

# 模拟 Lamb 波在板结构中传播的新型谱板单元

王鑫伟 王峰 徐春铃 葛路遥

(南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室,南京,210016)

**摘要:** 为了进一步提高时域谱有限元法模拟 Lamb 波在板结构中传播的计算效率,建立了一种能够模拟 Lamb 波三维传播特性的二维时域谱有限板单元。首次采用了具有 Lebesgue 最优性质的节点分布形式和扩展位移场,每个节点有 6 个自由度。形成单元集中质量矩阵时采用一种简单的方法,得到的结果与将一致质量矩阵行相加后的结果相同。研究表明,新单元的性能与常用的两种性能优异的时域谱有限元相当;而且由于其质量矩阵的积分计算量少、稳定积分的临界时间步长大,并且能够模拟 Lamb 波在板结构中传播的三维特性,所以计算效率得到了明显的提高。

**关键词:** 谱板单元; Lamb 波; 计算效率; 条件数; 临界时间步长

**中图分类号:** O347.4      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1005-2615(2012)05-0645-07

## New Spectral Plate Element for Simulating Lamb Wave Propagations in Plate Structures

Wang Xinwei, Wang Feng, Xu Chunling, Ge Luyao

(State Key Laboratory of Mechanics and Control Mechanical Structures, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China)

**Abstract:** To further increase the computational efficiency of the time domain spectral finite element method for modeling Lamb wave propagation in plate-like structures, a novel 2-D spectral plate element is proposed which can model the 3-D behavior of Lamb wave propagations. The nodal distribution of the element possesses Lebesgue optimal property and the extended displacement field is adopted in the formulations. Each node has 6 degrees of freedom. The diagonal mass matrix is obtained by using a simple method, equivalent to the row summation of a consistent mass matrix. Results reveal that the proposed spectral plate element has similar behavior as the two widely used spectral elements. Moreover, its computational efficiency is raised due to smaller effort in formulation of the mass matrix, larger critical time step and the ability to model the 3-D behavior of Lamb wave propagation in plates.

**Key words:** spectral plate element; Lamb wave; computational efficiency; condition number; critical time step

随着计算机技术的发展,数值模拟已与实验一样在科学研究中发挥着越来越重要的作用。例如,通过对 Lamb 波在结构中传播的数值模拟可以加深对 Lamb 波遇到损伤后的散射特性的了解,从而为正确解释传感器测量到的信号中所包含的结构损伤特征参数(损伤位置、大小或程度、形状等)的信息提供依据,继而为设计出合适的基于 Lamb 波

的结构健康检测系统提供参考<sup>[1-3]</sup>。在缺少无损结构系统的量测信号的情况下,精确模拟得到的结果甚至有可能直接作为参考信号来使用。

由于有功能强大的商用软件的支持,目前有限元法是数值模拟中使用最广泛的计算工具。但是,由于检测损伤所激发的 Lamb 波的波长至多只有几毫米,因此,采用常规的有限元法来模拟 Lamb

**基金项目:** 国家自然科学基金重点基金(50830201)资助项目;江苏高校优势学科建设工程资助项目。

**修订日期:** 2012-05-02

**通讯作者:** 王鑫伟,男,教授,博士生导师,E-mail:wangx@nuaa.edu.cn。

波在结构中的传播问题将耗费大量的计算资源(计算时间和存储空间),甚至所需的计算资源有可能大到不切实际的地步<sup>[1]</sup>。因此,虽然 Lamb 波遇到损伤后的散射特性在实验中非常容易测量到<sup>[4]</sup>,但是要通过有限元数值模拟来准确地捕捉波遇到损伤后的散射特性却十分困难。

时域谱有限元法(简称谱单元法)具有谱方法的高效性和有限元方法的灵活性,收敛速度快,所需的计算时间和存储空间均要比常规有限元法要少一个数量级或者更多,因此,其在模拟结构中 Lamb 波的传播方面有着明显的优势,所以是目前最常用的数值模拟方法。目前,采用的谱单元通常有基于 Legendre 多项式和基于 Chebyshev 多项式两种<sup>[1-3,5-6]</sup>。

