

快速多极展开算法在自由尾迹分析中的应用

丁国华 李攀 陈仁良

(南京航空航天大学直升机旋翼动力学国家级重点实验室, 南京, 210016)

摘要:针对旋翼自由尾迹分析的计算效率问题,对快速多极展开算法(Fast multipole method, FMM)在基于直线涡元的尾迹互诱导速度计算中的应用开展了研究。分别构建了悬停和前飞状态下诱导速度多极展开计算的定义域;在进行远场诱导速度计算时,将直线涡元等效为涡粒,推导了诱导速度的多极展开表达式。通过对悬停和前飞状态下旋翼尾迹中涡元诱导速度的计算,分析了该方法的加速特性和准确性。在此基础上,采用多极展开算法求解了旋翼模型在悬停和前飞状态下的自由尾迹几何形状和桨盘诱导入流分布,并与直接计算结果和实验数据进行了对比,表明FMM算法在提高计算效率的同时能够保持较高的精度。

关键词:直升机;快速多极展开算法;诱导速度;自由尾迹

中图分类号: V211.52 **文献标识码:** A **文章编号:** 1005-2615(2012)04-0485-08

Application of Fast Multipole Method in Free Wake Analysis

Ding Guohua, Li Pan, Chen Renliang

(Science and Technology on Rotorcraft Aeromechanics Laboratory, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China)

Abstract: To improve the computation efficiency in rotor free wake analysis, the application of 3-D fast multipole method (FMM) in the calculation of the induced velocity produced by line-vortex elements is studied. Computation domains of FMM under hover and forward flight conditions are constructed respectively. During the calculation of far-field induced velocity, the line-vortex elements are regarded as vortex particles, and the expression of their induced velocity is derived. By the calculation of the induced velocity of vortex elements in a rotor wake under hover and forward flight conditions, the validity and the accuracy of the method are analyzed. Furthermore, the shape of free wake of a rotor model is computed under hover and forward flight conditions as well as the distribution of the induced inflow above the rotor disc. Compared with the results of direct method and experimental data, the FMM algorithm can keep high precision when improve the computation effect.

Key words: helicopter; fast multipole method (FMM); induced velocity; free wake

旋翼尾迹对直升机旋翼的载荷、性能、振动水平以及噪声特性有着重要的影响。自由尾迹分析方法作为计算旋翼尾迹几何形状和强度的主要方法之一,目前已广泛地应用于直升机空气动力学各种问题的研究^[1]。自由尾迹分析中的主要计算量是涡元之间的诱导速度计算,采取直接计算时所涉及的计算量级为 $O(N^2)$ 。在某些情况下,如高精度的全展自由尾迹分析^[2]、多旋翼自由尾迹分析^[3]以及基

于自由尾迹方法的桨涡干扰噪声分析^[4],其尾迹中涡元数量较大,尤其是在噪声分析中涡元数量可达到 10^4 量级,从而导致计算效率低下。因此,对自由尾迹分析中涡元之间诱导速度加速算法的研究具有重要意义。

自由尾迹分析中涡元之间诱导速度的计算是一个典型的“N-body”问题。从1987年起,美国耶鲁大学的 Greengard 和 Rokhlin 等人^[5-8]发展了计算

大量粒子集合中相互作用势的快速多极展开算法(Fast multipole method, FMM)。该算法将N-body问题的计算量级从 $O(N^2)$ 阶降到 $O(N)$ 阶,带来了可观的计算效益,被誉为“20世纪十大算法之一”,受到很多领域研究者的青睐^[9-12]。在旋翼空气动力学领域,文献[13]将快速多极展开算法应用到基于曲涡元的三维涡方法中;文献[14]将快速多极展开算法用于直升机旋翼尾迹诱导速度计算,带来了很大的计算效益。最近,文献[15~17]在粘性涡粒尾迹模型中使用了基于树状结构的快速多极算法来提高计算效率。

