第44卷第5期
2012年10月
南京航空航天大学学报
Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics
Vol. 44 No. 5
Oct. 2012

绳系卫星系统周期运动的分岔与镇定

金栋平 庞兆君 余本嵩
（南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室，南京，210016）

摘要：考虑到绳系卫星系统主星姿态的作用，研究状态保持阶段绳系卫星系统的非线性动力学。首先建立含姿态的绳系卫星姿-仰耦合两自由度非线性动力学模型，通过摄动法解析地获得系统的周期运动，利用Floquet理论分析轨道偏心率对该周期运动稳定性的影响。然后，通过与姿态有关的两个系统参数，对绳系卫星系统周期运动的分岔进行了数值仿真。结果表明，姿态和俯仰运动耦合导致绳系卫星系统产生多个概周期运动并存的复杂动力学行为以及混沌运动。最后，为将混沌运动引导到某个稳定的周期运动上，提出利用线性速度反馈的镇定策略。

关键词：绳系卫星系统；姿态；周期运动；分岔；镇定
中图分类号：V412.4；O313 **文献标识码**：A **文章编号**：1005-2615(2012)05-0663-06

Periodic Motion Bifurcation and Stabilization of Tethered Satellite System

Jin Dongping, Pang Zhaojun, Yu Bensong
(State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China)

Abstract: The nonlinear dynamics of tethered satellite system is studied for the attitude motion of mother satellite. Firstly, the planar dynamical model of two degree-of-freedom is established for a tethered satellite system moving in an elliptical orbit during station-keeping phase. The periodic motion is obtained by performing the perturbation analysis with the orbital eccentricity as a small parameter. Afterwards, the stability of the periodic motion is analyzed using Floquet theory. The effect of the parameters of the system on the bifurcations of periodic motion is revealed numerically. It is found that the coupled attitude and pitch dynamics causes the co-existence of quasi-periodic motions, and yields the chaotic motion as increasing the size of the mother satellite. Finally, a linear velocity feedback control scheme is successfully applied to stabilize chaotic motion.

Key words: tethered satellite system; attitude; periodic motion; bifurcation; stabilization

作为一类新型航天飞行器，绳系卫星受到了航天强国和国际航天组织的高度重视，进行了一系列成功的在轨飞行实验任务[1]，与之相应的动力学及控制问题引起人们极大关注[2-3]。

绳系卫星在轨飞行实验通常释放的系绳长度达几十千米，因而卫星本体与之相比可以被视为质点，基于质点动力学简化模型来研究绳系卫星的复杂动力学行为。例如，Fujii等将主星和子星均看成质点，利用Poincaé映射和Lyapunov指数等方法对状态保持阶段的绳系卫星系统分岔和混沌等非线性动力学行为进行了数值仿真[4]。绳系卫星状态保持阶段俯仰和滚转运动相互耦合也可致沿圆轨道和椭圆轨道飞行的绳系卫星系统发生混沌运动[5]。Peláez等通过解析和数值方法研究了圆轨道电动

基金项目：国家自然科学基金(50875124)资助项目；长江学者和创新团队计划(IRT0968)资助项目；高校基础研究(NS2012034)资助项目。
修订日期：2012-07-23
通讯作者：金栋平，男，教授，博士生导师，E-mail：jindp@nuaa.edu.cn。

力绳系卫星系统的周期运动及其稳定性问题，结果表明其周期解总是不稳定的[6]，由此使绳系卫星发生失稳而导致复杂的非周期运动。Nakanishi 等利用分叉理论研究了椭圆轨道哑铃型绳系卫星的周期运动，并建议利用该周期轨道在 van der Pol 平面上的投影来进行延迟反馈控制[7]。He 等利用 Taylor 展开和稳定性准则分析了绳系卫星系统平衡状态的稳定性及其控制问题[8]。