但是,即使采用效率高的时域谱有限元法,如果采用精细的三维模型进行模拟,计算资源仍然有可能大到不切实际的地步<sup>[1]</sup>。因此,如何提高计算效率和模拟精度仍然是计算力学界十分关注的一个问题<sup>[7-8]</sup>。

本文建立了一种能够模拟三维特性的二维时域谱有限板单元,该单元采用了具有 Lebesgue 最优性质的节点分布<sup>[9-10]</sup>形式和扩展位移场<sup>[11]</sup>,每个节点有 6 个自由度。单元集中质量矩阵采用一种简单的与行相加技术等同的方法获得。研究结果表明,虽然新单元的性能与常用的两种性能优异的谱有限元相当,但是,由于其质量矩阵的积分计算量少、稳定积分的临界步长大,所以其计算效率有了明显的提高。

## 1 新型谱板单元

### 1.1 扩展位移场

为了建立能够模拟三维特性的二维时域谱板单元,采用 Zak<sup>[11]</sup>提出的扩展位移场。坐标系建立在板中面上,其中  $x$ - $y$  是面内坐标系, $z$  轴沿厚度方向。则板的位移场为

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u_0(x,y) + z \cdot \Phi(x,y) \\ v(x,y,z) &= v_0(x,y) + z \cdot \Psi(x,y) \\ w(x,y,z) &= w_0(x,y) + z \cdot \Omega(x,y) \end{aligned} \quad (1)$$

式中: $u_0, v_0$  和  $w_0$  表示板中面上的位移分量,可以用板上下表面 3 个方向位移的平均值表示; $\Phi, \Psi$  与  $\Omega$  表示板上下表面 3 个方向位移的差在板厚上的平均值。具体表达式如下

$$\begin{aligned} u_0(x,y) &= \frac{u(x,y,h/2) + u(x,y,-h/2)}{2} \\ \Phi(x,y) &= \frac{u(x,y,h/2) - u(x,y,-h/2)}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_0(x,y) &= \frac{v(x,y,h/2) + v(x,y,-h/2)}{2} \\ \Psi(x,y) &= \frac{v(x,y,h/2) - v(x,y,-h/2)}{h} \\ w_0(x,y) &= \frac{w(x,y,h/2) + w(x,y,-h/2)}{2} \\ \Omega(x,y) &= \frac{w(x,y,h/2) - w(x,y,-h/2)}{h} \end{aligned} \quad (2)$$

式中  $h$  为板的厚度。

对于反对称变形的情况,位移场式(2)可退化到考虑一阶剪切变形板弯曲理论(例如 Mindlin 板理论)的位移场。

由式(2),几何方程可表示为

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + z \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \Psi \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \gamma_{zx} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + z \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \Phi \\ \epsilon_z &= \Omega, \gamma_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + z \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (3)$$

或者将式(3)简写为

$$\{\epsilon\} = \left( \left[ \frac{\partial}{\partial x} \right] + z \left[ \frac{\partial}{\partial x} \right] \right) \{q\} \quad (4)$$

式中:应变向量  $\{\epsilon\} = [\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy}]^T$ ; 广义位移向量  $\{q\} = [u_0, v_0, w_0, \Phi, \Psi, \Omega]^T$ ;  $\left[ \frac{\partial}{\partial x} \right]$  和  $\left[ \frac{\partial}{\partial x} \right]$  是微分算子矩阵。

物理方程为

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} \quad (5)$$

式中: $\{\sigma\} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{xy}]^T$ ;  $[D]$  为材料弹性矩阵。

与考虑一阶剪切变形板弯曲理论一样,考虑横向剪应力  $\tau_{yz}$  及  $\tau_{xz}$  时需要对其进行修正。以各向同性材料板为例,修正公式为

$$\tau_{yz} = \kappa G \gamma_{yz}, \tau_{xz} = \kappa G \gamma_{xz} \quad (6)$$

式中: $\kappa = 5/6$  或者  $\pi^2/12$  (Mindlin 板理论);  $G$  为剪切模量。所以有

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{\kappa(1-2\nu)}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{\kappa(1-2\nu)}{2(1-\nu)} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

