

## 轴对称结构的模态振型描述和模型确认

臧朝平 刘银超

(南京航空航天大学能源与动力学院,南京,210016)

**摘要:**利用轴对称结构模态振型的 Zernike 矩能够有效区分重根模态的特点,提出了一种基于 Zernike 矩函数的相关性分析方法以及基于 Zernike 矩函数灵敏度的模型修正方法。以某航空发动机压气机轮盘为例,采用轴对称结构的模态振型 Zernike 特征矩,通过模态测试数据与有限元模型预测结果的相关性分析,克服重根模态对相关性的影响,准确地匹配模态对;同时采用基于 Zernike 矩函数的振动模态对于设计参数的灵敏度,修正有限元的模型修正,使压气机的设计模型的动力特性预测与实际结构的测试相一致,验证了该方法的可行性与优越性。

**关键词:**轴对称结构;相关性分析;模型修正;Zernike 矩;模型确认

**中图分类号:**V231 **文献标识码:**A **文章编号:**1005-2615(2012)05-0725-09

## Mode Shape Description and Model Validation of Axisymmetric Structure

Zang Chaoping, Liu Yinchao

(College of Energy and Power Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China)

**Abstract:** Based on features of Zernike moment description of mode shapes of axisymmetric structures, a novel correlation method called Zernike descriptor assurance criteria (ZDAC) and the model updating based on the sensitivity of Zernike moments with respect to design parameters is explored to improve the model validation of axisymmetric structures. The effectiveness of this method is demonstrated with a case study of an aero-engine compressor disc. With the Zernike moment description of mode shapes of the aero-engine disc, model correlation between the prediction and measurement using ZDAC is carried out and comparing mode pairs are correctly matched. Meanwhile, the finite element model is updated based on the sensitivity of Zernike moments with respect to design parameters in order that the dynamic features of model prediction are in agreement with the measured dynamic behaviors of the structure. Results justify feasibility and superiority of this method.

**Key words:** axisymmetric structures; correlation; model updating; Zernike moment; model validation

航空发动机是飞机的“心脏”,是飞机的重要组成部分。航空发动机结构的动力学建模与模型确认研究对提高航空发动机的研制质量、降低发动机的研制开发成本、缩短研制周期具有重大的意义。通常,航空发动机结构的动力学建模与模型确

认是利用结构的试验数据修正结构的数学模型(又称为有限元模型),使数学模型在可接受的精度范围内更好地描述结构的动力特性,以便进一步进行结构的优化设计。其过程的实现是通过参考数据(如实际测试振动数据)对建立的一个数字化的有

**基金项目:**国家自然科学基金(51175244)资助项目;教育部博士点基金(20093218110008)资助项目;江苏省高校优势学科建设工程(PAPD)资助项目。

**修订日期:**2012-09-06

**通讯作者:**臧朝平,男,教授,博士生导师,E-mail:c.zang@nuaa.edu.cn。

限元模型进行模型校准、相关分析和模型修正等步骤完成<sup>[1-3]</sup>。模型校准是利用测试数据评判有限元模型经过离散、简化后,是否适用于后续的模型修正的要求。相关性分析则用于评价有限元模型预测的结果与参考的测试数据相接近程度,确定相关的模态对,为模型修正奠定基础。模型修正是利用相关的试验数据,对有限元模型中的误差进行修正,使修正后的模型能够更准确地描述被测对象的动态特性。模型确认中的试验数据通常通过模态测试获得,即通过对实际结构、系统进行模态试验,获取其动力特性参数(固有频率、模态振型和阻尼比等)。结构振动的测试数据与结构有限元模型的预测数据进行相关性分析和利用测试数据实现有限元模型的修正,是动力学模型确认过程的两个重要环节。

当前,应用最广泛的相关分析方法是模态置信准则(Modal assurance criterion, MAC),通过比较有限元模型与测试模型的模态振型的余弦夹角来实现<sup>[4]</sup>。对于航空发动机,由于存在许多轴对称结构,如机匣、轮盘等,这些轴对称结构的振动模态往往存在固有频率非常接近但振型不同(往往会偏转一定角度)的模态对(即重根模态),从而导致明显相似的两阶模态的MAC值很低,进而对模型修正造成影响,存在局限性。Chen等<sup>[5]</sup>提出采用振型旋转和Fourier分解的方法解决该类问题,但需要大量的测试数据和复杂的数学运算。Schedlinski提出了一种简易的方法<sup>[6]</sup>:通过频率、初始MAC等方法判断重根模态,将试验模态用有限元的计算模态的最小二乘表达式表示,并依此构造新的计算模态进行相关分析,但变换后的模态没有改善振型的显示特性,尤其在试验模型存在模态遗漏时,容易破坏原有振型的自相关特性。另一方面,随着测试技术的发展,现代光学测振技术如激光扫描测振(Scanning laser Doppler vibrometer, SLDV),全息图像,电子散斑(Electronic speckle pattern interferometry, ESPI)振动测量等全域振动测量<sup>[7-8]</sup>,以精度高、测量范围大、非接触无附加质量、测试时间短、空间分辨率高等性能优势,可以获得非常丰富的模态测试振型。如何进一步提取这些细腻的模态振型特征,进行相关分析有待深入研究。

