

压电体表面 Maxwell 应力对断裂的效应

高存法 孟礼成

(南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室, 南京, 210016)

摘要:研究了压电固体外表面 Maxwell 应力和裂纹内表面 Maxwell 应力对断裂的效应。采用复变函数理论与 Stroh 公式, 理论分析了半穿透裂纹内外环境介质对电场、裂纹张开位移以及裂纹应力强度因子的影响, 并通过数值算例讨论了在纯电场作用下以及在力-电耦合载荷作用下裂纹的扩展行为。结果表明, 压电体表面的 Maxwell 应力对裂纹的扩展有重要的影响。

关键词:压电材料; 裂纹; Maxwell 应力; 复变函数法

中图分类号: O343 **文献标识码:** A **文章编号:** 1005-2615(2012)05-0652-05

Effects of Surface Maxwell Stress on Fracture of Piezoelectric Solids

Gao Cunfa, Meng Licheng

(State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures,
Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China)

Abstract: Effects of surface Maxwell stresses on the fracture of a piezoelectric solid with a crack is studied. Based on complex function method combined with Stroh formalism, the influences of dielectrics in the surrounding space and inside the crack on the electric fields, crack opening and field intensity factors are investigated, respectively. And then numerical examples are presented under pure electric loading and combined mechanical-electric loading to discuss the fracture behaviors of the solid. It is shown that the surface Maxwell stresses play an important role in the fracture of the piezoelectric solid.

Key words: piezoelectric solid; crack; Maxwell stress; complex function method

根据经典电磁学理论, 当含有界面的电介质置于静电场中时, 在其界面上将产生束缚电荷^[1]。在电场的作用下, 束缚电荷将在界面上产生静电力。在静电学中, 这种界面静电力称为 Coulomb 力; 而在连续介质场理论中, 场量通常是用 Maxwell 方程来定义的, 因此这种静电力一般又称为 Maxwell 应力^[2-3]。在工程实际中, 结构或材料内的界面是普遍存在的: 在宏观尺度, 如智能元器件与基体结构之间的界面, 或材料内部的夹杂缺陷与基体材料之间的界面等; 在微观尺度, 如铁电材料中的晶界或畴壁等均可看做界面。在断裂力学研究中, 有一种特殊的界面需要特别的重视, 这就是固体电介质与真空、气体或液体之间的界面。这种界面通常又称为

固体的表面, 此时界面上的静电力常称之为固体表面的 Maxwell 应力。

近几年来, 针对电磁固体内部或表面 Maxwell 应力问题的研究引起了人们的极大兴趣。例如, Gao 等^[4]研究了 Coulomb 力对压电材料断裂的影响; Landis^[5]从能量的角度讨论了机电断裂中边界条件问题; McMeeking 和 Landis^[6]探讨了静电力和存储能量对可变形电介质的影响; Nilsson 等^[7]研究了永磁发电机气隙中的电磁力问题; Choi 等^[8]基于虚拟气隙理论给出了电磁体力的计算方法; Vu 和 Steinmann^[9]讨论了材料和空间环境对非线性静电-磁耦合场的影响; Sanchez 等^[10]提出了线性永磁材料中的磁力方程的一般表达式; Ri-

基金项目: 国家自然科学基金(10972103, 11232007)资助项目; 教育部博士点基金(20093218110004)资助项目。

修订日期: 2012-09-15

通讯作者: 高存法, 男, 特聘教授, 博士生导师, E-mail: cfgao@nuaa.edu.cn。

coeur 和 Kuna^[11]研究了裂纹表面的静电牵引力及其对压电材料断裂的影响;Mansuripur^[12]讨论了电介质中电磁力和扭矩问题;Suo 等^[13]提出一种针对可变形电介质的非线性场理论;Li 和 Chen^[14]探讨了库伦力对压电材料断裂的影响;Ricoeur 和 Kuna^[15]探讨了电介质界面牵引力与裂纹边界条件之间的关系;Bustamante 等^[16]研究了非线性电弹固体中的电体力与 Maxwell 应力。

