \\ &\frac{1}{\gamma_f} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_f^T(0) \tilde{\boldsymbol{\theta}}_f(0) + \frac{1}{\gamma_g} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_g^T(0) \tilde{\boldsymbol{\theta}}_g(0) + \rho^2 \int_0^T \mathbf{w}^T \mathbf{w} dt \end{aligned} \quad (6)$$

式中:  $T \in [0, \infty)$ ;  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T \geq 0$ ;  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \geq 0$ ;  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_f, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_g$  为模糊系统的参数估计误差;  $\mathbf{w}$  为模糊系统的逼近误差;  $\gamma_f, \gamma_g$  为正常数;  $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_r$ ,  $\tilde{\theta}_i = \theta_i - \theta_i^*$ ,  $i = f, g$ ;  $\mathbf{x}_r = [y_r, y_r^{(1)}, \dots, y_r^{(n-1)}]^T$ 。

**注 1:** 因为系统存在有界外部干扰  $O(\cdot)$ , 所以  $\omega$  可以看作包括逼近误差和外部干扰两部分, 从而同时对逼近误差和外部干扰进行抑制。

## 2 系统控制器设计的主要理论

很显然, 系统的相对阶为  $n$ , 为实现反馈线性化, 同时保证系统的  $H_\infty$  跟踪性能, 控制器取为如下形式

$$u_\Delta = \frac{1}{\hat{g}(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\theta}_f)} [-\hat{f}(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\theta}_g) + y_m^{(n)} - \mathbf{k}^T \mathbf{e} + u_{\Delta h}] \quad (7)$$

式中:  $\hat{f}(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\theta}_g), \hat{g}(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\theta}_f)$  为构造的模糊系统, 分别用来在线逼近  $f(\mathbf{x})$  和  $g(\mathbf{x})$

$$\hat{f}(x | \theta_g) = \theta_f^T \xi_f(x) \quad (8)$$

$$\hat{g}(x | \theta_f) = \theta_g^T \xi_g(x) \quad (9)$$

式中:  $\theta_f, \theta_g$  为可调参数;  $\xi_f(\cdot), \xi_g(\cdot)$  为模糊逻辑系统的基函数, 表达式如下

$$\xi_i(\cdot) = \frac{\prod_{i=1}^n \mu_{F_i^l}(x_i)}{\sum_{l=1}^{M_i} \prod_{i=1}^n \mu_{F_i^l}(x_i)} \quad (10)$$

式中:  $\mu_{F_i^l}(x_i)$  为给定的隶属度函数, 本文中取为高斯函数的形式。  $\theta_f \in \Omega_f, \theta_g \in \Omega_g; \Omega_f, \Omega_g$  为  $\mathbf{R}^{M_f}$  和  $\mathbf{R}^{M_g}$  上的凸集。由模糊系统的万能逼近定理, 可知存在  $\theta_f^* \in \Omega_f, \theta_g^* \in \Omega_g$ , 使得

$$\theta_f^* = \operatorname{argmin}_{\theta_f \in \Omega_f} \left[ \sup_{x \in \Omega_x} \|\theta_f^T \xi_f(x) - f(x)\| \right]; \theta_g^* = \operatorname{argmin}_{\theta_g \in \Omega_g} \left[ \sup_{x \in \Omega_x} \|\theta_g^T \xi_g(x) - g(x)\| \right] \quad (11)$$

并且,  $w^* = f(x) - \theta_f^{*T} \xi_f(x) + (g(x) - \theta_g^{*T} \xi_g(x))u_{\Delta}$  称为逼近误差。显然, 根据注 1 的分析, 可以得到  $w = w^* + O(\cdot)$ 。通过适当选取  $k = [k_n, \dots, k_1]$ , 使得  $s^n + k_1 s^{n-1} + \dots + k_n$  为 Hurwitz 多项式。  $u_{\Delta h}$  用来抑制逼近误差和外部干扰总和  $w$  的 H<sub>∞</sub> 控制项。这样, 可以写出如下的误差动态方程

$$\dot{e} = A_c e + b \{-\tilde{\theta}_f^T \xi_f - \tilde{\theta}_g^T \xi_g u_{\Delta} + u_{\Delta h} + w\} \quad (12)$$