对称

### 1.2 单元节点分布

单元节点分布形式对单元的性能和计算效率有至关重要的影响。研究表明,采用均匀分布节点得到的Lagrange高阶插值函数有“龙格”现象<sup>[12]</sup>,这直接导致了均匀分布节点的高阶单元的性能差,因此,其不适合模拟Lamb波在弹性介质中的传播;而几种采用非均匀分布节点得到的Lagrange高阶插值函数均没有“龙格”现象。文献[9]研究了7种Chebyshev类节点的性质,发现当采用显式积分求解时,Lebesgue最优点的稳定积分的临界时间步长(稳定积分所允许的最大时间步长)最大,这样可以提高逐步积分计算的效率。但是,由于真正的Lebesgue最优点的确定没有一般的解析表达式,应用起来很不方便,而扩展的Chebyshev点<sup>[10]</sup>近似具有与Lebesgue最优点类似的性质,所以本文建立的新型谱有限元的节点分布按扩展的Chebyshev点来确定。

以一维问题为例,扩展的Chebyshev点可按式(8)计算:

$$\xi_k = -\frac{\cos((2k-1)\pi/(2N))}{\cos(\pi/(2N))} \quad k = 1, 2, \dots, N; \xi \in [-1, 1] \quad (8)$$

式中: $\xi_k(k=1, 2, \dots, N)$ 为节点的量纲一坐标值; $N$ 为总的节点数。

### 1.3 单元刚度矩阵和集中质量矩阵

考虑 $N \times N$ 节点的等厚度谱单元,单元的厚度为 $h$ ,每个节点有6个自由度,即6个广义位移。图1给出了 $N=6$ 时单元的示意图,图中 $\xi, \eta$ 为量纲一坐标。单元的6个广义位移函数可以假设为

$$q_k(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N f_i(\xi) f_j(\eta) q_k(\xi_i, \eta_j) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N f_{ij}(\xi, \eta) q_k(\xi_i, \eta_j) \quad (k = 1, 2, \dots, 6) \quad (9)$$

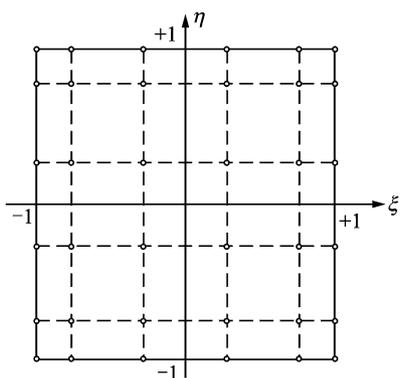


图1 板单元示意图

式中: $q_k(\xi_i, \eta_j)(k=1, 2, \dots, 6)$ 为单元的广义节点位移; $f_{ij}(\xi, \eta) = f_i(\xi) f_j(\eta)$ 为形状函数,其中 $f_i(\xi), f_j(\eta)$ 为Lagrange插值函数,可以由式(10)确定

$$f_i(\xi) = \prod_{k=1, k \neq i}^N \frac{\xi - \xi_k}{\xi_i - \xi_k} \quad i = 1, \dots, N$$

$$f_j(\eta) = \prod_{k=1, k \neq j}^N \frac{\eta - \eta_k}{\eta_j - \eta_k} \quad j = 1, \dots, N$$

式(9)可以简写为

$$\{q\} = [f(\xi, \eta)] \{\bar{q}\} \quad (11)$$

式中: $\{\bar{q}\}$ 为单元的广义节点位移向量; $[f(\xi, \eta)]$ 为形函数矩阵。

将式(11)代入式(4),有

$$\{\epsilon\} = \left( \left[ \frac{\partial}{\partial x} \right] + z \left[ \frac{\partial}{\partial x} \right] \right) [f] \{\bar{q}\} = ([B(\xi, \eta)] + z[\bar{B}(\xi, \eta)]) \{\bar{q}\} \quad (12)$$