模型修正方法的研究已有30年,有代表性的综述可见参考文献<sup>[9~11]</sup>,著名的权威性的专著可见参考文献<sup>[12]</sup>。Zang等<sup>[13]</sup>在从事欧共体框架6航空航天重大项目——虚拟航空合作企业的价值提升(Value improvement through a virtual

aeronautical collaborative enterprise, VIVACE)的过程中,对模型修正的方法进行了全面的评估和分析,并指出基于模态特征灵敏度和基于频响函数灵敏度的两种迭代修正,是当前最有潜力修正大型有限元模型并可能应用于工业产品设计的方法。国内关于模型修正方法的研究,起步于20世纪90年代,近年来有了飞快的发展。有关结构动力学模型修正的研究进展论文见文献<sup>[14~17]</sup>。最新的有限元模型修正综述见文献<sup>[18]</sup>。事实上,模型修正为一逆问题,由于传统模态测试技术的限制、模态振型的不完备性及识别精度不高等问题,模态振型通常仅用于模态相关性分析,而较少直接参与模型修正过程。如果选择的修正参数过多,由于测试数据的模态阶数和测点数有限,会造成模型修正方程的收敛失去物理意义。Zang等在欧共体框架6航空航天重大项目VIVACE研究中,以一端固支的平板为例,分析了模态测试振型对结构模型修正和模型确认的受益<sup>[19-20]</sup>,其后,又利用连续激光扫描测试的振动模态数据,实现了对方板结构有限元模型的修正<sup>[21]</sup>。研究表明,模态振型数据包含了丰富的振动特性信息,考虑模态振型的修正,会使修正结果更接近实际结构的动力特性。但是直接利用全域模态振型进行修正,所需处理的数据量过于庞大,造成模型修正迭代过程的计算成本高,对计算机的资源要求也高。需要寻找一种方法对全域模态振型数据进行压缩并保留其主要特征的方法,同时由于试验模态振型中往往包含测试噪声,影响模型修正的结果,也需要提高试验模态振型的抗噪性。

Zernike矩是基于单位圆的一组正交矩,具有旋转不变性、抗噪声性强、计算效率高和易于图像重建等优点,在医学验光、图像滤波、图像识别等领域得到了非常广泛的应用。在结构动力学方面,Wang等<sup>[22]</sup>首次提出了Zernike矩用于二维结构模态振型描述和模型修正的方法。Zang等<sup>[23-24]</sup>在国内率先研究了利用Zernike矩对轴对称结构的模态振型数据描述方法及其对结构重模态的清晰描述,有效滤波振型数据中噪声的影响。本文在简要介绍轴对称结构振动模态振型的Zernike矩描述方法的基础上,将进一步探讨利用Zernike矩函数进行轴对称结构动力学模型确认的理论与方法,主要包括:(1)将模态振型变换到Zernike矩构成的空间中,并表示为由Zernike多项式组成的线性组合。由于不同的多项式反映了模态振型不同的形状特征,多项式的线性组合,可以代表各阶模态的振型,从而实现模态振型的特征提取;(2)提出基于轴对称

结构模态振型Zernike 矩描述的相关分析方法能更好地反映两个模型的异同以及基于Zernike 矩函数灵敏度的模型修正方法可以更加有效地利用全域模态振型数据,使修正结果的物理意义更加明确。以某一航空发动机压气机轮盘为例,验证了应用Zernike 矩变换函数描述轴对称结构的模态振型及基于Zernike 矩的相关性分析和模型修正的优越性。

# 1 轴对称结构的模态振型描述与模型确认理论

## 1.1 轴对称结构模态振型的 Zernike 矩描述及总体相似度

### 1.1.1 轴对称结构模态振型 Zernike 矩描述

轴对称结构模态振型的 Zernike 矩描述,在文献[23,24]中已经详细论述。考虑论文连续性,这里简述如下:

Zernike 矩是基于 Zernike 多项式的正交化函数,由一组单位圆内的完备正交集组成。 $n$  阶 Zernike 多项式  $V_{nm}(\rho, \theta)$  是在极坐标  $\rho, \theta$  下定义的函数为

$$V_{nm}(\rho, \theta) = R_{nm}(\rho)e^{im\theta} \quad (1)$$

式中: $i = \sqrt{-1}; n = 0, 1, 2, \dots, n$  是 Zernike 多项式的阶数; $m$  为多项式的重数,需满足  $n - |m|$  为偶数; $R_{nm}(\rho)$  是一组实值径向多项式

$$R_{nm}(\rho) = \sum_{s=0}^{(n-|m|)/2} \frac{(-1)^s (n-s)! \rho^{n-2s}}{s! \left(\frac{n+|m|}{2} - s\right)! \left(\frac{n-|m|}{2} - s\right)!} \quad (2)$$

假设轴对称结构的模态振型可用函数  $I(x, y)$  表示,则其模态振型的 Zernike 矩表示为

$$Z_{nm} = \frac{n+1}{\pi} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} I(x, y) V_{nm}^*(x, y) dx dy \quad (3)$$

在极坐标下,公式可以表示为

$$Z_{nm} = \frac{n+1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 I(\rho, \theta) V_{nm}^*(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta \quad (4)$$

为了便于计算,轴对称结构模态振型的 Zernike 矩可以用离散形式表示为

$$Z_{nm} = \frac{n+1}{\pi} \sum_x \sum_y I(x, y) V_{nm}^*(x, y) \quad (5)$$

可以证明,用 Zernike 矩函数表示的轴对称结构的模态振型幅值具有旋转不变性<sup>[24]</sup>。

用 Zernike 矩函数表示的轴对称结构模态振型  $I(\rho, \vartheta)$  可用正交函数的 Fourier 展开式表示为

$$I(\rho, \vartheta) \cong \sum_{n=0}^{N_{\max}} \left\{ \frac{Z_{n0}^{(\text{Re})}}{2} R_{n0}(\rho) + \sum_{n>0} [(Z_{nm}^{(\text{Re})} \cos m\vartheta + Z_{nm}^{(\text{Im})} \sin m\vartheta) R_{nm}(\rho)] \right\} \quad (6)$$

式中,  $Z_{nm}^{(\text{Re})}$  和  $Z_{nm}^{(\text{Im})}$  分别为

$$Z_{nm}^{(\text{re})} = 2\text{Re}(Z_{nm}), Z_{nm}^{(\text{Im})} = -2\text{Im}(Z_{nm}) \quad (7)$$