本文以基于直涡元的PIPC 松弛迭代自由尾迹分析方法为例,阐述三维 FMM 算法在直涡元之间诱导速度计算中的实现过程。将尾迹中的远场直涡元近似等效为涡粒,推导出其诱导速度的多极展开表达式,并对上述等效处理的准确性进行分析;为了降低 FMM 计算所需的 CPU 内存并进一步提高计算效率,分别构造与悬停和前飞状态下旋翼尾迹相适应的长方体多极展开定义域。以某模型旋翼为例,通过计算效率的对比分析以及尾迹几何形状和诱导入流的对比验证,表明本文方法在大幅度提高旋翼自由尾迹分析方法计算效率的同时能够保持较高的精度。

1 快速多极展开

在三维空间中,大规模电荷在点 P 处产生的电势为

$$\Phi(P) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\|Q_i - P\|} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i} \quad (1)$$

式中: Q_i 为第 i 个电荷的坐标; q_i 为该电荷的带电量; r_i 为该电荷与 P 点之间的距离; n 为电荷的数量。

在多极展开算法中,将电荷分为远场电荷和近场电荷,其中近场电荷产生的电势采用直接计算,远场电荷产生的电势通过多极展开计算、多极展开的平移、多极展开向局部展开变换、局部展开的平移^[8]等一系列操作(图1),最终将其表示成局部展开级数

$$\Phi(P) = \sum_{j=0}^p \sum_{k=-j}^j L_j^k \cdot Y_j^k(\theta, \varphi) \cdot r^j \quad (2)$$

式中: p 为多极展开的项数; j, k, p 为正整数; r 为 P 点到局部展开中心的距离; $Y_j^k(\theta, \varphi)$ 为球面调和函数; L_j^k 为与所有电荷的位置和带电量相关的系数,通常称之为多极展开的矩。

并且对于任意 $p \geq 1$,有

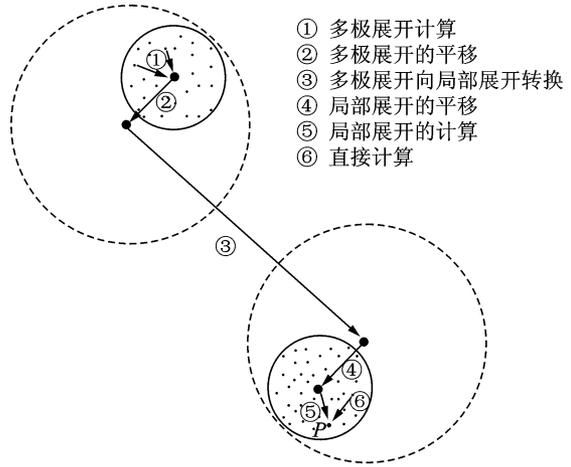


图1 快速多极展开算法的平面示意图

$$|\Phi_D(P) - \Phi_F(P)| \leq \sum_{i=1}^N \frac{|q_i|}{a-r} \left(\frac{r}{a}\right)^{p+1} \quad (3)$$

式中: $\Phi_D(P)$ 表示由直接计算得到的 P 点的电势; $\Phi_F(P)$ 表示由FMM方法得到的 P 点的电势; q_i 为电荷的带电量; a 为局部展开域的半径; N 为电荷的数量。

2 桨叶气动模型和自由尾迹模型

本文选用Weissinger-L升力面模型对桨叶进行建模。如图2所示,每片桨叶被离散成 N 个沿展向分布的片段,每一段的附着涡位于桨叶的1/4弦线处,其环量为定值。桨叶的控制点位于每个分段上3/4弦线的中点处。从桨叶后缘拖出的尾随涡和脱体涡形成近尾迹,外侧近尾迹转过 $10 \sim 30^\circ$ 之后快速卷起形成涡量集中的桨尖涡。