上述研究工作虽然考虑了裂纹内表面的 Maxwell 应力,但对于压电固体外表面的 Maxwell 应力以及环境介质的效应鲜有考虑。本文以含半穿透裂纹的压电固体为例,重点探讨了压电固体外表面和裂纹内表面的 Maxwell 应力对压电材料断裂的效应;同时探讨了压电固体外部环境介质与裂纹内部所含介质对材料断裂行为的影响。

1 基本方程

如图 1 所示,含有一个直线裂纹的压电固体被置于电场中,其中假设固体外周围环境介质的介电常数为 ϵ_{v1} ,裂纹内部介质的介电常数为 ϵ_{v2} 。在外加机械载荷 σ_{22}^∞ 和电载荷 D_2^∞ 共同作用下,可在裂纹内部诱发高电场。因此,在固体的外表面和裂纹内表面将分别产生分布的表面 Maxwell 应力 σ_{22}^M 和 σ_{22c}^M ,其中 σ_{22c}^M 与外加电场有关和外部介质的介电常数有关,而 σ_{22c}^M 与裂纹内部的电场和裂纹内部介质的介电常数有关。

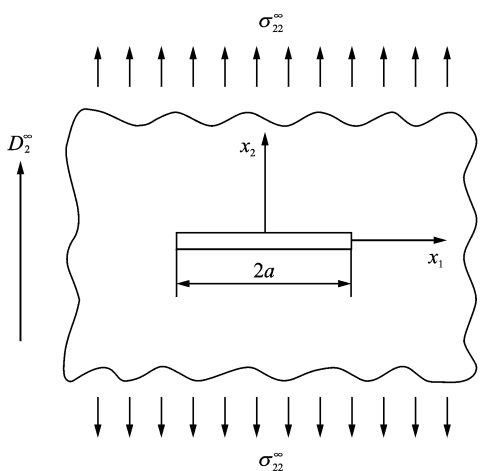


图 1 含裂纹压电固体受力-电载荷加载图

对于二维平面问题,在笛卡尔直角坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 下,所有场量都与 x_3 无关。在此情况下,广义位移矢量 \mathbf{u} 以及广义应力函数 ϕ 可表示为如下形式

$$\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3, \varphi]^T, \quad \phi = [\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4]^T \quad (1)$$

式中:上标 T 表示转置; u_j 为位移分量; φ 为电势; ϕ_j 为应力分量。

在一般情况下, \mathbf{u} 和 ϕ 的通解为^[17]

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}f(z) + \overline{\mathbf{A}}\overline{f(z)} \quad (2)$$

$$\phi = \mathbf{B}f(z) + \overline{\mathbf{B}}\overline{f(z)} \quad (3)$$

式中: \mathbf{A}, \mathbf{B} 为已知常量矩阵; $f(z)$ 为未知复变函数; $z = x + iy$ 为复数变量。

一旦通过给定的边界条件求得 $f(z)$, 那么应力 σ_{ij} 和电位移 D_j 为

$$\Sigma_2 = [\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}, D_2]^T = \phi_1 \quad (4)$$

$$\Sigma_1 = [\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, D_1]^T = -\phi_2$$

将式(2,3)对 x_1 求导,得到

$$u_1 = \mathbf{A}F(z) + \overline{\mathbf{A}}\overline{F(z)} \quad (5)$$

$$\phi_1 = \mathbf{B}F(z) + \overline{\mathbf{B}}\overline{F(z)} \quad (6)$$

式中

$$F(z) = \frac{df(z)}{dz}$$

由式(6)得到广义应力的边界条件为

$$\mathbf{B}F(z) + \overline{\mathbf{B}}\overline{F(z)} = \phi_1(z) \quad (7)$$

式中

$$\phi_1(z) = [0, \sigma_{22c}^M, 0, D_2^0] \quad z \in [-a, +a] \quad (8)$$

$$\phi_1(z) = [0, \sigma_{22}^\infty + \sigma_{22\infty}^M, 0, D_2^\infty] \quad z \rightarrow \infty \quad (9)$$

省去数学细节,式(7)在边界条件(8,9)下的解可给出解析的表达式,由此可获得如下结果。

裂纹上下表面的电势差

$$\Delta\phi = \left[H_{42} \left(\sigma_{22}^\infty + \frac{(D_2^\infty)^2}{2\epsilon_{v1}} - \frac{(D_2^0)^2}{2\epsilon_{v2}} \right) + H_{44}(D_2^\infty - D_2^0) \right] \sqrt{a^2 - x_1^2} \quad (10)$$