其中

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -k_n & -k_{n-1} & \cdots & -k_2 & -k_1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\tilde{\theta}_f = \theta_f - \theta_f^* \quad \tilde{\theta}_g = \theta_g - \theta_g^* \quad (14)$$

如果系统状态完全可测, 根据上面对系统的分析的结论, 可以得出下面定理:

**定理 1:** 对非线性系统(2), 如果选择如下的自适应模糊控制律

$$u_{\Delta} = \frac{1}{\theta_g^T \xi_g(x)} (-\theta_f^T \xi_f(x) + y_m^{(n)} - k^T e + u_{\Delta h}) \quad (15)$$

式中

$$\begin{aligned} u_{\Delta h} &= -\frac{1}{r} b^T P e \\ \dot{\theta}_f &= \gamma_1 (e^T P b \xi_f(x) - \sigma_f \|e\|^2 \theta_f) \\ \dot{\theta}_g &= \gamma_2 (e^T P b \xi_g(x) u_{\Delta} - \sigma_g \|e\|^2 \theta_g) \end{aligned} \quad (16)$$

其中  $r$  为正数,  $P \geq 0$  为如下 Riccati 方程的解

$$P A_c + A_c^T P + Q_0 - \frac{2}{r} P b b^T P + \frac{1}{\rho^2} P b b^T P = 0 \quad (17)$$

则对于给定的干扰抑制水平  $\rho$ , 可以实现 H<sub>∞</sub> 跟踪性能。

**证明:** 非仿射非线性动态(2)展开成仿射非线性模型后, 证明过程类似于文献[4]中定理 1 的证明。这里,  $Q = Q_0 - [\sigma_f (\|\theta_f^*\|^2 - \|\theta_f\|^2) + \sigma_g (\|\theta_g^*\|^2 - \|\theta_g\|^2)] I$ 。

**注 2:** 定理 1 的自适应律中, 使用了  $e$ -改进, 避免由于自适应参数漂移而导致系统不稳定。

下面考虑动态系统(2)在状态不可测, 而只有输出可测的情况下, 如何设计输出反馈自适应模糊控制律, 实现 H<sub>∞</sub> 跟踪性能。令

$$c_1 = \max_{e \in E_0} e^T P e, c_2 = \max_{\theta_f \in \Omega_f} \frac{1}{2\gamma_f} \tilde{\theta}_f^T \tilde{\theta}_f, c_3 = \max_{\theta_g \in \Omega_g} \frac{1}{2\gamma_g} \tilde{\theta}_g^T \tilde{\theta}_g, c_4 \geq c_1 + c_2 + c_3, \text{ 则对所有 } t > 0, e(t) \in E = \{e^T P e \leq c_4\} \text{ 成立。}$$

很显然, 状态不可测的情况下, 上述的状态反馈自适应模糊控制律无法用于系统(2)的控制。因此, 必须先设计观测器来估计系统状态, 从而实现输出反馈自适应模糊控制。这里, 引入高增益观测器估计系统状态如下

$$\begin{aligned} \dot{\hat{e}}_i &= \hat{e}_{i+1} + \frac{\alpha_i}{\varepsilon} (e_1 - \hat{e}_1) \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ \dot{\hat{e}}_n &= \frac{\alpha_n}{\varepsilon} (e_1 - \hat{e}_1) \end{aligned} \quad (18)$$

式中:  $\varepsilon$  为小的正设计参数。通过适当选取  $H = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]$  使得  $s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n$  为 Hurwitz 多项式。为了消除高增益观测器产生的峰值现象对系统稳定性的影响, 将控制律和调整律中与估计状态有关的项写为饱和函数的形式如下

$$u_{\Delta}^s = S \operatorname{sat}\left(\frac{u_{\Delta}}{S}\right), u_{\Delta h}^s = S_h \operatorname{sat}\left(\frac{u_{\Delta h}}{S_h}\right), \phi^s = S_{\phi} \operatorname{sat}\left(\frac{\phi}{S_{\phi}}\right)$$