由式(5,12),可得板单元的刚度矩阵为

$$[K]^e = \iiint_V ([B(\xi, \eta)] + z[\bar{B}(\xi, \eta)])^T [D] \cdot ([B(\xi, \eta)] + z[\bar{B}(\xi, \eta)]) dV = h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta + \frac{h^3}{12} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\bar{B}]^T [D] [\bar{B}] |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta = h \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N H_i H_j [B_{ij}(\xi_i, \eta_j)]^T [D] [B_{ij}(\xi_i, \eta_j)] \cdot |J(\xi_i, \eta_j)| + \frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N H_i H_j [\bar{B}_{ij}(\xi_i, \eta_j)]^T [D] [\bar{B}_{ij}(\xi_i, \eta_j)] |J(\xi_i, \eta_j)| \quad (13)$$

式中: $\xi_i, \eta_j$ 为高斯点的坐标值; $H_i, H_j$ 为相应的权重系数。

板单元的集中质量矩阵由式(14)确定

$$\begin{cases} m_{II}^e = \iint_A f_{kp}(\xi, \eta) \mu_L dA = \mu_L \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_{kp}(\xi, \eta) |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta \approx \mu_L \sum_{i=1}^{\bar{N}} \sum_{j=1}^{\bar{N}} H_i H_j f_{kp}(\xi_i, \eta_j) |J(\xi_i, \eta_j)| \\ k, p = 1, 2, \dots, N; \quad I = (k-1)N + p \\ m_{IJ}^e = 0 \quad I \neq J \end{cases} \quad (14)$$

式中: $\bar{N} = (N+1) \div 2$ ;  $\mu_L$ 与6个广义节点位移有关,对于各向同性材料的等厚度板,有

$$\mu_L = \begin{cases} \rho h & L = 1, 2, 3 \\ \rho h^3 / 12 & L = 4, 5, 6 \end{cases} \quad (15)$$

式中,  $L=1, 2, 3$  对应于 3 个线位移 ( $u_0, v_0, w_0$ ), 而  $L=4, 5, 6$  对应于余下的 3 个广义节点位移 ( $\Phi, \psi, \Omega$ )。

由于  $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N f_i(\xi) f_j(\eta) = 1$ , 所以式(14)得到的质量矩阵与一致质量矩阵按行相加后得到的结果是等同的。另外, 由于式(14)中采用高斯积分时所需要的点数  $\bar{N}$  大约是  $N$  的一半, 所以单元质量矩阵的积分计算量比现有最有效的基于 Legendre 多项式的谱单元还要减少 75% 左右。

由于采用了扩展位移场, 对于板上、下表面 3 个方向作用有任意载荷(对称、反对称及非对称载荷)的情况采用本文单元进行分析没有任何困难。换言之, 虽然本文单元是二维单元, 但是可以模拟 Lamb 波在板结构中传播的三维特性。

## 2 单元的性能与效率

单元的性能优劣与单元矩阵的条件数有很大的关系, 条件数低说明采用该单元进行求解时数值误差相对要小, 反之, 数值误差相对要大, 如果条件数太大, 甚至会得不到结果。此外, 计算效率还与临界时间步长有关。因此, 本节从单元矩阵的条件数

表 1 不同节点分布谱板单元临界时间步长

单元节点数( $N$ )	6	7	8	9	10	11
本文单元	0.198 74	0.175 92	0.150 68	0.124 31	0.103 93	0.086 71
Lobatto 单元	0.188 47	0.156 98	0.125 99	0.101 12	0.082 23	0.067 93
Chebyshev 单元	0.103 13	0.086 53	0.065 33	0.051 18	0.039 73	0.032 21
等距节点分布	0.074 84	0.014 78	—	—	—	—
一致质量矩阵	0.160 52	0.128 91	0.103 36	0.083 94	0.006 92	0.057 96