当卫星本体的尺度相对绳系卫星系统而言不可忽略时，则需要考虑卫星姿态对于状态保持阶段绳系卫星系统动力学的影响。朱仁璋等将主星设为质点而子星取为三维刚体，利用数值方法着重研究了状态保持阶段子星的振荡与姿态运动[9]。王晓宇等研究了计入子星姿态绳系卫星系统的非线性动力学，利用摄动法研究了绳系卫星系统在平衡位置附近的概周期运动[10]。Ashenberg 等将主星考虑成刚体、子星视为质点，发展了椭圆轨道绳系卫星的运动控制算法[11]。

从可查阅的文献看，已有针对状态保持阶段绳系卫星系统动力学及控制的研究通常关注如何将周期运动控制到平衡位置，而对于考虑卫星姿态的绳系卫星系统周期运动的分岔分析以及分岔后系统的复杂运动如何进行镇定的研究显得薄弱。随着绳系卫星编队、空间绳系机器人等空间任务的发展，使得绳系体的姿态在空间绳系系统的动力学及控制中成为不可忽略的重要因素。本文针对状态保持阶段椭圆轨道绳系卫星系统的非线性动力学及控制问题，研究卫星本体姿态与系统俯仰运动相互耦合导致的周期运动及其分岔和镇定问题，给出了使混沌运动镇定到周期轨道的一种方法。

1　绳系卫星动力学模型

考虑如图1所示两体绳系卫星系统沿赤道面内偏心率为e的未扰Kepler 轨道的运动。这里将主星视为刚体，其质量为M、绕质心C的转动惯量为J；子星视为质点，其质量为m。主星和子星通过长度为l的刚性系绳在A点相连，连接点距主星质心距离为ρ。设主星质量M远大于子星质量m，即系统质心与主星质心重合、子星运动对系统轨道的影响不计。主星轨道半径为R、真近点角为ν。

建立固连于地心O的惯性坐标系OXY，其中OX轴位于赤道面内并指向春分点。定义系统的两个广义坐标为系绳俯仰运动θ和主星面内姿态运动α。根据Lagrange 方程，可得到绳系卫星系统的非线性动力学方程。进一步，选取量纲一参数$a_1=$

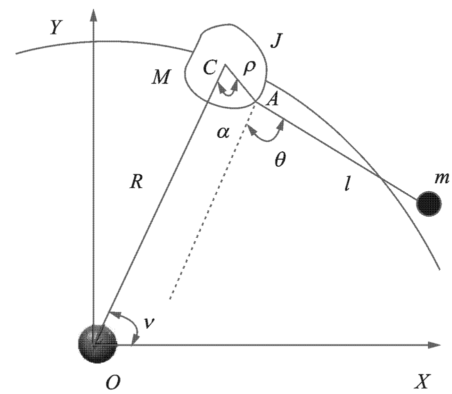


图1　绳系卫星力学模型

ρ/l和$a_2=m\rho^2/J$，则可获得系统在局部平衡位置(0,0)附近近似姿态-俯仰运动耦合动力学方程

$$
\begin{aligned}
&\ddot{\theta}-[3(1+a_1)(\alpha+a_2(\alpha+\theta))-\\
&a_1(1+a_2)(\alpha+\theta)(2+\dot{\alpha})\dot{\alpha}-a_2(\alpha+\theta)\cdot\\
&(2+\dot{\theta})\dot{\theta}]-2e(1+\dot{\theta})\sin\nu=0\\
&a_1\ddot{\alpha}-a_2[3(1+a_1)+a_1(2+\dot{\alpha})\dot{\alpha}+\\
&(2+\dot{\theta})\dot{\theta}](\theta-\alpha)-2a_1e(1+\dot{\alpha})\sin\nu=0
\end{aligned}\tag{1}
$$

式中“.”表示对真近点角ν的导数。当$\rho=0$时，$a_1=a_2=0$，此时方程(1)的第一式退化为常见的椭圆轨道下两点面内绳系卫星系统俯仰运动方程。

2　周期运动的解析解

当轨道偏心率较小时，绳系卫星系统可以表现为绕其局部铅垂位置的周期运动。此时可将椭圆轨道偏心率作为小量，$e=\varepsilon\eta$，利用摄动法将系统的周期解表示成如下的幂级数形式

$$
\begin{cases}
\alpha_p=\varepsilon\alpha_1+\varepsilon^2\alpha_2+\varepsilon^3\alpha_3+\cdots\\
\theta_p=\varepsilon\theta_1+\varepsilon^2\theta_2+\varepsilon^3\theta_3+\cdots
\end{cases}\tag{2}
$$