其中:  $S \geq \max |u_{\Delta}(e, x_r, \theta)|$ ;  $S_h \geq \max |u_{\Delta h}(e, x_r, \theta)|$ ;  $S_{\phi} \geq \max |\phi(e, x_r, \theta)|$ ;  $\phi = e^T P b, e(t) \in E$ 。为消除使用高增益观测器时的峰值, 也可以引入下面变换

$$\hat{e}_i = \frac{q_i}{\varepsilon^{i-1}} \quad 1 \leq i \leq n \quad (19)$$

得到

$$\begin{aligned} \dot{e} q_i &= q_{i+1} + \alpha_i (e_1 - q_1) \quad 1 \leq i \leq n \\ \dot{e} q_n &= \alpha_n (e_1 - q_1) \end{aligned} \quad (20)$$

该系统为标准的奇异扰动系统, 当输入  $e_1$  及初始条件为  $\varepsilon$  的有界函数时, 系统不会出现峰值现象。取

$$\eta_i = \frac{e_i - \hat{e}_i}{\varepsilon^{n-i}} \quad 1 \leq i \leq n \quad (21)$$

$\boldsymbol{\eta} = [\eta_1, \dots, \eta_n]$ , 闭环系统可以写成标准奇异扰动形式

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{e}} &= \mathbf{A}_e \boldsymbol{e} + \mathbf{b} \{ \mathbf{k}^T \boldsymbol{e} + \\ & \mathbf{F}(\boldsymbol{e} + \mathbf{x}_r, u_{\Delta}^s(\boldsymbol{e} - \mathbf{D}(\boldsymbol{\epsilon}), \mathbf{x}_r, \boldsymbol{\theta}), y_r^{(n)}) \} \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\eta}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{H}\mathbf{C}) \boldsymbol{\eta} + \\ & \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{b} \mathbf{F}(\boldsymbol{e} + \mathbf{x}_r, u_{\Delta}^s(\boldsymbol{e} - \mathbf{D}(\boldsymbol{\epsilon}), \mathbf{x}_r, \boldsymbol{\theta}), y_r^{(n)}) \quad (23) \end{aligned}$$

**定理 2:** 对非线性系统(2), 选择输出反馈自适应模糊控制律(15)和自适应参数调节律(16), 如果初始条件满足  $\boldsymbol{\theta}_f(0) \in \Omega_f, \boldsymbol{\theta}_g(0) \in \Omega_g, \boldsymbol{e}(0) \in E$ , 对于给定的抑制水平  $\rho$ , 可以实现下面的  $H_{\infty}$  跟踪性能

$$\begin{aligned} \int_0^T \boldsymbol{e}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{e} dt &\leq \boldsymbol{e}^T(0) \mathbf{P} \boldsymbol{e}(0) + \frac{1}{\gamma_f} \bar{\boldsymbol{\theta}}_f^T(0) \bar{\boldsymbol{\theta}}_f(0) + \\ & \frac{1}{\gamma_g} \bar{\boldsymbol{\theta}}_g^T(0) \bar{\boldsymbol{\theta}}_g(0) + \rho^2 \int_0^T \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{w} dt + K T \boldsymbol{\epsilon} \quad (24) \end{aligned}$$

**证明:** 证明分两个部分。

首先, 必须说明在很短的时间  $T_1$  内,  $\boldsymbol{\eta}$  能够很快收敛到  $O(\boldsymbol{\epsilon})$ , 事实上  $T_1$  依赖于  $\boldsymbol{\epsilon}$  的选择, 当  $\boldsymbol{\epsilon} \rightarrow 0, T_1(\boldsymbol{\epsilon}) \rightarrow 0$ . 假设  $(\boldsymbol{e}(0), \boldsymbol{\theta}_f, \boldsymbol{\theta}_g) \in E_{\bar{b}} \triangleq \{ \boldsymbol{e}^T \mathbf{P} \boldsymbol{e} \leq \bar{b} \} \times \Omega_f \times \Omega_g, \bar{b} < b < c_4$ , 如果在时刻  $T_2$ , 状态  $\boldsymbol{e}$  离开集合  $\Omega_{\bar{b}}$ , 那么只要选择足够小的  $\boldsymbol{\epsilon}$ , 就可以保证在  $[T_1, T_2]$  内,  $\boldsymbol{\eta}$  收敛到  $O(\boldsymbol{\epsilon})$ . 因为在输出反馈控制律中, 对有可能出现峰值的函数采用了饱和措施, 所以可以保证控制律的全局有界性, 即

$$\| \mathbf{k}^T \boldsymbol{e} + \mathbf{F}(\boldsymbol{e} + \mathbf{x}_r, u_{\Delta}^s(\boldsymbol{e} - \mathbf{D}(\boldsymbol{\epsilon}), \mathbf{x}_r, \boldsymbol{\theta}), y_r^{(n)}) \| \leq l_1 \quad (25)$$