从表 1 的结果可以看出, 本文单元的临界时间步长是最大的, 其次是 Lobatto 单元, 接着是 Chebyshev 单元, 等距节点分布单元的临界时间步长最小, 如果采用显式积分求解运动方程则其效率是最差的。另外, 本文单元和 Lobatto 单元的临界时间步长均大于由一致质量矩阵确定的结果。本文单元临界时间步长大的优点随着单元节点数的增加或者单元尺寸的减小更加明显, 当  $N=11$  时,  $\Delta t_{cr}^{本文} / \Delta t_{cr}^L$  从 1.05 增加到 1.28; 而  $\Delta t_{cr}^{本文} / \Delta t_{cr}^{Ch}$  从 1.93 增加到 2.69; 以  $N=6$  为例, 当单元边长从 20 mm 减小到 10 mm 时,  $\Delta t_{cr}^{本文} / \Delta t_{cr}^L$  从 1.05 增加到 1.18; 而  $\Delta t_{cr}^{本文} / \Delta t_{cr}^{Ch}$  从 1.93 增加到 2.06, 这里的上标“本文, L, Ch”分别代表本文, Lobatto 和 Chebyshev 单元。

### 2.2 单元矩阵条件数

谱单元质量矩阵和刚度矩阵均为实对称矩阵。

和临界时间步长两个方面对新型谱单元的性能与效率进行研究, 并与现有的谱单元进行比较。采用的单元为  $N \times N$  节点的谱板单元, 尺寸为 20 mm  $\times$  20 mm  $\times$  2.5 mm。材料参数为  $E=72.7$  GPa,  $\nu=0.33$ ,  $\rho=2\ 700$  kg/m<sup>3</sup>。

### 2.1 临界时间积分步长

由于质量矩阵为对角矩阵, 所以一般均采用有条件稳定的显式积分来求解离散的运动方程。谱有限元模型建立后, 稳定积分的临界时间步长  $\Delta t_{cr}$  由模型中最小尺寸单元的刚度矩阵和质量矩阵确定。具体而言, 先由公式  $|\mathbf{[k]}^e - \omega^2 \mathbf{[M]}^e| = 0$  求出  $\omega$ , 找出最大的圆频率  $\omega_{max}^e$ ,  $\Delta t_{cr}$  可由式(16)来确定

$$\Delta t_{cr} = \frac{2}{\omega_{max}^e} \quad (16)$$

采用集中质量矩阵分别计算了 4 种不同节点分布  $N \times N$  谱板单元的临界时间步长  $\Delta t_{cr}$ , 结果如表 1 所示。对于等距节点分布单元, 当  $N \geq 8$  时集中质量矩阵出现了负值, 所以表 1 中没有给出相应的结果, 文献[13]也发现将等距节点分布单元的一致质量矩阵按行相加后出现了负值。由于采用一致质量矩阵来求临界时间步长时, 4 种不同节点分布单元的结果是一样的, 所以表 1 中只给出了 1 种结果。

实对称矩阵  $\mathbf{A}$  的条件数  $CN(\mathbf{A})$  定义为<sup>[6]</sup>

$$CN(\mathbf{A}) = \frac{\lambda_{max}(\mathbf{A})}{\lambda_{min}(\mathbf{A})} \quad (17)$$

式中,  $\lambda_{max}(\mathbf{A})$ ,  $\lambda_{min}(\mathbf{A})$  分别为实对称矩阵  $\mathbf{A}$  的最大和最小非零特征值。

本文分别计算了 4 种不同节点分布  $N \times N$  谱板单元的刚度矩阵的条件数  $CN(\mathbf{K})$  和集中质量矩阵的条件数  $CN(\mathbf{M})$ , 计算结果如图 2~4 所示, 其中图 3 的纵坐标采用的是对数坐标。由于等距节点分布单元 ( $N \geq 8$ ) 的集中质量矩阵会出现负值, 所以在图 2 中没有给出其相应结果; 另外, 为了清楚起见, 图 4 重新给出了另外 3 种单元刚度矩阵的条件数的变化情况。可以看出, 随着节点数的增加, 4 种节点分布的谱板单元矩阵的条件数均不断增加,  $N$  相同时等距节点分布的谱板单元矩阵条件数均