将式(2)代入方程(1)，根据ε同次幂系数自相平衡，得到一组近似到n阶的线性微分方程组

$$
\begin{cases}
\ddot{\theta}_1+3(1+a_1)[\alpha_1+a_2(\theta_1-\alpha_1)]=2\eta\sin\nu\\
a_1\ddot{\alpha}_1-3a_2(1+a_1)(\theta_1-\alpha_1)=2a_1\eta\sin\nu\\
\ddot{\theta}_2+3(1+a_1)[\alpha_2+a_2(\theta_2-\alpha_2)]=f_2(\alpha_1,\theta_1)\\
a_1\ddot{\alpha}_2-3a_2(1+a_1)(\theta_2-\alpha_2)=g_2(\alpha_1,\theta_1)\\
\qquad\vdots\\
\ddot{\theta}_n+3(1+a_1)[\theta_n+a_2(\theta_n-\alpha_n)]=f_n(\alpha_1,\cdots,\theta_{n-1})\\
a_1\ddot{\alpha}_n-3a_2(1+a_1)(\theta_n-\alpha_n)=g_n(\alpha_1,\cdots,\theta_{n-1})
\end{cases}\tag{3}
$$

式中f_i和$g_i(i=1,\cdots,n)$由其低一阶的微分方程的解确定。满足初始条件$(\alpha_{10},\cdots,\alpha_{n0})$和$(\theta_{10},\cdots,\theta_{n0})$的周期运动条件是

$$
\begin{cases}
\alpha_1(0,\alpha_{10})=\alpha_1(2\pi,\alpha_{10}),\ \theta_1(0,\theta_{10})=\theta_1(2\pi,\theta_{10})\\
\alpha_2(0,\alpha_{20})=\alpha_2(2\pi,\alpha_{20}),\ \theta_2(0,\theta_{20})=\theta_2(2\pi,\theta_{20})\\
\qquad\vdots\\
\alpha_n(0,\alpha_{n0})=\alpha_n(2\pi,\alpha_{n0}),\ \theta_n(0,\theta_{n0})=\theta_n(2\pi,\theta_{n0})
\end{cases}\tag{4}
$$

根据周期性条件(4)，可逐次求解线性方程组(3)来获得系统的周期解

$$\begin{aligned}\alpha_p &= \varepsilon\Phi_1\sin\nu + \varepsilon^2\Phi_3\sin2\nu + \\ &\quad \varepsilon^3(\Phi_5\sin\nu + \Phi_7\sin3\nu) + \cdots \\ \theta_p &= \varepsilon\Phi_2\sin\nu + \varepsilon^2\Phi_4\sin2\nu + \\ &\quad \varepsilon^3(\Phi_6\sin\nu + \Phi_8\sin3\nu) + \cdots\end{aligned} \tag{5}$$

式中$\Phi_i(i=1,2,\cdots)$是关于参数a_1，a_2和η的已知的多项式函数，这里略去具体表达式。

为了验证所获得的周期解的正确性，这里可任选一组参数$a_1=0.001$和$a_2=0.01$，在相同初始条件下计算不同轨道偏心率的姿态和俯仰运动，结果如图 2 所示。从图中可见，在$N=2$个轨道周期内，根据方程(5)得到的周期运动解析解和积分原方程(1)得到的数值解比较吻合，且偏心率值越小吻合程度越好，说明本方法给出的近似周期解是正确可靠的。