裂纹张开位移

$$\Delta u_2 = \left[H_{22} \left(\sigma_{22}^\infty + \frac{(D_2^\infty)^2}{2\epsilon_{v1}} - \frac{(D_2^0)^2}{2\epsilon_{v2}} \right) + H_{24}(D_2^\infty - D_2^0) \right] \sqrt{a^2 - x_1^2} \quad (11)$$

场强度影因子

$$K_1(a) = \sqrt{\pi a} \left[\sigma_{22}^\infty + \frac{(D_2^\infty)^2}{2\epsilon_{v1}} - \frac{(D_2^0)^2}{2\epsilon_{v2}} \right] \quad (12)$$

$$K_D(a) = \sqrt{\pi a} [D_2^\infty - D_2^0] \quad (13)$$

式中: $H_{22}, H_{24}, H_{42}, H_{44}$ 为已知常量,由压电材料的材料常数决定; K_1 和 K_D 分别为应力强度因子与电位移强度因子; D_2^0 为裂纹内部的电位移分量,待 定。无穷远处的 Maxwell 应力 $\sigma_{22\infty}^M$ 和沿着裂纹表面分布的 Maxwell 应力 σ_{22c}^M 分别为

$$\sigma_{22\infty}^M = \frac{(D_2^\infty)^2}{2\epsilon_{v1}}, \quad \sigma_{22c}^M = \frac{(D_2^0)^2}{2\epsilon_{v2}} \quad (14)$$

对于半穿透裂纹,裂纹表面的电边界条件为^[18]

$$D_2^0(u_2^+ - u_2^-) = -\epsilon_{v2}(\phi^+ - \phi^-) \quad (15)$$

将式(10,11)代入(15),得到

$$D_2^0 \left[H_{22} \left(\sigma_{22}^\infty + \frac{(D_2^\infty)^2}{2\epsilon_{v1}} - \frac{(D_2^0)^2}{2\epsilon_{v2}} \right) + H_{24}(D_2^\infty - D_2^0) \right] = -\epsilon_{v2} \left[H_{42} \left(\sigma_{22}^\infty + \frac{(D_2^\infty)^2}{2\epsilon_{v1}} - \frac{(D_2^0)^2}{2\epsilon_{v2}} \right) + H_{44}(D_2^\infty - D_2^0) \right] \quad (16)$$

式(16)可写为

$$\begin{aligned} & (D_2^0)^3 + \frac{3\epsilon_{v2}H_{24}}{H_{22}}(D_2^0)^2 - \left[\left(2\epsilon_{v2}\sigma_{22}^\infty + \frac{\epsilon_{v2}(D_2^\infty)^2}{\epsilon_{v1}} \right) + \frac{2\epsilon_{v2}H_{24}D_2^\infty + 2\epsilon_{v2}^2H_{44}}{H_{22}} \right] D_2^0 \\ & - \left[\frac{2\epsilon_{v2}^2H_{24}}{H_{22}} \left(\sigma_{22}^\infty + \frac{(D_2^\infty)^2}{2\epsilon_{v1}} \right) + \frac{2\epsilon_{v2}^2H_{44}}{H_{22}} D_2^\infty \right] = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

式中 $H_{42} = H_{24}$ 。

式(17)为关于 D_2^0 的三次方程,可按三次方程的通解公式计算得到 D_2^0 。在所求得的3个根中,只有一个满足裂纹张开位移大于等于零。按此条件求得符合实际物理意义的根,进而可求出裂纹强度因子等其他物理量。

当仅有外加电场 D_2^∞ 作用,且 $\epsilon_{v1} = \epsilon_{v2}$ 时,式(16,17)可简化为

$$(D_2^\infty - D_2^0)f(D_2^0) = 0 \quad (18)$$

式中

$$\begin{aligned} f(D_2^0) &= \frac{H_{22}}{2\epsilon_{v1}}(D_2^0)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{H_{22}D_2^\infty}{\epsilon_{v1}} + H_{24} \right) D_2^0 + \left(H_{24} + \epsilon_{v1}H_{44} + \frac{1}{2}H_{24}D_2^\infty \right) \end{aligned} \quad (19)$$