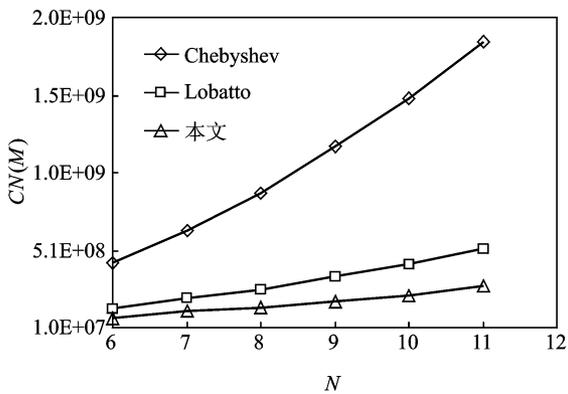


图2 3种单元集中质量矩阵条件数随节点数的变化曲线

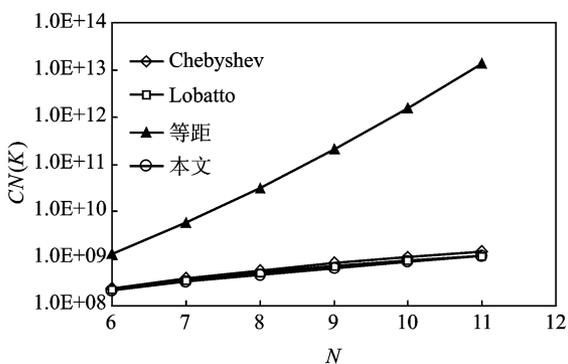


图3 4种单元刚度矩阵条件数随节点数的变化曲线

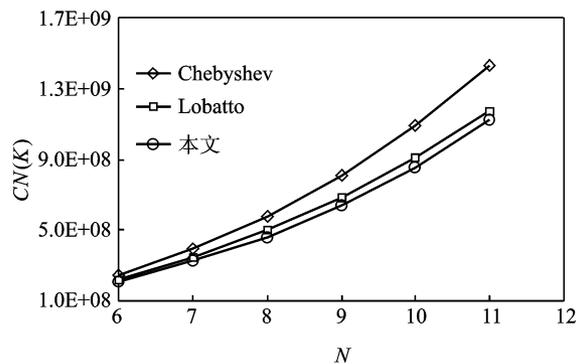


图4 3种单元刚度矩阵条件数随节点数的变化曲线

最大,其他3种单元矩阵条件数较为接近,相同节点情况下本文单元的条件数最低。 $N$ 从6增加到11时,等距节点分布的谱板单元由于其插值函数有“龙格”现象,所以其刚度矩阵的条件数骤增,增加了 $1.05 \times 10^4$ 倍,而其他3种单元的插值函数由于没有“龙格”现象,所以刚度矩阵和质量矩阵的条件数仅增加了约4倍和5倍。根据单元矩阵的条件数可以看出,本文建立的新单元的性能与常用的两种性能优异的时域谱单元相当,并且还略优于这两种常用的谱单元。

需要指出的是,虽然单元的尺寸一定时其质量矩阵和刚度矩阵的条件数会随节点数增加而增加,但是,节点数增加也会使得单元的插值误差减小,即单元节点数增加使得其模拟精度也得到了提高,加上谱单元有呈指数型增加的收敛速度的性质<sup>[13]</sup>,所以可以采用尺寸比节点数少的单元要大得多的单元来获得相同精度的模拟结果。

### 3 应用

采用时间域谱有限元法模拟 Lamb 波在板结构中传播时先将板结构用谱单元离散,离散后可得到如下的矩阵方程

$$[M]\{\ddot{Q}(t)\} + [K]\{Q(t)\} = \{F(t)\} \quad (18)$$

式中: $[M]$ , $[K]$ 分别为结构的质量矩阵和刚度矩阵; $t$ 为时间; $\{Q(t)\}$ 为结构的广义位移向量; $Q$ 上面的两个点表示对时间的二阶导数; $\{F(t)\}$ 为广义载荷向量。初始条件为 $\{Q(0)\} = \{0\}$ 和 $\{\dot{Q}(0)\} = \{0\}$ ,其中 $Q$ 上面的点表示对时间的一阶导数。