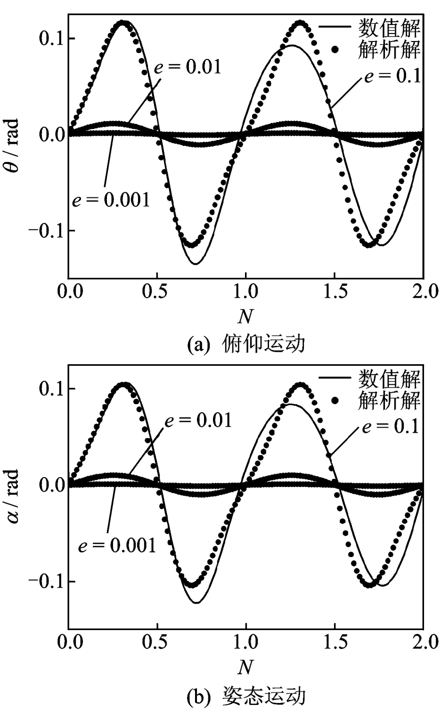


图 2　周期运动解析解和数值解的对比

3　周期运动的稳定性和分岔

应用Floquet 理论分析周期解(5)的稳定性。将方程(1)中e用$\varepsilon\eta$表示，并将其表示成状态空间形式

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x},\nu,\varepsilon) \tag{6}$$

式中$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)=(\alpha,\dot{\alpha},\theta,\dot{\theta})$为状态向量。记周期运动的扰动$\Delta\boldsymbol{x}(\nu,\varepsilon)=\boldsymbol{x}(\nu,\varepsilon)-\boldsymbol{x}_p(\nu,\varepsilon)$，在周期解$\boldsymbol{x}_p$附近线性化，得到扰动满足的变分方程

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\boldsymbol{x}}(\nu) &= Df(\boldsymbol{x}_p(\nu,\varepsilon),\nu)\Delta\boldsymbol{x}(\nu) = \\ &\quad \boldsymbol{A}(\nu,\varepsilon)\Delta\boldsymbol{x}(\nu)\end{aligned} \tag{7}$$

式中$Df(\boldsymbol{x}_p(\nu,\varepsilon),\nu)$为向量函数$f(\boldsymbol{x},\nu,\varepsilon)$在周期解$\boldsymbol{x}_p(\nu,\varepsilon)$处的Jacobi 矩阵，其元素为$2\pi$的周期函数。这样原系统周期解的稳定性转化为判断方程(7)的零解稳定性问题。根据Floquet 理论，零解稳定性取决于该周期系数微分方程对应的单值矩阵$\boldsymbol{M}(\varepsilon)$的特征值。

采用数值方法计算单值矩阵$\boldsymbol{M}(\varepsilon)$。对于给定的$\varepsilon=\bar{\varepsilon}$值，通过将下述积分初值问题

$$\begin{cases}\Delta\dot{\boldsymbol{x}}(\nu) = \boldsymbol{A}(\nu)\Delta\boldsymbol{x}(\nu) \\ \Delta\boldsymbol{x}(\nu_0) = \boldsymbol{I}\end{cases} \tag{8}$$

积分至$\nu=2\pi$得到单值矩阵

$$\boldsymbol{M}(\bar{\varepsilon}) = \Delta\boldsymbol{x}(2\pi) \tag{9}$$

式中$\boldsymbol{I}$为4×4单位矩阵。当轨道偏心率e在某个区间上变化时，根据式(9)可求得单值矩阵的 4 个单特征值，呈两对共轭复数，即

$$\lambda_{1,2} = \sigma_1 \pm \mathrm{i}\mu_1,\ \lambda_{3,4} = \sigma_2 \pm \mathrm{i}\mu_2 \tag{10}$$

它们是系统参数a_1，a_2和轨道偏心率e的函数。

给定同样的参数$a_1=0.001$和$a_2=0.01$，可计算出上述周期运动对应的单值矩阵特征值实部、虚部及其模随轨道偏心率的变化，如图 3 所示。从图中可见，在区间$e\in[0,0.6]$内，特征值的模$|\lambda_{1,2}|$和$|\lambda_{3,4}|$始终为1，且每个特征值对应的初等因子均为一次的。根据Floquet 理论，因有多于一个特征值的模为1，故该周期运动的稳定性取决于高一阶的非线性项[12]，即由下述非线性扰动方程决定

$$\Delta\dot{\boldsymbol{x}}(\nu) = g(\boldsymbol{x}_p(\nu,\varepsilon),\Delta\boldsymbol{x}(\nu)) \tag{11}$$