式(18)的实根为

$$D_2^0 = D_2^\infty \quad (20)$$

将(20)代入(11,13),得到

$$\Delta u_{2\max} = 0, \quad K_I = 0, \quad K_D = 0 \quad (21)$$

所以在只有外加电场作用下,当 $\epsilon_{v1} = \epsilon_{v2}$ 时裂纹不会张开。

当外加电场 D_2^∞ 给定,然后施加机械载荷 σ_{22}^∞ 时,由条件

$$\begin{aligned} \Delta u_{2\max} &= \left[H_{22} \left(\sigma_{22}^\infty + \frac{(D_2^\infty)^2}{2\epsilon_{v1}} - \frac{(D_2^0)^2}{2\epsilon_{v2}} \right) + H_{24}(D_2^\infty - D_2^0) \right] a \geq 0 \end{aligned} \quad (22)$$

求得

$$\sigma_{22}^\infty \geq \frac{(D_2^0)^2}{2\epsilon_{v2}} - \frac{(D_2^\infty)^2}{2\epsilon_{v1}} + \frac{H_{24}}{H_{22}}(D_2^\infty - D_2^0) \quad (23)$$

式(23)表明:当外加电场 D_2^∞ 给定时,机械载荷 σ_{22}^∞ 需达到特定的值裂纹才会张开。

2 数值算例

取裂纹长度为 $a = 1$ cm,真空中的介电常数为 $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$,压电材料为 PZT-5H,其 Irwin 参数矩阵为^[5]

$$\begin{bmatrix} H_{22} & H_{24} \\ H_{42} & H_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.803 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{N} & 0.639 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{C} \\ 0.639 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{C} & -2.289 \times 10^7 \text{ Vm}/\text{C} \end{bmatrix}$$

下面讨论3种情形。

情形1 无穷远处的介质为空气 ($\epsilon_{v1} \approx \epsilon_0$),裂纹内部介质为二氧化碳 ($\epsilon_{v2} = 1.6\epsilon_0$);

情形2 无穷远处的介质为二氧化碳,裂纹内部介质为二氧化碳 ($\epsilon_{v1} = \epsilon_{v2} = 1.6\epsilon_0$);

情形3 无穷远处的介质为二氧化碳 ($\epsilon_{v1} = 1.6\epsilon_0$),裂纹内部介质为空气 ($\epsilon_{v2} \approx \epsilon_0$)。

图2~4给出了在给定电载荷 $D_2^\infty = 0.01 \text{ C}/\text{m}^2$ 的条件下, D_2^0 , $\Delta u_{2\max}$ 和 K_I 随外加机械载荷的变化规律。可发现:当机械载荷逐渐增加时,3种情形下得到的 D_2^0 都逐渐下降;此外,在相同的机械载荷下,情形2得到的 D_2^0 大于情形1得到的 D_2^0 ,但随着机械载荷的增加,彼此间的差距迅速减小;对于裂纹张开位移而言,情形1下的 $\Delta u_{2\max}$ 大于情形3下的 $\Delta u_{2\max}$,而情形3下的 $\Delta u_{2\max}$ 又大于情形2下的 $\Delta u_{2\max}$,但差别不是很大。对于裂纹强度因子而言,则是情形1下的 K_I 大于情形2下的 K_I ,而情形2下的 K_I 又大于情形3下的 K_I ,且情形2与情形3的差别随着机械载荷的增加而迅速减小。特别需要指出的是,对情形2而言,在机械载荷小于某一值时,裂纹不会张开。