由于质量矩阵 $[M]$ 是对角阵, $[M]^{-1}$ 很容易得到,所以方程(18)可以用中心差分法进行求解,即

$$\frac{1}{\Delta t^2}[M]\{Q\}_{t+\Delta t} = \{F\}_t - \left([K] - \frac{2}{\Delta t^2}[M]\right)\{Q\}_t - \frac{1}{\Delta t^2}[M]\{Q\}_{t-\Delta t} \quad (19)$$

式中, $\Delta t (\leq \Delta t_{cr})$ 为时间步长。

由式(19)可得

$$\{Q\}_{t+\Delta t} = \Delta t^2 [M]^{-1} (\{F\}_t - [K]\{Q\}_t) + 2\{Q\}_t - \{Q\}_{t-\Delta t} \quad (20)$$

现考虑 Lamb 波在四边自由正方形铝板中的传播。材料参数  $E = 72.7 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.33$ ,  $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$ ;几何尺寸为  $1000 \text{ mm} \times 1000 \text{ mm} \times 2.5 \text{ mm}$ 。加载点在板的中心,激励信号采用汉宁窗与正弦信号的乘积,其中汉宁窗的频率为  $20 \text{ kHz}$ ,正弦信号的频率为  $100 \text{ kHz}$ ,即

$$F(t) = \begin{cases} \sin(2\pi t/10) \times (1 - \cos(2\pi t/50))/2 & 0 \leq t < 50 \\ 0 & t \geq 50 \end{cases} \quad (21)$$

式中 $t$ 的单位是 $\mu\text{s}$ 。

将板离散为  $50 \times 50$  个  $6 \times 6$  的新型谱单元。时间步长为  $\Delta t = 1.95 \times 10^{-7} \text{ s}$ ,小于稳定积分所要求的临界时间步长 ( $\Delta t_{cr} = 1.98 \times 10^{-7} \text{ s}$ ),模拟时间

$t \approx 0.15$  ms, 即 769 载荷步。虽然本文单元可以模拟任意载荷(对称、反对称及非对称载荷)情况,但是,由于篇幅限制,仅给出一种载荷作用时的模拟结果。加载方式为图5所示的一对沿厚度方向的反向载荷,该载荷可以激励出对称模式的 Lamb 波。需要强调的是,采用一般的二维板单元无法模拟这样的载荷情况。如果采用尺寸相同的准三维  $6 \times 6 \times 3$  个节点的单元进行模拟<sup>[3]</sup>,则计算量要大得多,因为该单元的自由度比本文单元多 86 个,而临界时间步长( $\Delta t_{cr} = 1.21 \times 10^{-7}$  s)仅是本文单元的 0.6 倍。

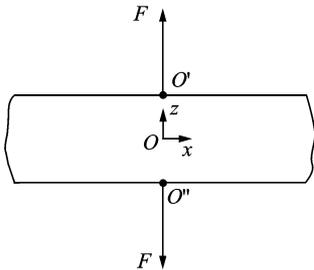


图5 加载方式

图6给出了模拟得到的对称模式的Lamb波在传播过程中4个时刻的波形图。可以清楚地看出,Lamb波在铝板中的传播速度与方向无关,另外,在 $t \geq 0.125$  ms的图中可以清楚地看到Lamb波在边界处的反射情况。