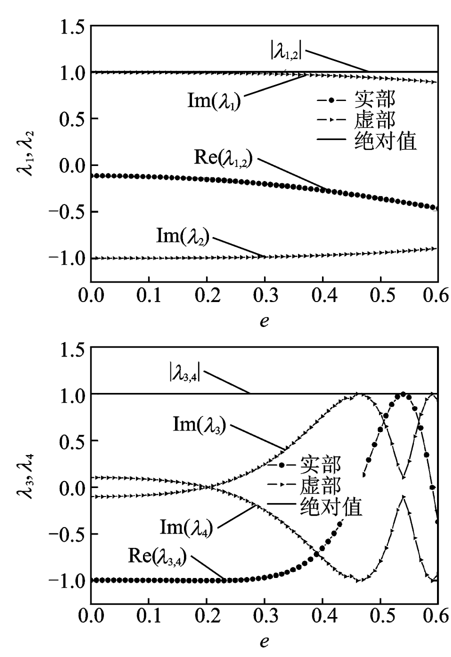


图 3　单值矩阵特征值随偏心率的变化

同样可计算该系统单值矩阵的特征值随轨道偏心率的变化情况，结果如图4所示。从图中可见，当$e=0.07$时，出现模大于1的特征值，表明当$e\geqslant 0.07$时，该周期运动不稳定；当$e<0.07$时，周期运动稳定。

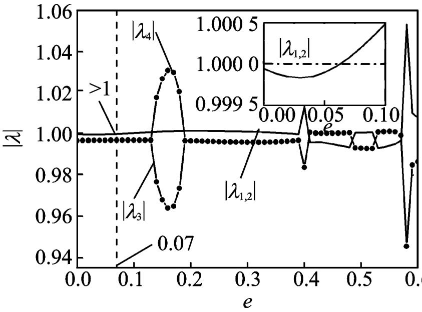


图4　单值矩阵特征值随偏心率的变化

不稳定的周期运动可以通过分岔产生复杂的非线性动力学行为。例如，对于主星和子星均为质点的两体绳系卫星系统，当$e>0.31$时系统的俯仰运动发生混沌运动[4]。对于本文所考虑的主星姿态情形，这里给定轨道偏心率$e=0.31$，分别取a_1和a_2作为分岔参数，考察系统的非线性动力学行为。

图5给出了当$a_2=0.02$时系统的最大Lyapunov指数L随分岔参数a_1的变化情况，可见在$a_1>0.005$时最大Lyapunov指数L为一正值，系统可能进入混运动。为验证该结论，这里a_1分别取0.005和0.006，计算出俯仰运动的Poincaré映射，结果如图6所示。图6表明，当$a_1=0.005$时，系统做多个概周期并存的复杂运动；当$a_1=0.006$时，俯仰为混沌运动。随参数a_1值增加，系统逐渐进入混沌运动，即对于短系绳、大尺寸主星，不可忽略主星的刚体运动对于系统动力学的影响。

给定$a_1=0.005$，考察最大Lyapunov指数L随参数a_2的变化情况，如图7所示。图8为a_2分别取0.018和0.019时，俯仰运动的Poincaré映射。同理，从图7和8可知，系统在$a_2<0.019$时俯仰运动