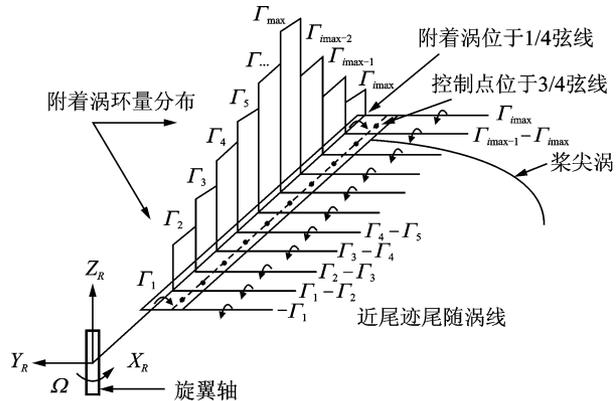


图2 Weissinger-L 升力面模型

本文采用文献[18]中基于直涡元的PIPC 松弛迭代自由尾迹模型来进行计算分析。该模型使用五点中心差分来近似尾迹控制方程中的一阶偏微分项,运用伪隐性松弛迭代方法求取尾迹的几何形

状,包含预估计算和修正计算两个阶段,具体步骤如下。

预估阶段:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{r}}_{l,k}^n &= \bar{\mathbf{r}}_{l-1,k-1}^n + (\bar{\mathbf{r}}_{l,k-1}^n - \bar{\mathbf{r}}_{l-1,k}^n) \left(\frac{\Delta\psi - \Delta\zeta}{\Delta\psi + \Delta\zeta} \right) + \\ &\frac{2}{\Omega} \left(\frac{\Delta\psi\Delta\zeta}{\Delta\psi + \Delta\zeta} \right) \left(\mathbf{V}_\infty + \frac{1}{4} (\mathbf{V}_{\text{ind}}(\mathbf{r}_{l-1,k-1}^{n-1}) + \right. \\ &\left. \mathbf{V}_{\text{ind}}(\mathbf{r}_{l-1,k}^{n-1}) + \mathbf{V}_{\text{ind}}(\mathbf{r}_{l,k}^{n-1})) \right) \quad (4) \end{aligned}$$

修正阶段:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{l,k}^n &= \mathbf{r}_{l-1,k-1}^n + (\mathbf{r}_{l,k-1}^n - \mathbf{r}_{l-1,k}^n) \left(\frac{\Delta\psi - \Delta\zeta}{\Delta\psi + \Delta\zeta} \right) + \\ &\frac{2}{\Omega} \left(\frac{\Delta\psi\Delta\zeta}{\Delta\psi + \Delta\zeta} \right) \left(\mathbf{V}_\infty + \frac{1}{4} (\bar{\mathbf{V}}_{\text{ind}}(r_{l-1,k-1}) + \right. \\ &\left. \bar{\mathbf{V}}_{\text{ind}}(r_{l-1,k}) + \bar{\mathbf{V}}_{\text{ind}}(r_{l,k-1}) + \bar{\mathbf{V}}_{\text{ind}}(r_{l,k})) \right) \quad (5) \end{aligned}$$

式中: $\bar{\mathbf{r}}_{l,k}^n$ 为预估阶段的涡节点 (l,k) 的位置; $\mathbf{r}_{l,k}^n$ 为修正后的涡节点 (l,k) 的位置; $\Delta\psi$ 为方位角步长; $\Delta\zeta$ 为尾迹寿命角步长; \mathbf{V}_∞ 为来流速度。