$\text{Re}(Z_{nm})$  和  $\text{Im}(Z_{nm})$  分别为 Zernike 矩的实部和虚部。

### 1.1.2 轴对称结构模态振型整体相似度

轴对称结构的模态振型可以用 Zernike 矩函数表示。由于 Zernike 矩函数是由不同阶数的特征集组成,如何确定 Zernike 矩特征集的最高阶数  $N_{\max}$  来最佳描述轴对称结构的模态振型,成为需要解决的关键问题之一。本文提出模态振型的总体相似度系数(Global similarity coefficients, GSC)的概念,用于确定 Zernike 矩特征集的最高阶数  $N_{\max}$ 。

模态振型的 GSC 定义为

$$\text{GSC}(i) = \frac{\zeta_{\text{mean}}}{1 + \zeta_{\text{var}}} \quad (8)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots$$

式中:  $\text{GSC}(i)$  为 Zernike 特征集的最高阶数  $N_{\max}$  为  $i$  时各阶模态的总体相似度参数;  $\zeta_{\text{mean}}$  为某一  $N_{\max}$  下各阶模态重建振型与原振型相似度的均值;  $\zeta_{\text{var}}$  为各阶模态重建振型与原振型相似度的方差。重建的模态振型与原始振型的相似度  $\zeta$  可表示为

$$\zeta(I', I) = \frac{\iint_{\Omega} (I' - \bar{I}') (I - \bar{I}) dA}{\sqrt{\left[ \iint_{\Omega} (I' - \bar{I}')^2 dA \right] \left[ \iint_{\Omega} (I - \bar{I})^2 dA \right]}} \quad (9)$$

式中  $I'$  和  $I$  分别代表结构的重建振型和原始振型,且

$$\bar{I}' = \frac{\int_{\Omega} I' dA}{\int_{\Omega} dA}, \quad \bar{I} = \frac{\int_{\Omega} I dA}{\int_{\Omega} dA} \quad (10)$$

从表达式可知,相似度函数是 0 到 1 之间的一个量纲一参数,因此 GSC 取值也在 0 到 1 之间。GSC 取值为 1, 代表利用 Zernike 特征集重建的各阶振型与原振型均完全一致,说明此时的 Zernike 特征集能完全地描述各阶模态振型;而 GSC 取接近 0 的值,则说明各阶模态振型不能被 Zernike 特征集所描述。通常可取使得 GSC 取得最大值的阶数作为 Zernike 特征集的最高阶数。该方法不仅仅适用于 Zernike 特征矩,还可以推广到其他矩函数的应用之中。

## 1.2 基于 Zernike 矩函数的轴对称结构模态振型的相关分析

模态振型的特征描述符是模态振型的一种等

价变换,因此,可以通过模态振型的特征描述符来进行相关性分析,实现模态对的匹配。因为模态振型在模态域内是正交的,将其映射至以正交矩为基的空间中后,同样也具有正交性。与MAC的定义类似,基于Zernike矩函数的相关性分析准则(Zernike descriptor assurance criteria, ZDAC)可定义为

$$\text{ZDAC}(r, q) = \frac{|I_r I_q^*|^2}{(I_r I_r^*)(I_q I_q^*)} \quad (11)$$

式中:  $I_r, I_q$  分别代表第  $r$  阶和第  $q$  阶模态振型的Zernike矩特征描述符;  $*$  代表共轭转置。ZDAC的取值由0到1。当相关系数取值近似为1时,说明两个模态振型完全相关,为同一模态对;当ZDAC取值接近0时,则代表两模态振型无相关性。

当应用Zernike矩特征符对轴对称结构进行相关性分析时,由于重根模态的存在,会出现某一阶测试振型对应两阶有限元模态的情况;可以通过比较可能的模态对之间的转角的大小来匹配对应的模态对。模态振型偏转的角度可以利用式(12)得到

$$\alpha = \frac{\arg(Z'_{nm} / Z_{nm})}{m} \quad (12)$$

式中  $m$  为Zernike矩多项式的重数。

### 1.3 基于Zernike矩函数灵敏度的模型修正方法

#### 1.3.1 模态振型的矩函数的灵敏度

假设  $\theta$  是待修正的结构参数,模态振型的描述符对结构参数的灵敏度可以通过求导得到

$$S_D = \frac{\partial D}{\partial \theta} = \frac{\partial \left[ \int_{\Omega} R(x, y) \mathbf{I}(x, y, \theta) dx dy \right]}{\partial \theta} \quad (13)$$

由于连续模态振型函数  $\mathbf{I}(x, y)$  可以表示为单元型函数  $\pi(x, y)$  和模态特征向量  $\phi(\theta)$  的线性组合,即

$$\mathbf{I}(x, y, \theta) = \pi^T(x, y) \phi(\theta) \quad (14)$$

将上式代入式(13),可得

$$S_D = \int_{\Omega} R(x, y) \pi^T(x, y) dx dy \frac{\partial \phi(\theta)}{\partial \theta} \quad (15)$$

由此可知,模态振型矩函数的灵敏度可以通过计算单元形函数的特征矩与特征向量的灵敏度之积来获得。

#### 1.3.2 基于Zernike矩函数灵敏度的模型修正

与基于灵敏度的修正方法类似,在获得响应对应修正参数的灵敏度后,可以利用灵敏度与Zernike特征矩残差来估计下次迭代的参数

$$\theta_{j+1} = \theta_j + [\mathbf{S}_{Dj}^T \mathbf{W}_e \mathbf{S}_{Dj}]^{-1} \mathbf{S}_{Dj}^T \mathbf{W}_e (\mathbf{z}_m - \mathbf{z}_j) \quad (16)$$

式中:  $S_D$  为模态振型矩函数的灵敏度;  $\mathbf{z}_m$  为测试模态振型函数的特征矩;  $\mathbf{z}_j$  为第  $j$  次迭代的仿真的模

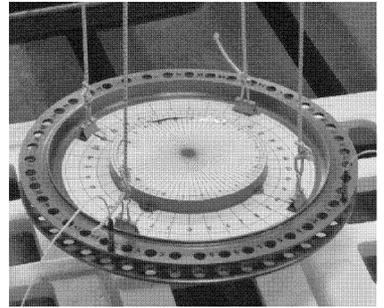
态振型特征矩。在利用矩函数进行修正时,可以选择模态振型的主要特征矩作为响应目标,否则修正过程易发散。