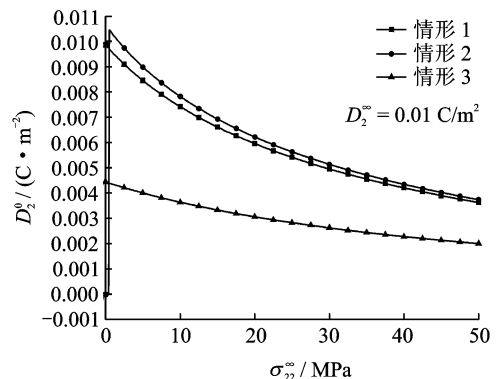


图2 给定 $D_2^\infty = 0.01 \text{ C}/\text{m}^2$ 下, D_2^0 随机械载荷的变化

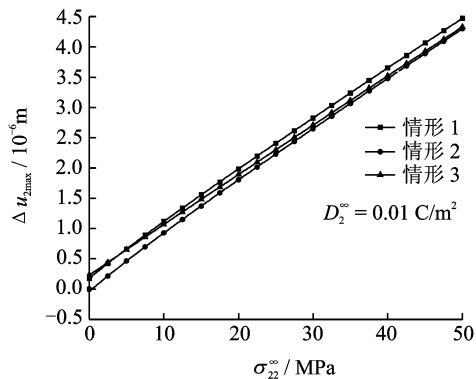


图3 给定 $D_2^\infty = 0.01 \text{ C/m}^2$ 下, $\Delta u_{2\max}$ 随机械载荷的变化

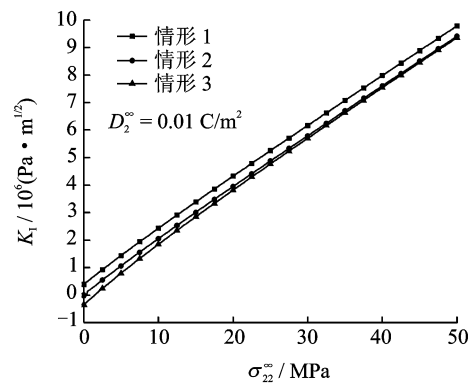


图4 给定 $D_2^\infty = 0.01 \text{ C/m}^2$ 下, K_I 随机械载荷的变化

图5~7给出了在给定机械载荷 $\sigma_{22}^\infty = 20 \text{ MPa}$ 的条件下, D_2^0 , $\Delta u_{2\max}$ 和 K_I 随外加电载荷的变化规律。可发现:当电载荷逐渐增加时,3种情形下得到的 D_2^0 都逐渐增加;此外,在相同的机械载荷下,情形2得到的 D_2^0 大于情形1得到的 D_2^0 ,但随着机械载荷的增加,彼此的差距逐渐增大;对于裂纹张开位移而言,情形1下的 $\Delta u_{2\max}$ 大于情形3下的 $\Delta u_{2\max}$,而情形3下的 $\Delta u_{2\max}$ 又大于情形2下的 $\Delta u_{2\max}$,差别随电载荷的增加而逐渐增大。对于裂纹强度因子而言,则是情形1下的 K_I 大于情形2下的 K_I ,而情形2下的 K_I 又大于情形3下的 K_I ,其差别也是随电载荷的增加而逐渐增大。