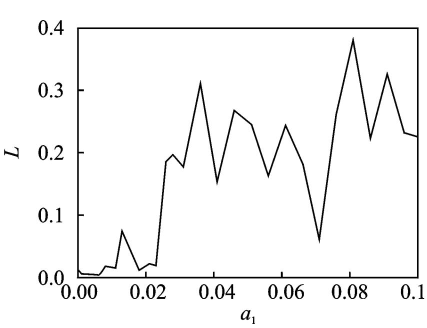
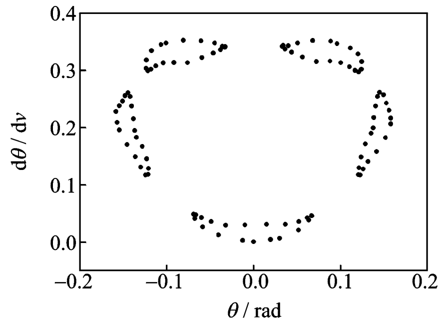
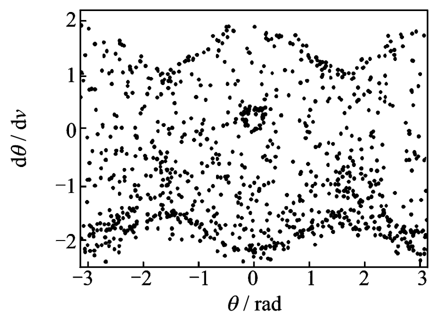


图5　最大Lyapunov指数L随a_1的变化($a_2=0.02$)



(a) $a_1=0.005$



(b) $a_1=0.006$

图6　Poincaré映射

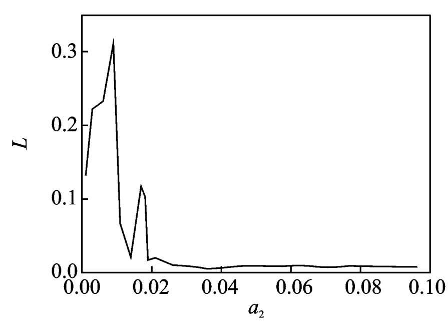
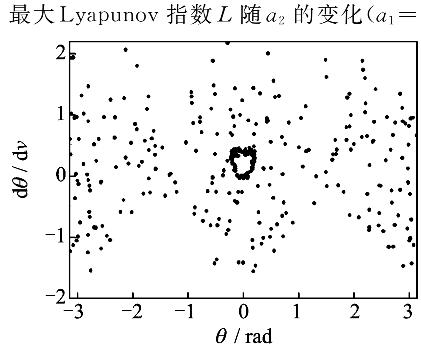
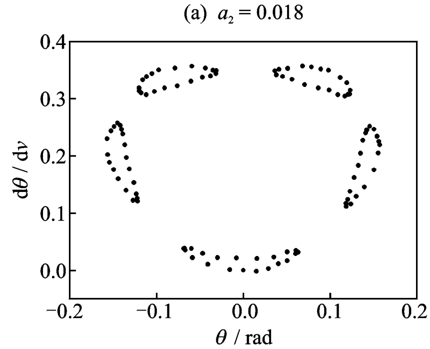


图7　最大Lyapunov指数L随a_2的变化($a_1=0.005$)



(a) $a_2=0.018$



(b) $a_2=0.019$

图8　Poincaré映射

进入混沌，a_2 越小即主星转动惯量相对较大时，系统越容易进入混沌运动，表明主星的刚体运动成为影响系统动力学的重要因素。

综上所述，当计入卫星本体的姿态运动时，绳系卫星系统会因周期运动的分岔而产生概周期运动、混沌等复杂非线性动力学现象。

4　混沌运动的镇定

考虑主星姿态的绳系卫星系统 2π 周期运动在偏心率略大时变得不稳定，且在一定的系统参数下系统会发生混沌运动。为使周期运动在偏心率较大时也保持稳定或将分岔后的混沌运动引导到指定的周期运动上[13]，需要进行周期运动的镇定。为此，对原系统分别引入控制项 $k_1(\dot\theta-\dot\theta_p)$ 和 $k_2(\dot\alpha-\dot\alpha_p)$，此时受控系统的动力学方程成为

$$\begin{gathered}\ddot\theta-[3(1+a_1)(\alpha+a_2(\alpha+\theta))-\\ a_1(1+a_2)(\alpha+\theta)(2+\dot\alpha)\dot\alpha-a_2(\alpha+\theta)(2+\dot\theta)\dot\theta]=\\ 2e(1+\dot\theta)\sin\nu-k_1(\dot\theta-\dot\theta_p)\\ a_1\ddot\alpha-a_2[3(1+a_1)+a_1(2+\dot\alpha)\dot\alpha+\\ (2+\dot\theta)\dot\theta](\theta-\alpha)=\\ 2a_1e(1+\dot\alpha)\sin\nu-k_2(\dot\alpha-\dot\alpha_p)\end{gathered}\tag{12}$$