## 2 实例分析:航空发动机压气机轮盘的模型确认

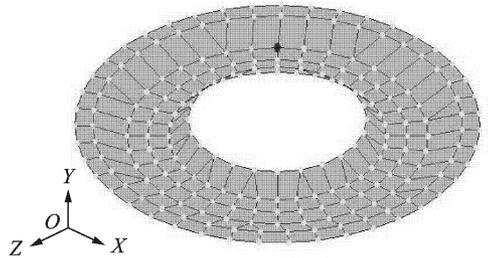
### 2.1 压气机轮盘的结构模态测试与有限元模型

为了验证基于Zernike矩描述的相关性分析和模型修正的可行性,以某一航空发动机压气机轮盘为例,通过有限元建模,实际结构的模态测试,建立有限元模型和测试模型的振动模态的Zernike矩描述,并进行模型相关性分析、有限元模型修正,从而实现其模型确认。

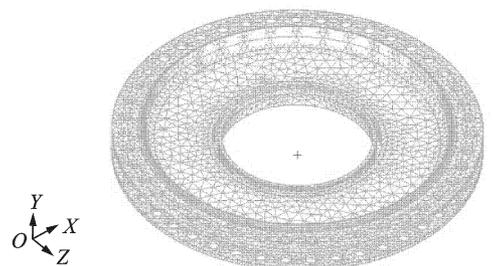
某航空发动机轮盘的结构、测试模型和有限元模型如图1所示。模态测试时选择轮盘的上表面为测量面,测量方向选择轮盘的主要振动方向( $Y$ 向),采用力锤激励,加速度传感器测量。自由边界条件采用弹性绳悬挂模拟。有限元模型计算的单元选用10节点4面体单元(TET10),共有约53万自由度。边界条件为自由-自由状态。由于轮盘轴线水



(a) 航空发动机轮盘



(b) 测试模型



(c) 有限元模型

图1 航空发动机轮盘、测试模型及有限元模型

平方向的振动幅度很小,所以分析中只考虑振动主方向(Y向)的振型分量。

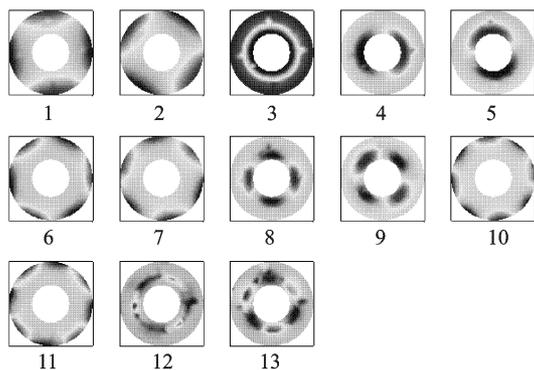
轮盘的前13阶实测固有频率和利用 NASTRAN 求解器计算得到轮盘的前15阶固有频率值分别由表1,2所示。将轴向的振型分量作为图像的灰度值,建立轮盘的前13阶测试模态振型和轮盘有限元计算的模态振型如图2所示。

表1 轮盘前13阶固有频率(测试模型)

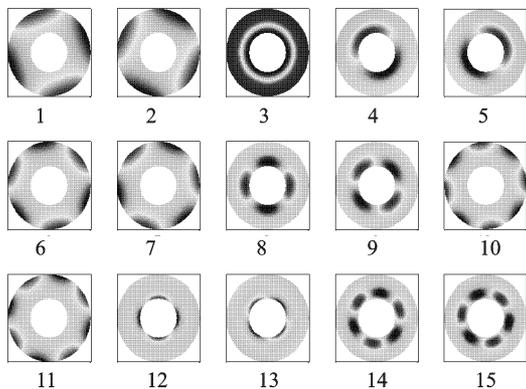
序号	固有频率/ Hz	序号	固有频率/ Hz	序号	固有频率/ Hz
1	259.92	6	803.88	11	1 544.19
2	262.44	7	803.60	12	1 862.03
3	409.76	8	1 000.72	13	1 887.62
4	538.88	9	1 012.83		
5	538.90	10	1 527.90		

表2 轮盘前15阶固有频率(有限元模型)

序号	固有频率/ Hz	序号	固有频率/ Hz	序号	固有频率/ Hz
1	267.22	6	821.02	11	1 564.9
2	267.28	7	821.18	12	1 730.3
3	497.29	8	1 124.8	13	1 732.7
4	632.01	9	1 130.5	14	2 002.0
5	633.55	10	1 564.7	15	2 004.2



(a) 前13阶测试模态振型



(b) 前15阶有限元计算的模态振型

图2 航空发动机轮盘的前13阶测试模态振型和前15阶有限元计算的模态振型

从表1,2和图2可以看到,测试结果与有限元分析结果相似,模态1和2,模态4和5等皆出现了频率相同、振型不同的重根模态,但各阶模态频率的测试值与有限元分析值存在差异。

### 2.2 压气机轮盘的模态振型的 Zernike 矩描述

为了用 Zernike 矩特征集最佳描述航空发动机轮盘实际结构测试和有限元预测的模态振型,首先需要确定 Zernike 特征集的最大阶数  $N_{max}$ 。当  $N_{max}$  取值从1到50变化时,分别计算轮盘有限元模型和测试模型各阶模态振型的 GSC 的值,从有限元模型各阶模态振型的 GSC 的值发现,当  $N_{max}$  小于7时,GSC 值较低;当  $N_{max}$  取8至42时,GSC 值大部分均在0.9左右,此时 Zernike 矩特征集能较好地描述各阶模态振型。在  $N_{max}$  取15时,GSC 取得最大值;当  $N_{max}$  大于42,GSC 值急剧减小。说明 Zernike 特征集的最高阶数  $N_{max}$  并不是越高越好,过高反而会对振型的重建产生很大的影响。对于测试模型,其变化规律和有限元模型大致相同,但当  $N_{max}$  取8至42时,GSC 有缓慢平稳下降的趋势,不像有限元模型呈波动状。当  $N_{max}$  取12时,测试模型各阶模态的 GSC 取得最大值。由以上分析,综合考虑有限元模型和测试模型的 GSC 值,取  $N_{max}$  为15进行分析。此时的 Zernike 特征集可以较准确地描述轮盘各阶模态振型。