取  $V(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{e}^T \mathbf{P} \boldsymbol{e}$  并沿式(22)进行求导, 可以得到

$$\dot{V} \leq -2\kappa_1 V + 2\beta_1 \sqrt{V} \quad (26)$$

其中,  $\kappa_1 = \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})}{2\lambda_{\max}(\mathbf{P})}, \beta_1 = \frac{l_1 \|\mathbf{P}\mathbf{b}\|}{\lambda_{\min}(\mathbf{P})}$ . 从式(26), 可以得到

$$\sqrt{V(t)} \leq \sqrt{V(0)} e^{-\kappa_1 t} + \frac{\beta_1}{\kappa_1} (1 - e^{-\kappa_1 t}) \quad (27)$$

因为  $V(0) \leq \bar{b}$ , 所以不难找到一个  $b > \bar{b}$ , 存在一个时刻  $\bar{T}_2$ , 使得  $\forall t \in [0, \bar{T}_2), V(t) \leq b$ .

令  $\mathbf{W} = \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{P}_1 \boldsymbol{\eta}, \mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_1^T > 0$ , 为下面 Lyapunov 方程的解

$$\mathbf{P}_1 (\mathbf{A} - \mathbf{H}\mathbf{C}) + (\mathbf{A} - \mathbf{H}\mathbf{C}) \mathbf{P}_1^T = -\mathbf{I} \quad (28)$$

很显然

$$\| \mathbf{F}(\boldsymbol{e} + \mathbf{x}_r, u_{\Delta}^s(\boldsymbol{e} - \mathbf{D}(\boldsymbol{\epsilon}), \mathbf{x}_r, \boldsymbol{\theta}), y_r^{(n)}) \| \leq l_2 \quad (29)$$

将  $\mathbf{W}$  沿式(23)求导, 可以得到, 当  $\mathbf{W} \geq \boldsymbol{\epsilon}^2 \kappa_2$  时

$$\dot{\mathbf{W}} \leq -\frac{1}{\boldsymbol{\epsilon} \lambda_{\max}(\mathbf{P}_1)} \mathbf{W} + \frac{2l_2 \|\mathbf{P}\mathbf{b}\|}{\sqrt{\lambda_{\min}(\mathbf{P}_1)}} \sqrt{\mathbf{W}} \leq -\frac{\gamma_3}{\boldsymbol{\epsilon}} \mathbf{W} \quad (30)$$

$$\text{其中, } \kappa_2 = \frac{16 \|\mathbf{P}_1 \mathbf{b}\|^2 k_4^2 \lambda_{\max}^2(\mathbf{P}_1)}{\lambda_{\min}(\mathbf{P}_1)}, \gamma_3 = \frac{1}{2\lambda_{\max}(\mathbf{P}_1)}.$$

因此, 当状态  $\boldsymbol{e} \in \Omega_b, \mathbf{W} \geq \boldsymbol{\epsilon}^2 \kappa_2$  时, 可以得到下面不等式

$$\mathbf{W}(t) \leq \mathbf{W}(0) e^{-\frac{\gamma_3 t}{\boldsymbol{\epsilon}}} \leq \frac{l_3}{\boldsymbol{\epsilon}^{2r-2}} e^{-\frac{\gamma_3 t}{\boldsymbol{\epsilon}}}$$

其中,  $l_3 > 0$ . 选择一个足够小的  $\boldsymbol{\epsilon}_0$ , 使对  $\forall \boldsymbol{\epsilon} \in (0, \boldsymbol{\epsilon}_0]$

$$T_1(\boldsymbol{\epsilon}) = \frac{\boldsymbol{\epsilon}}{\gamma_3} \left( \frac{l_3}{\kappa_2 \boldsymbol{\epsilon}^{2r}} \right) \leq \frac{1}{2} \bar{T}_2$$

不等式显然是可以成立的, 因为当  $\boldsymbol{\epsilon} \rightarrow 0$  时, 不等式左边也趋向于 0.