修正阶段使用的诱导速度是上一次迭代计算的诱导速度和预估阶段的诱导速度的加权平均值

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{V}}_{\text{ind}}(r_{l-1,k-1}) &= \omega \mathbf{V}_{\text{ind}}(\bar{\mathbf{r}}_{l-1,k-1}^n) + \\ &(1-\omega) \mathbf{V}_{\text{ind}}(\mathbf{r}_{l-1,k-1}^{n-1}) \\ \bar{\mathbf{V}}_{\text{ind}}(r_{l-1,k}) &= \omega \mathbf{V}_{\text{ind}}(\bar{\mathbf{r}}_{l-1,k}^n) + (1-\omega) \mathbf{V}_{\text{ind}}(\mathbf{r}_{l-1,k}^{n-1}) \\ \bar{\mathbf{V}}_{\text{ind}}(r_{l,k-1}) &= \omega \mathbf{V}_{\text{ind}}(\bar{\mathbf{r}}_{l,k-1}^n) + (1-\omega) \mathbf{V}_{\text{ind}}(\mathbf{r}_{l,k-1}^{n-1}) \\ \bar{\mathbf{V}}_{\text{ind}}(r_{l,k}) &= \omega \mathbf{V}_{\text{ind}}(\bar{\mathbf{r}}_{l,k}^n) + (1-\omega) \mathbf{V}_{\text{ind}}(\mathbf{r}_{l,k}^{n-1}) \quad (6) \end{aligned}$$

式中: $\mathbf{V}_{\text{ind}}(\bar{\mathbf{r}}_{l,k}^n)$ 为预估阶段涡节点 (l,k) 处的诱导速度; $\bar{\mathbf{V}}_{\text{ind}}(r_{l,k})$ 为修正阶段涡节点 (l,k) 处的诱导速度; ω 为松弛因子,在本文中,取 $\omega=0.5$ 。

本文采用前后两次迭代所计算的尾迹几何形状之差的均方根来判断尾迹是否收敛,均方根残值RMS为

$$RMS = \frac{1}{l_{\max}k_{\max}} \sqrt{\sum_{l=1}^{l_{\max}} \sum_{k=1}^{k_{\max}} (\mathbf{r}_{l,k}^n - \mathbf{r}_{l,k}^{n-1})^2} \quad (7)$$

当 $RMS < 10^{-4}$ 时认为已经收敛到尾迹周期稳态解。

3 基于FMM算法的涡元诱导速度

3.1 悬停和前飞状态下多极展开的定义域

PIPC自由尾迹模型中,旋翼在悬停状态下的初始尾迹为向旋翼下方延伸的一簇螺旋线,前飞状态下的初始尾迹为斜向后下方的一簇螺旋线,其形状如图3所示。

根据两种状态下旋翼尾迹的固有属性,本文构造了适用于两种尾迹形状的长方体定义域。图4为

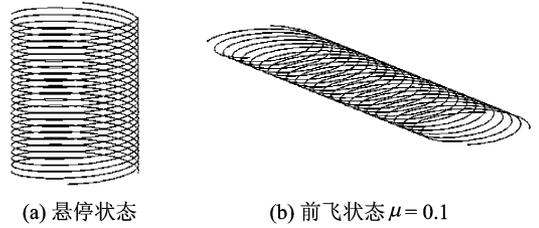


图3 悬停和前飞状态下的初始自由尾迹

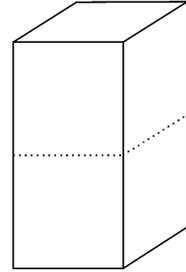


图4 悬停状态下的多极展开定义域

悬停状态下的定义域,该长方体由有限个正方体组成。然后从第一层开始,将每个正方体网格分成8个相等的子网格,建立了定义域的树状结构(图5)。同样,图6,7为前飞状态下的定义域和定义域的树状结构。

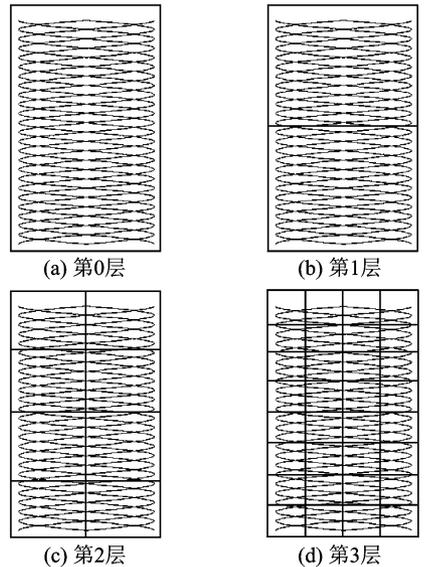


图5 悬停状态下的定义域分层(侧视图)