图3,4分别表示测试模型和有限元模型计算的各阶模态振型的 Zernike 特征集及其幅值。由图可知:

(1)各对重模态的 Zernike 主矩具有相同的幅值,但它们的相角不同,这反映了重模态振型具有相同振动形式、而振动方向不同的特点。这说明利用 Zernike 特征矩描述模态振型,可以有效地反映轴对称结构的振动特征。

(2)有限元仿真的模态振型的 Zernike 特征集中只有某几阶主特征矩幅值较大,其他阶特征矩几乎为零。实际上,通过这些主特征矩就可以很好地反映轮盘的振动特性,也就是说,通常需要成千上万自由度表达的模态振型可以通过有限阶数的 Zernike 特征矩来描述,这大大减少了分析的数据量。可以用于处理非常细腻的模态测试振型,实现测试数据压缩。

(3)测试模型各阶模态振型的 Zernike 特征集及其幅值分别与有限元的结果比较发现,测试模型的 Zernike 特征集出现了许多“多余”的特征矩。这些“多余”的特征矩反映了测试数据中的噪声,研究表明,通过选择主特征矩重建测试振型,可以有效地减弱噪声对测试数据的影响。

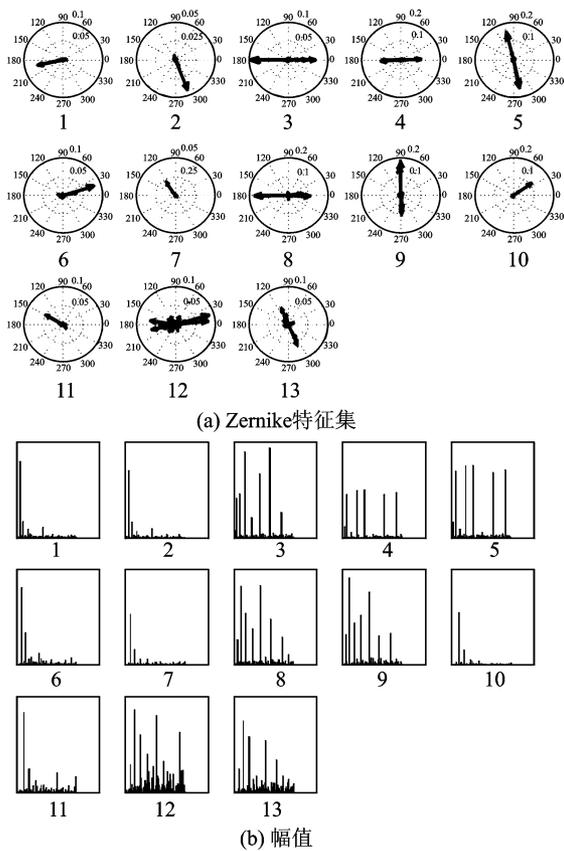


图3 轮盘测试模型的模态振型的Zernike特征集及其幅值

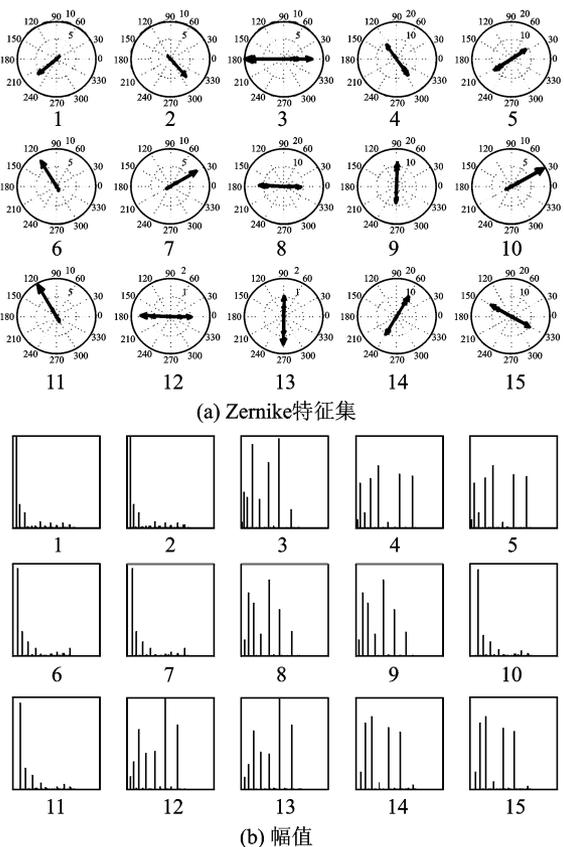


图4 轮盘有限元模型计算的模态振型的Zernike特征集及其幅值

### 2.3 压气机轮盘基于Zernike矩的模态相关分析

首先,进行基于Zernike矩的模态振型的自相关分析,取Zernike特征集最大阶数 $N_{\max}$ 为15。图5分别为实际测试和应用ZMAC计算的轮盘有限元模型各阶模态振型的自相关系数矩阵。

由图5可知,利用模态振型Zernike矩特征集计算的自相关系数矩阵,不仅其主对角线元素的值为1,各重根模态对之间的相关系数也几乎为1,说明基于Zernike矩描述的相关性分析对模态振型之间的角度差异不敏感,这一特点将有助于测试模型与有限元模型的模态对匹配。此外,其他非对角线元素的值均几乎为0,各阶模态很好地被区分开来。轮盘测试结果的某些重根模态对,如模态12与模态13,其相关性有所下降(约0.76),这是因为这两阶模态的Zernike特征集中包含了噪声的特征,对其相关性分析造成了影响。