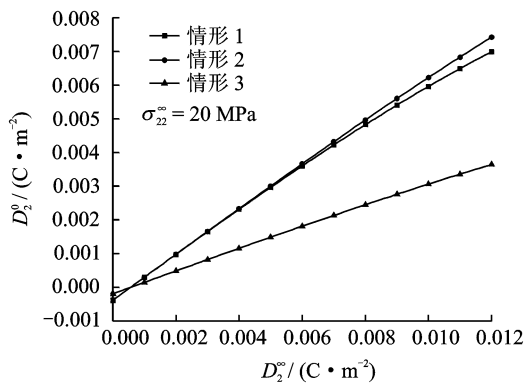


图5 给定 $\sigma_{22}^\infty = 20 \text{ MPa}$ 下, D_2^0 随电载荷的变化

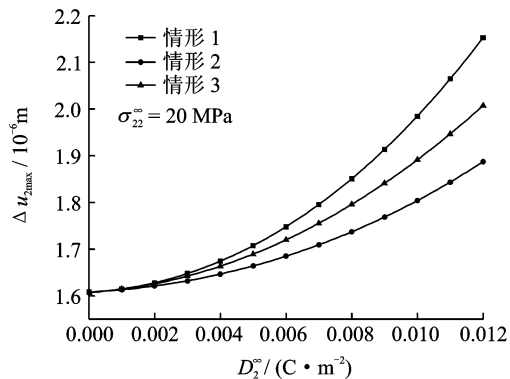


图6 给定 $\sigma_{22}^\infty = 20 \text{ MPa}$ 下, $\Delta u_{2\max}$ 随电载荷的变化

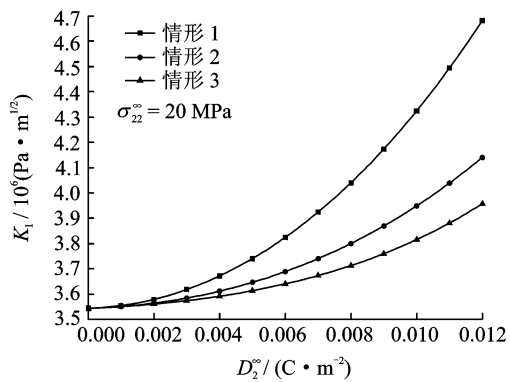


图7 给定 $\sigma_{22}^\infty = 20 \text{ MPa}$ 下, K_I 随电载荷的变化

图8~10给出了在纯电场作用下(即使 $\sigma_{22}^\infty = 0 \text{ MPa}$), D_2^0 , $\Delta u_{2\max}$ 和 K_I 随外加电载荷的变化规律。可发现:当内外介质相同时,在纯电场作用下,裂纹不会张开。将此与图5~7对比发现:机械载荷产生的裂纹张开位移比纯电场产生的裂纹张开位移高出10倍,说明机械载荷的影响相对显著。对比图8~10与图5~7还表明:情形1的 $\Delta u_{2\max}$ 和 K_I 不一定就大于情形3的 $\Delta u_{2\max}$ 和 K_I ,它们与内外介质的介电常数和 D_2^0 有关。