式中 α_p 和 θ_p 是已知的周期运动，k_1 和 k_2 为控制增益。当系统做周期运动时，$\dot\alpha=\dot\alpha_p$ 和 $\dot\theta=\dot\theta_p$，此时控制项 $k_1(\dot\theta-\dot\theta_p)$ 和 $k_2(\dot\alpha-\dot\alpha_p)$ 消失。

同样可采用Floquet 理论研究受控系统的稳定性。图9给出了系统参数 a_1 取0.001 和 a_2 取0.01，控制参数 $k_1=k_2=0.2$ 时受控系统单值矩阵特征值随轨道偏心率的变化曲线。图9表明特征值的模在区间[0，0.6]上均小于1且各特征值互异，即系统渐近稳定。例如，采用同上的系统参数与控制参数，在 $e=0.3$ 时，选取周期运动初始条件 $\theta_0=0$，$\alpha_0=0$，$\dot\theta_0=-0.127\,4$，$\dot\alpha_0=-0.226\,9$，对加入控制的系统仿真可得第10个轨道周期到第1 000个轨道周期上的俯仰周期运动，如图10所示。进一步，若令 $e=0.1$ 和 $k_1=k_2=k$，则可计算受控系统单值矩阵所有特征值最大模随控制变量 k 的变化，如图11所示。图11表明，随 k 值逐渐增加，单值矩阵特征值最大模迅速减小，系统更快地趋于稳态。然而，过大的 k 值意味需要更高的控制输入能量。

当系统参数 $a_1=0.005$ 和 $a_2=0.018$，$e=0.31$ 时，则俯仰运动进入混沌。此时，选取初始条件(0，0，0)，控制参数 $k_1=k_2=0.2$，在仿真到第10个轨道周期时启动镇定控制，得到俯仰运动的时间历程如图12所示。从图中可见，受控后的系统经历约3个轨道周期后混沌运动最终被镇定到周期运动上。