利用Zernike矩计算得到航空发动机轮盘有限元/测试模型的互相关性系数矩阵和采用传统的MAC相关分析方法得到各阶模态振型的MAC矩阵,如图6所示。

从ZMAC图可以看到,测试模型的前11阶模

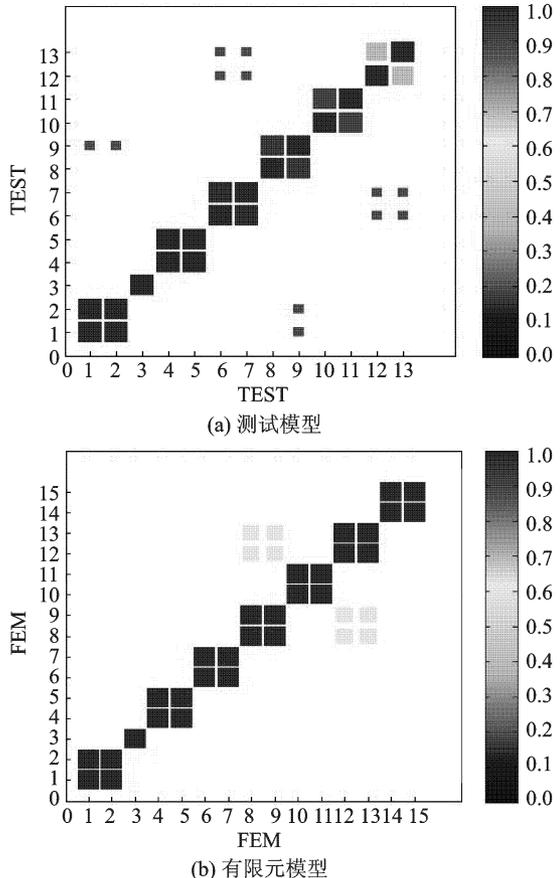


图5 基于Zernike矩的测试模型的模态自相关系数和有限元模型的模态自相关系数

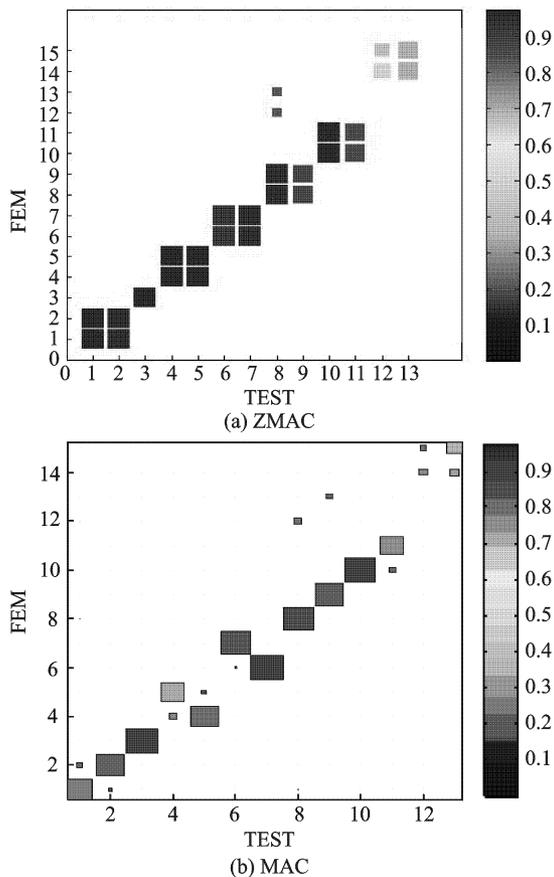


图6 发动机轮盘测试模型与有限元模型各阶模态的ZMAC和MAC比较

态均可在有限元模型中找到相关性较高的对应模态,第13阶模态与有限元模型的相关性较MAC相比有所提高。此外,测试模型中的一阶模态往往与有限元模型中的两阶模态相对应,其中之一是这阶模态的模态对,而另一个则是它的重根模态对。可以通过计算振型之间的转角来判定模态对和重模态对,通常,取两者转角较小的为一对模态对,而转角大的则为重根模态对。从MAC图可知,模态对1,4和11的MAC偏低,这是由于受重根模态的影响,测试的模态振型与有限元仿真的振型之间偏转了一个角度,从而降低了模态对之间的MAC值。过大的偏转角有时甚至会导致模态匹配的失败。由于重根模态的存在,测试模型与有限元模型的模态振型还出现了交叉对应的现象,如第4,5阶模态和第6,7阶模态。此外,由于有限元模型的第12,13阶模态为轮盘内圈横向振动,没能测量出来,故未在测试模型中找到对应的模态对。有限元模型仿真的固有频率与测试的固有频率差异较大,这是受到有限元模型建模的几何误差、实际测量的约束方式以及测试中的系统误差和噪声等的影响所致。MAC与利用Zernike矩进行相关分析的结果比较见表3。

表3 MAC与ZMAC相关性分析的结果比较

Mode number (TEST)	Mode number (FEM)	MAC	ZDAC	Rotation angle/(°)
1	1	0.78	0.96	14.05
2	2	0.88	0.96	10.28
3	3	0.98	0.97	0
4	5	0.7	0.97	31.42
5	4	0.83	0.97	22.24
6	7	0.92	0.93	8.09
7	6	0.98	0.95	-4.91
8	8	0.94	0.95	-0.47
9	9	0.89	0.87	-1.45
10	10	0.97	0.97	-0.56
11	11	0.73	0.86	-10.02
13	15	0.48	0.77	12.04

从表3可以看出:(1)基于Zernike矩的相关性分析(ZDAC)方法和利用MAC相关性分析所确定的模态对一致,可以准确判断模态对,同时还可以得到对应模态对之间的转角;(2)模态对之间的偏转角度对相关性影响较大。表中转角偏差大于 $10^\circ$ 的6阶模态,应用MAC计算出的相关性系数较低,应用ZDAC分析,相关性明显提高。第12阶模态对,MAC值很低(0.48),难以识别;而应用ZDAC,相关系数提高到0.77,显示了很高的相关性。当模态对的转角偏差较小时,ZDAC与MAC比较接近,出现波动,个别模态的相关系数较MAC略有减小,但其变化小于3%。这可能是模态重建误差,计算累计误差或测试噪声影响等原因所致,尚有待进一步研究确定。