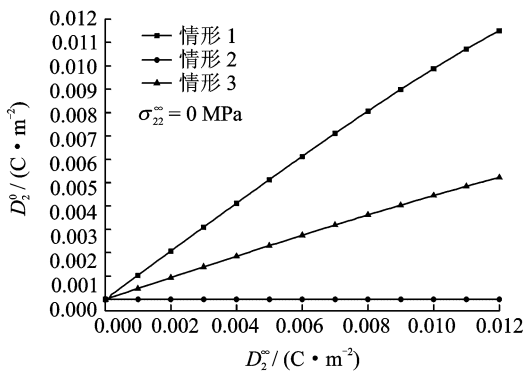


图8 给定 $\sigma_{22}^\infty = 0 \text{ MPa}$ 下, D_2^0 随电载荷的变化

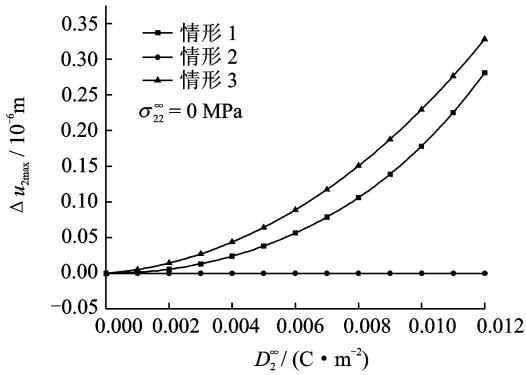


图9 给定 $\sigma_{22}^{\infty} = 0$ MPa 下, $\Delta u_{2\max}$ 随电载荷的变化

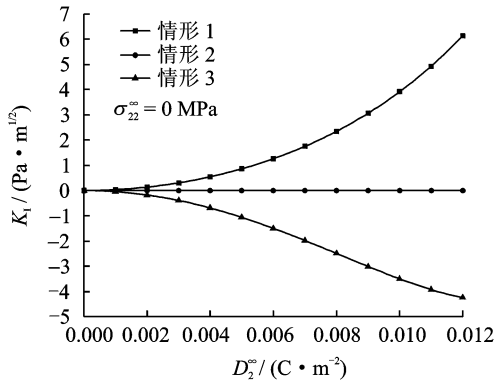


图10 给定 $\sigma_{22}^{\infty} = 0$ MPa 下, K_I 随电载荷的变化

3 结束语

利用复变函数法与 Stroh 公式分析了表面 Maxwell 应力对压电固体断裂行为的影响,特别是探讨了在压电固体外表面与裂纹内表面 Maxwell 应力同时作用下裂纹的扩展特性。结果表明:(1)在纯电载荷 D_2^{∞} 作用下,当 $\epsilon_{v1} = \epsilon_{v2}$ 时,裂纹不会张开;但如果只考虑裂纹外表面 Maxwell 应力,在纯电场作用下裂纹也会张开。(2)在纯电载荷 D_2^{∞} 作用下,当 $\epsilon_{v1} \neq \epsilon_{v2}$ 时,裂纹最大张开位移可随着 D_2^{∞} 由零逐渐增加而增大。(3)在给定外加电场的情况下,当 $\epsilon_{v1} = \epsilon_{v2}$ 时,外加机械载荷须达到某一临界值时裂纹才会张开。

参考文献:

[1] Pollack G L, Stump D L. Electromagnetism [M]. Beijing: Higher Education Press, 2005.
 [2] Rinaldi C, Brenner H. Body versus surface forces in continuum mechanics; Is the Maxwell stress tensor a physically objective Cauchy stress[J]. Physical Review E, 2002, 65(3):1-14.
 [3] McMeeking Robert Maxwell. A Maxwell stress for material interactions[J]. Journal of Colloid and Interface Science, 1998, 199(2): 187-196.
 [4] Gao C F, Tong P, Zhang T Y. Effect of columbic

force on piezoelectric fracture [J]. Advances in Fracture and Failure Prevention, 2004, 261/263: 81-86.

[5] Landis C M. Energetically consistent boundary conditions for electromechanical fracture [J]. International Journal of Solids and Structures, 2004, 41 (22/23): 6291-6315.
 [6] McMeeking R M, Landis C M. Electrostatic forces and stored energy for deformable dielectric materials [J]. Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME, 2005, 72: 581-590.
 [7] Nilsson K, Danielsson O, Leijon M. Electromagnetic forces in the air gap of a permanent magnet linear generator at no load [J]. Journal of Applied Physics, 2006, 99(3): 034505-034505-5.
 [8] Choi H S, Park I H, Lee S H. Electromagnetic body force calculation based on virtual air gap[J]. Journal of Applied Physics, 2006, 99(8): 08H903-08H903-3.
 [9] Vu D K, Steinmann P. Nonlinear electro-and magneto-elastostatics: Material and spatial settings[J]. International Journal of Solids and Structures, 2007, 44(24): 7891-7905.
 [10] Sánchez Grandia R, Aucejo Galindo V, Usieto Galve A, et al. General formulation for magnetic forces in linear materials and permanent magnets [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2008, 44 (9): 2134-2140.
 [11] Ricoeur A, Kuna M. Electrostatic tractions at crack faces and their influence on the fracture mechanics of piezoelectrics [J]. International Journal of Fracture, 2009, 157(1/2): 3-12.
 [12] Mansuripur M. Electromagnetic force and torque in ponderable media [J]. Optics Express, 2008, 16 (19): 14821-14835.
 [13] Suo Z G, Zhao X H, Greene W H. A nonlinear field theory of deformable dielectrics[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2008, 56(2): 467-486.
 [14] Li Q, Chen Y H. Why traction-free? Piezoelectric crack and Coulombic traction [J]. Archive of Applied Mechanics, 2008, 78(7): 559-573.
 [15] Ricoeur A, Kuna M. Electrostatic tractions at dielectric interfaces and their implication for crack boundary conditions [J]. Mech Res Communications, 2009, 36(3): 330-335.
 [16] Bustamante R, Dorfmann A, Ogden R W. On electric body forces and Maxwell stresses in nonlinearly electroelastic solids[J]. International Journal of Engineering Science, 2009, 47(11/12): 1131-1141.
 [17] Ting T C T. Anisotropic elasticity theory and applications [M]. New York: Oxford University Press, 1996.
 [18] Hao T H, Shen Z Y. A new electric boundary condition of electric fracture mechanics and its applications [J]. Engineering Fracture Mechanics, 1994, 47(6): 793-802.