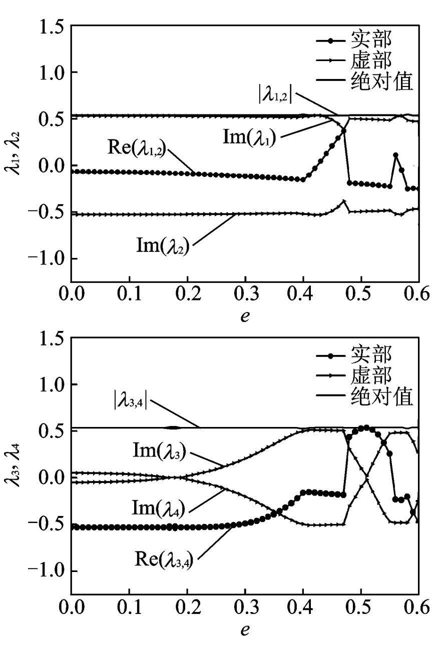


图9　受控系统单值矩阵特征值随偏心率的变化

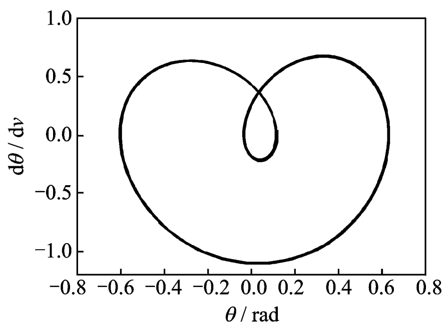


图10　受控系统周期运动

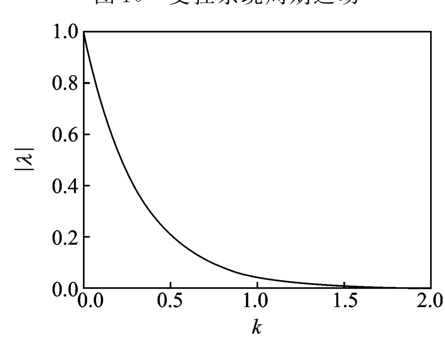


图11　单值矩阵特征值最大模随 k 的变化

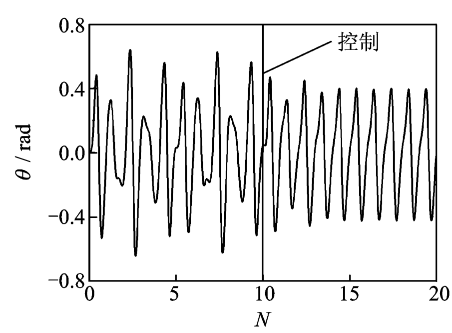


图12　混沌到周期运动的镇定

5 结束语

考虑姿态的绳系卫星非线性动力学研究表明，当轨道偏心率较小时，状态保持阶段绳系卫星系统存在稳定的周期运动；随着轨道偏心率的增加，该周期运动变得不稳定。当计入卫星本体姿态时，姿态和俯仰运动耦合可产生复杂的非线性动力学行为，如多个概周期运动并存的复杂运动和混沌现象。采用基于线性速度反馈控制可使混沌运动被镇定到一周期轨道上。

参考文献：

[1] Wen H, Jin D P, Hu H Y. Advances in dynamics and control of tethered satellite systems [J]. Acta Mechanica Sinica, 2008, 24(3):229-241.

[2] Kumar K D. Review of dynamics and control of non-electrodynamic tethered satellite systems [J]. Journal of Spacecraft and Rockets, 2006, 43(4):705-720.

[3] Modi V J, Lakshmanan P K, Misra A K. Dynamics and control of tethered spacecraft: A brief overview [C]// AIAA Dynamics Specialist Conference. Long Beach, California, USA: AIAA, 1990.

[4] Fujii H A, Ichiki W. Nonlinear dynamics of the tethered subsatellite system in the station keeping phase [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1997, 20(2):403-406.

[5] Misra A K, Nixon M S, Modi V J. Nonlinear dynamics of two-body tethered satellite systems: Constant length case [J]. Journal of the Astronautical Sciences, 2001, 49(2):219-236.

[6] Peláez J, Lorenzini E C, Ruiz M, et al. A new kind of dynamic instability in electrodynamic tethers [J]. Journal of Astronautical Sciences, 2000, 48(4):449-476.

[7] Nakanishi K, Kojima H, Watanabe T. Trajectories of in-plane periodic solutions of tethered satellite system projected on van der pol planes [J]. Acta Astronautica, 2011, 68(7/8):1024-1030.

[8] He Y, Liang B, Xu W F. Study on the stability of tethered satellite system [J]. Acta Astronautica, 2011, 68(11/12):1164-1172.

[9] 朱仁璋，雷达，林华宝. 绳系卫星系统复杂模型研究[J]. 宇航学报，1999，20(3):7-12.
Zhu Renzhang, Lei Da, Lin Huabao. A sophisticated dynamical model of tethered satellite systems [J]. Journal of Astronautics, 1999, 20(3):7-12.

[10] 王晓宇，金栋平. 计入姿态的绳系卫星概周期运动[J]. 振动工程学报，2010，23(4):361-365.
Wang Xiaoyu, Jin Dongping. Quasi-periodic motion of a tethered subsatellite with attitude [J]. Journal of Vibration Engineering, 2010, 23(4):361-365.

[11] Ashenberg J, Lorenzini E C. Active gravity-gradient stabilization of a satellite in elliptic orbits [J]. Acta Astronautica, 1999, 45(10):619-627.

[12] Nayfeh A H, Balachandran B. Applied nonlinear dynamics [M]. Weinheim: Wiley-VCH Verlag, 1995: 158-172.

[13] Peláez J, Lorenzini E C. Libration control of electrodynamic tethers in inclined orbit [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2005, 28(2):269-279.