## 2.4 基于Zernike矩灵敏度的压气机轮盘模型修正

由相关性分析结果可知,第3~5,8和9阶模态对的固有频率误差很大(均高于10%)。经分析,这几阶模态均包含轮盘的节圆振动(伞形振动),而节圆振动的主要区域在轮盘的内孔和中间薄壁处,可能是这些区域存在误差导致了频率差异过大。此外,考虑到测绘过程中倒角等部位测量不够准确,也是模型中可能的误差源。最终,确定了3个区域进行修正,分别为轮盘内孔、薄壁和薄壁与轮缘间的倒角部分。各修正区域如图7所示,修正参数选择弹性模量,分别为 $P_1 \sim P_3$ 。修正的目标为前13阶试验频率及其对应模态振型的Zernike特征主矩。迭代9次后,参数收敛,修正前后各阶模态的频率误差如图8所示。可以看到,经过修正各阶模态的频率误差均下降,有限元预测结果与试验数据之间的误差被大大减小,其中第3~5和第8,9阶模态的固有频率误差减小明显,最大频率误差也由

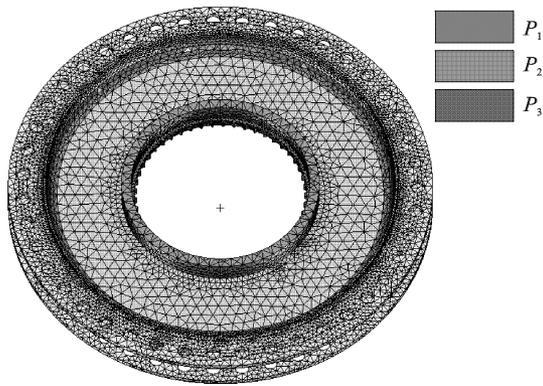


图7 航空发动机轮盘的修正区域

21.36%降至1.75%，这说明通过修正有效地减小了有限元模型与实际结构的差异。查看修正参数变化，发现 $P_1$ 增大，其他两个参数均减小。其中， $P_2$ 减小了20%左右，说明轮盘初始模型中的薄壁处的

刚度较实际结构偏大，从而导致了节圆振动的频率增大。值得注意的是，薄壁与轮缘的倒角处的刚度降低了将近80%，说明在有限元建模过程中，该处的建模误差较大。

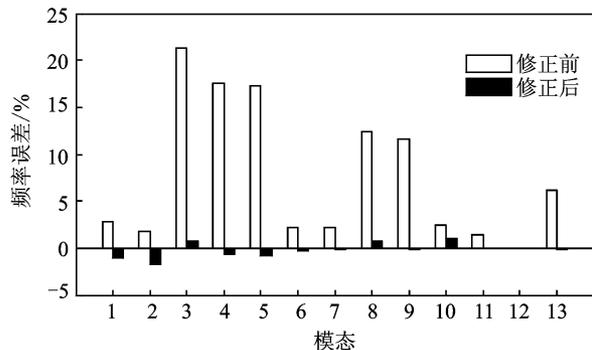


图8 发动机轮盘修正前后频率误差的比较

修正前后的频率误差、MAC 的变化如表4 所示。

表4 发动机轮盘修正前后的比较

试验		修正前		修正后		频率误差/%		MAC/%	
模态	频率/Hz	模态	频率/Hz	模态	频率/Hz	修正前	修正后	修正前	修正后
1	259.92	1	267.22	1	257.08	2.81	-1.09	77.65	93.36
2	262.44	2	267.28	2	257.86	1.84	-1.75	88.43	84.76
3	409.76	3	497.29	3	413.11	21.36	0.82	97.67	98.13
4	538.88	5	633.55	5	535.37	17.57	-0.65	69.79	90.62
5	538.90	4	632.01	4	534.34	17.28	-0.85	83.20	97.11
6	803.88	7	821.18	6	801.81	2.15	-0.26	92.26	86.90
7	803.60	6	821.02	7	802.27	2.17	-0.17	97.61	97.22
8	1 000.72	8	1 124.8	8	1 007.70	12.40	0.70	94.08	92.67
9	1 012.83	9	1 130.5	9	1 011.75	11.62	-0.11	90.21	91.01
10	1 527.90	10	1 564.7	10	1 543.26	2.41	1.01	97.31	85.79
11	1 544.19	11	1 564.9	11	1 543.65	1.34	-0.03	73.39	49.56
13	1 887.62	15	1 940.66	15	1 885.46	2.81	-0.11	48.02	61.69

可以看到，修正后第1,4 和5 阶模态的MAC 值明显提高，均上升至90%以上，这是由于利用Zernike 矩进行修正，考虑了模态振型的影响，缩小了模态对之间的转角，从而使模态振型得到了有效的改善。可见，利用矩函数进行模型修正是完全可行的，且具有一定优越性。

### 3 结束语

轴对称结构的模态振型描述和模型确认的理论分析以及发动机轮盘的有限元模型的确认实例表明：对于轴对称结构，由于重模态的影响，相关的模态对之间往往会偏转一定角度，导致明显相似的两阶模态的MAC 值很低，进而对模型修正造成影响。采用Zernike 矩特征集描述对称结构的模态振型，即可以实现振型数据量的压缩，又可以对结构

的振动特性进行准确的描述。应用基于Zernike 矩的相关性分析方法，可以准确分析轴对称结构有限元模型与测试数据的相关性，不但区分了重根模态，还能得到有限元/测试模型的模态对之间的转角，实现准确的模态匹配，大大提高了这些模态对之间的相关性。同时，基于Zernike 矩的灵敏度模型修正方法，可有效提高修正后模型与测试数据的一致性和相关性。