然后, 在时间区间  $[T_1, T_3)$  上研究闭环系统。

将  $V = \frac{1}{2} \boldsymbol{e}^T \mathbf{P} \boldsymbol{e} + \frac{1}{2\gamma_1} \bar{\boldsymbol{\theta}}_f^T \bar{\boldsymbol{\theta}}_f + \frac{1}{2\gamma_2} \bar{\boldsymbol{\theta}}_g^T \bar{\boldsymbol{\theta}}_g$  沿轨迹式(22)求导, 得

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\frac{1}{2} \boldsymbol{e}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{e} + \frac{1}{2} \rho^2 \boldsymbol{w}^2 + K \boldsymbol{\epsilon} \leq \\ & -\frac{1}{2} c_0 V + c_0 (c_2 + c_3) + \frac{1}{2} \rho^2 \boldsymbol{w}^2 + K \boldsymbol{\epsilon} \quad (31) \end{aligned}$$

在  $V = c_5$  的界上, 对任意  $c_5 > c_2 + c_3 + \frac{1}{c_0}$

$\left( \frac{1}{2} \rho^2 \boldsymbol{w}^2 + K \boldsymbol{\epsilon} \right)$ , 都有  $\dot{V} < 0$ . 对足够小的  $\boldsymbol{\epsilon}$ , 集合  $B = \{ V \leq c_6 \} \times \Omega_f \times \Omega_g$  为正不变集, 其中  $c_6 = c_5 > c_2 + c_3 + \frac{1}{2c_0} \rho^2 \boldsymbol{w}^2$ . 因此, 对式(31)第一个不等式两边在  $[0, T]$  上积分, 可以得到结论: 输出反馈满足  $H_{\infty}$  跟踪性能。

### 3 无人机飞行姿态控制仿真

考虑如下非线性描述的无人机纵向动态方程

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u) + \mathbf{D}(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \end{cases} \quad (32)$$

初始条件为  $\boldsymbol{x}(0) = [300, 0, 0, 0]^T$ . 其中  $\boldsymbol{x} = [V, \alpha, q, \theta]^T, u = \delta_e$  为控制函数,  $\mathbf{D}(\boldsymbol{x})$  为干扰,  $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \alpha$  为系统的输出。

系统的气动参数  $C_D, C_L$  是关于  $V, \alpha$  和  $\delta_e$  的非仿射非线性函数, 将系统在  $u=0$  处展开成仿射系统形式, 逼近  $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u)$  的模糊系统分别由 10 条模糊规则构成, 并且模糊中心均匀分布于区间  $[-0.5, 0.5]$  内, 方差  $\sigma = 0.05$ . 采用式(16)设计控制器进行飞行姿态跟踪控制。

仿真条件为:无人机的飞行高度  $H = 5\ 000\text{ m}$ , 瞬时质量  $m = 12\ 682\text{ kg}$ , 推力  $T = 86.41\text{ kN}$ , 机翼参考面积  $S = 34.73\text{ m}^2$ , 飞行控制的指令信号为  $\alpha_c = 3.0^\circ$ , 系统设定气动系数有

20%不确定。其他设计参数如下为:  $k_1 = 10, k_2 = 9, Q_0 = \text{diag}(20, 20), r = 1, \rho = 1, \gamma_f = 20, \gamma_g = 30, \sigma_f = \sigma_g = 3, \varepsilon = 0.01, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 4$ 。仿真姿态角  $\alpha$ 、角速度  $q$ 、舵偏角  $\delta_e$  的变化曲线如图1所示。