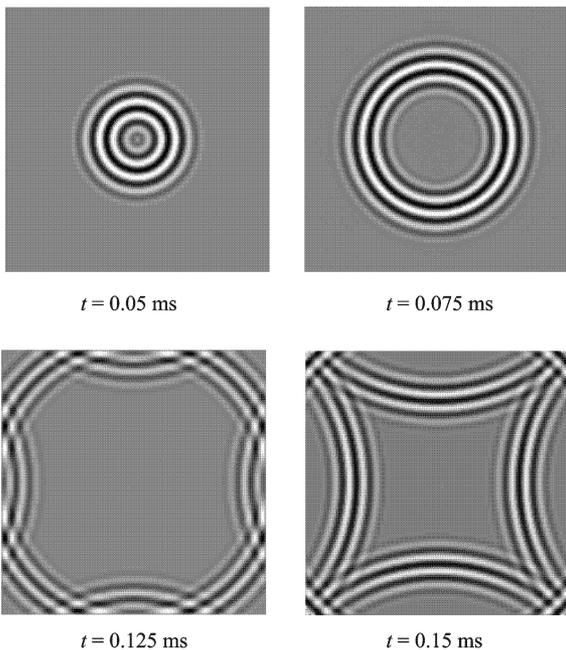


图6 对称模式Lamb波在铝板中的传播

## 4 结束语

本文基于扩展位移场建立了一种能够模拟Lamb波三维传播特性的二维时域谱有限板单元,给出了一个应用例子。首次采用了具有Lebesgue最优性质的节点分布作为新单元的节点,每个节点有6个自由度。另外,为了减少形成单元集中质量矩阵的计算量,采用了一种简单的方法但能够得到与将一致质量矩阵行相加相同的结果。单元矩阵条件数的结果表明,新单元的性能与目前常用的两种性能优异的时域谱有限元相当,而且性能还略优些。加上新单元的稳态积分临界时间步长大,虽然是二维单元但也能够模拟Lamb波三维传播特性,所以采用本文建立的新型谱单元来模拟Lamb波在板结构中的传播效率可得到明显的提高。

### 参考文献:

- [1] Kim Y, Ha S, Chang F K. Time-domain spectral element method for built-in piezoelectric-actuator-induced Lamb wave propagation analysis [J]. AIAA Journal, 2008, 46(3):591-600.
- [2] 刘锋,王鑫伟. Lamb波在复合材料板中传播的谱有限元建模和仿真[J]. 复合材料学报, 2011, 28(5): 174-180.  
Liu Feng, Wang Xinwei. Modeling and simulation of Lamb wave propagation in composite panels based on the spectral finite element [J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2011, 28(5): 174-180.
- [3] 徐春铃. Lamb波在结构中传播的谱有限元分析[D]. 南京:南京航空航天大学, 2010.  
Xu Chunling. Analysis of Lamb waves propagation in structures by the spectral finite element method [D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2010.
- [4] 孙亚杰,袁慎芳,蔡建. 基于超声相控阵的材料结构健康监测实验研究[J]. 宇航学报, 2008, 29(4): 1393-1396.  
Sun Yajie, Yuan Shenfang, Cai Jian. Using phased array technology in structure health monitoring [J]. Journal of Astronautics, 2008, 29(4): 1393-1396.
- [5] Peng H, Meng G, Li F. Modeling of wave propagation in plate structures using three-dimensional spectral element method for damage detection [J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 320(4/5): 942-954.
- [6] Zak A, Krawczuk M. Certain numerical issues of wave propagation modeling in rods by the spectral fi-

- nite element method [J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2011, 47(9): 1036-1046.
- [7] 王秀明, Seriani G, 林伟军. 利用谱元法计算弹性波场的若干理论问题[J]. *中国科学(G辑):物理学 力学 天文学*, 2007, 37(1): 41-59.  
Wang Xiuming, Seriani G, Lin Weijun. On some theoretical problems of the elastic wave field computed by using spectral element method [J]. *Scientia Sinica Physica, Mechanica & Astronomica*, 2007, 37(1): 41-59.
- [8] Zhong H Z, Yue Z G. Analysis of thin plates by the weak form quadrature element method [J]. *Science China Physics, Mechanics & Astronomy*, 2012, 55(5): 861-871.
- [9] Boyd J P. A numerical comparison of seven grids for polynomial interpolation on the interval [J]. *Computer and Mathematics with Applications*, 1999, 38(3/4): 35-50.
- [10] Brutman L. On the Lebesgue function for polynomial interpolation [J]. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 1978, 15(4): 694-704.
- [11] Zak A. A novel formulation of a spectral plate element for wave propagation in isotropic structures [J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2009, 45(10): 650-658.
- [12] He Beiqing, Wang Xinwei. Error analysis in differential quadrature method [J]. *Transactions of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics*, 1994, 11(2): 194-200.
- [13] Dauksher W, Emery A F. An evaluation of the cost effectiveness of Chebyshev spectral and P-finite element solutions to the scalar wave equation [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, 45(8): 1099-1113.