### 参考文献：

- [1] Ewins D J. Modal testing II— theory, practice and application[M]. Baldock, Hertfordshire, England: Research Studies Press Ltd, 2000.
- [2] Zang Chaoping, Chen Gan, Ewins D J. A review of advanced development of FE model validation process [C] // The 24th International Modal Analysis

- Conference. Saint Louis, USA: The Printing House, Inc, 2006.
- [3] Zang Chaoping, Ewins D J. Model validation for structural dynamics in the aero-engine design process [J]. *Front Energy Power Eng China*, 2009, 3(4): 480-488.
- [4] Allemang R J, Brown D L. A correlation coefficient for modal vector analysis [C] // *Proceedings of 1st I-MAC*. Schenectady, NY, USA: Union Coll, 1982: 110-116.
- [5] Chen G, Ewins D J. Correlation methods for axis symmetric structure [C] // *Proceedings of the 18th International Modal Analysis Conference (IMAC)*. San Antonio, TX; Society for Experimental Mechanics Inc, 2000: 1006-1012.
- [6] Schedlinski C, Staples B. Computational model updating of axis symmetric systems [C] // *Proceedings of ISMA2004*. Leuven, Belgium; Katholieke Universiteit Leuven-Department Werktuigkunde Celestijnenlaan 300B, 2004: 3197-3211.
- [7] Stanbridge A B, Martarelli M, Ewins D J. Measuring area vibration mode shapes with a continuous-scan LDV [C] // *Proceedings of the fourth International Conference on Vibration Measurements by Laser Techniques*. Bellingham, Washington: Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers, 2000: 176-183.
- [8] Wang Z, Walz T, Etemeyer A. Three dimensional pulsed ESPI technique of analysis of dynamic problems [C] // *Proceedings of SPIE, the International Society for Optical Engineering*. Bellingham, Washington: Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers, 1999, 3824: 58-64.
- [9] Imregun M, Visser W J. A review of model updating techniques [J]. *Shock Vibraton Digest*, 1991, 23: 9-20.
- [10] Mottershead J E, Friswell M I. Model updating in structural dynamics; a survey [J]. *Journal of Sound Vibration*, 1993, 167: 347-375.
- [11] Link M. Updating of analytical models-review of numerical procedures and application aspects [M]. Baldock, UK: Research Studies Press Ltd, 2001.
- [12] Friswell M I, Mottershead J E. Finite element model updating in structural dynamics [M]. Netherland: Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [13] Zang C P, Chen G, Ewins D J. Task 2.3.3 model validation and updating: report on competitive assessment of updating methods [R]. An M12 technical deliverable for EC Framework 6 Integrated Project VIVACE, ref: VIVACE 2.3/3/IMP/T/04312-1.0, December, 2004: 1-49.
- [14] 魏来生. 结构有限元动态模型修正方法综述 [J]. *振动与冲击*, 1998, 17(3): 43-46, 81.  
Wei Laisheng. Overview of finite element model updating method in structural dynamics [J]. *Vibration & Shock*, 1998, 17(3): 43-46, 81.
- [15] 朱安文, 曲广吉, 高旅南, 等. 结构动力模型修正技术的发展 [J]. *力学进展*, 2002, 32(3): 337-348.  
Zhu Anwen, Qu Guangji, Gao Lunan, et al. Development of structural dynamic model updating techniques [J]. *Advances in Mechanics*, 2002, 32(3): 337-348.
- [16] 李辉, 丁桦. 结构动力模型修正方法研究进展 [J]. *力学进展*, 2005, 35(2): 170-180.  
Li Hui, Ding Hua. Progress in model updating for structural dynamics [J]. *Advances in Mechanics* 2005, 35(2): 170-180.
- [17] 付素芳, 张秋菊, 陈海卫, 等. 振动系统动力学模型修正方法比较研究 [J]. *机械设计*, 2007, 24(8): 42-44.  
Fu Sufang, Zhang Qiujun, Chen Haiwei, et al. Comparative research of dynamics model updating methods of vibration system [J]. *Mechanical Design* 2007, 24(8): 42-44.
- [18] 吴晓菊. 结构有限元模型修正综述 [J]. *特种结构*, 2009, 26(1): 39-45.  
Wu Xiaojun. Overview of structural finite element model updating [J]. *Special Structures*, 2009, 26(1): 39-45.
- [19] Zang C P, Chen G, Ewins D J. T2.3.2.2 Review of current status of full-field measurement equipment hardware and software, test planning and integration tools, suggestions for future development [R]. An M18 Technical Deliverable for EC Framework 6 Integrated Project VIVACE, VIVACE 2.3/2/IMP/T/04207-1.0, 2005.
- [20] Zang C P, Chen G, Ewins D J. Finite element model updating with modal data [C] // *The 24th International Modal Analysis Conference*. Saint Louis, USA: The Printing House Inc, 2006.
- [21] Zang C P, Di Maio D, Zampognaro N, et al. FE model updating with the measured data obtained from the CSLDV technique [C] // *Proceedings of SPIE on the 7th International Conference on Vibration Measurements By Laser Techniques, Advance and Applications*. Bellingham, Washington: Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers, 2006: 6345-6354.
- [22] Wang Weizhou, Mottershead J, Mares C. Mode-shape recognition and finite element model updating using the Zernike moment descriptor [J]. *Mechanical System Signal Processing*, 2009, 23(7): 2088-2112.
- [23] Liu Yinchao, Zang Chaoping. Mode shape description of an aero engine casing structure using Zernike moment descriptors [J]. *Journal of Aerospace Power*, 2011, 26(4): 760-770.
- [24] 刘银超, 臧朝平. 对称结构模态振型的 Zernike 矩描述方法 [J]. *振动工程学报*, 2011, 24(4): 369-375.  
Liu Yinchao, Zang Chaoping. Mode shape description of a symmetrical structure using Zernike moment descriptor [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2011, 24(4): 369-375.