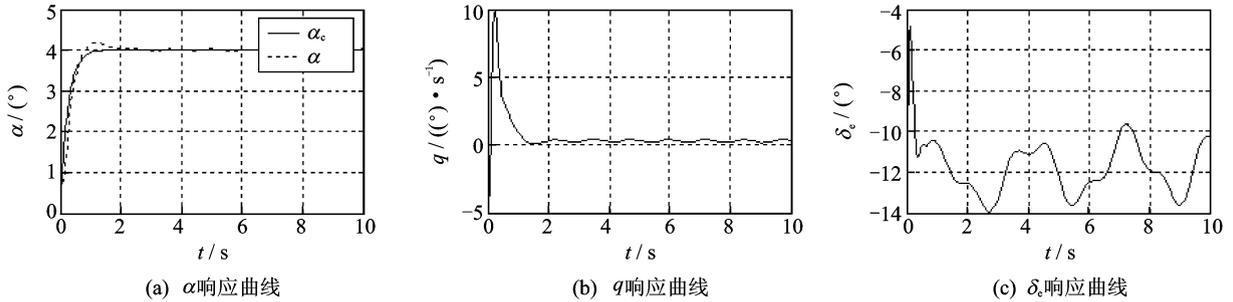


图1 无人机飞行跟踪曲线

从图1可以看出,系统的输出迎角  $\alpha$  大约在2 s左右就可以跟踪指令信号  $\alpha_c$  (见图1(a)),而且超调较小,同时系统的状态俯仰角速率  $q$  也能实现稳定(见图1(b)),虽然曲线存在小的振荡,但幅值很小,对系统的影响可以忽略不计,另外控制输入舵偏角  $\delta_e$  也满足限幅要求  $|\delta_e| \leq 30^\circ$  (见图1(c))。仿真结果表明本文所设计的自适应模糊  $H_\infty$  输出反馈控制器的有效性,达到了良好的跟踪性能并保证了系统的渐进稳定。

## 4 结束语

本文讨论了一类非仿射非线性系统的模糊自适应  $H_\infty$  输出控制问题。在状态可测和不可测两种情况下,分别证明了状态反馈和输出反馈的  $H_\infty$  输出跟踪性能。在状态不可测情况下,利用高增益观测器估计系统状态,并将其作为状态反馈控制器的输入,实现了控制器和观测器的分离设计。最后,通过对无人机飞行控制的仿真验证了本文算法的可行性和有效性。

## 参考文献:

[1] Zou A M, Hou Z G, Tan M. Adaptive control of a class of nonlinear pure-feedback systems using fuzzy backstepping approach [J]. IEEE Trans Fuzzy Systems, 2008, 16(4): 886-897.  
 [2] 刘艳军,王伟. 一类多变量非线性系统的自适应模糊控制 [J]. 自动化学报, 2007, 33(11): 1163-1169.  
 Liu Yanjun, Wang Wei. Adaptive fuzzy control for a class of multivariable nonlinear systems [J]. ACTA Automatica Sinica, 2007, 33(11): 1163-1169.  
 [3] Liu Y J, Wang W. Adaptive fuzzy control for a class

of uncertain nonaffine nonlinear systems [J]. Information Sciences, 2007, 177(18): 3901-3917.  
 [4] Chen Borsen, Lee Chinghsing, Chang Yeongchan.  $H_\infty$  tracking design of uncertain nonlinear SISO systems: Adaptive fuzzy approach [J]. IEEE Trans Fuzzy Systems, 1996, 4(1): 32-43.  
 [5] Liu Y J, Tong S C, Wang W. Adaptive fuzzy output tracking control for a class of uncertain nonlinear systems [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2009, 160(19): 2727-2754.  
 [6] Wang M, Ge S S, Hong K S. Approximation-based adaptive tracking control of pure-feedback nonlinear systems with multiple unknown time-varying delays [J]. IEEE Trans Neural Networks, 2010, 21(11): 1804-1816.  
 [7] Ren B B, Ge S S, Lee T H, et al. Adaptive neural control of SISO non-affine nonlinear time-delay systems with unknown hysteresis input [C] // American Control Conference. Washington, USA: [s. n.], 2008: 4203-4208.  
 [8] Lin S C, Chen Y Y. Design of self-learning fuzzy sliding mode controllers based on genetic algorithms [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1997, 86(2): 139-153.  
 [9] Park J H, Kim S H. Direct adaptive output-feedback fuzzy controller for a nonaffine nonlinear system [J]. IEE Proc: Control Theory Appl, 2004, 15(1): 65-72.  
 [10] Ren B B, Ge S S, Su C Y, et al. Adaptive neural control for a class of uncertain nonlinear systems in pure-feedback form with hysteresis input [J]. IEEE Trans Systems, Man Cybernetics-Part B: Cybernetics, 2009, 39(2): 431-443.