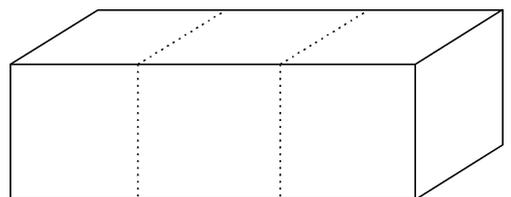


图6 前飞状态下的多极展开定义域

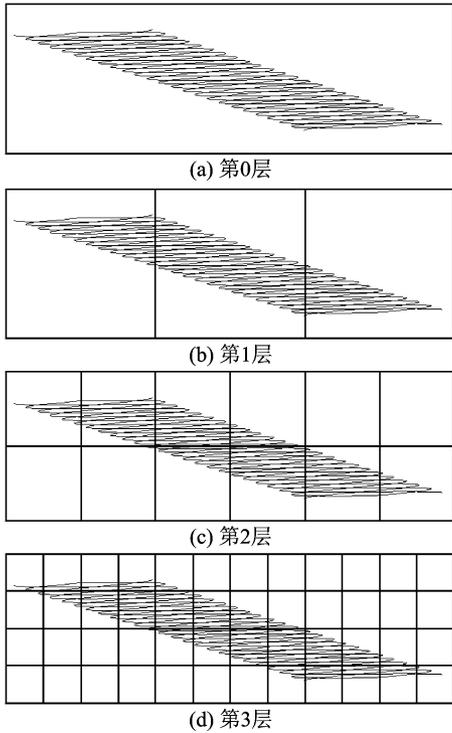


图7 前飞状态下的定义域分层(侧视图)

3.2 近场涡元和远场涡元的划分

对于每一层的每一个网格,给出其最靠近的网格的定义如下:对于第 L 层的网格 i ,它的最靠近的网格是与它在同一层且有共同边界点的网格,如图8所示。三维空间中,最多有27个。

于是对于每一个位于当前网格内的涡元而言,对其产生影响的近场涡元即为位于它最靠近网格内的涡元,除此之外的即为远场涡元。

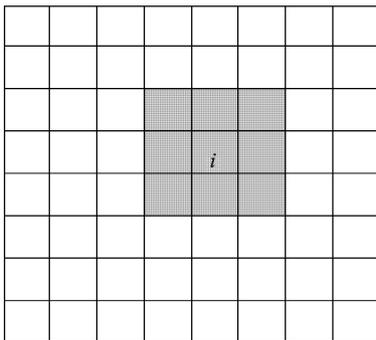


图8 平面图中网格 i 的最靠近的网格(阴影部分)

3.3 近场涡元所产生的诱导速度

近场涡元所产生的诱导速度采用毕奥-萨伐尔定理直接计算,本文以直涡元为基本涡元,并采用 Vativistas 涡核模型^[19]来修正毕奥-萨伐尔定理。给出了某一点的近场涡元在该点处的诱导速度为

$$V_{ind}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{j_{near}} \sum_{k=1}^{k_{near}} \frac{\Gamma_f(j,k)h_{(j,k)}}{\sqrt{h_{(j,k)}^4 + r_c^4}} \cdot (\cos(\theta_{(j,k)_1}) - \cos(\theta_{(j,k)_2}))\hat{\mathbf{e}} \quad (8)$$

式(8)表示自由尾迹中近场涡丝之间的诱导速度,其中 r_c 为涡核半径, $h_{(j,k)}$ 表示位置矢量为 \mathbf{r} 的涡节点到环量为 $\Gamma_f(j,k)$ 的涡段的垂直距离,该涡段为第 j 根自由涡丝中的第 k 个涡元。角度 $\theta_{(j,k)_1}$ 和 $\theta_{(j,k)_2}$ 分别为涡元的起点和终点到计算点的连线与该涡元的夹角,如图9所示。

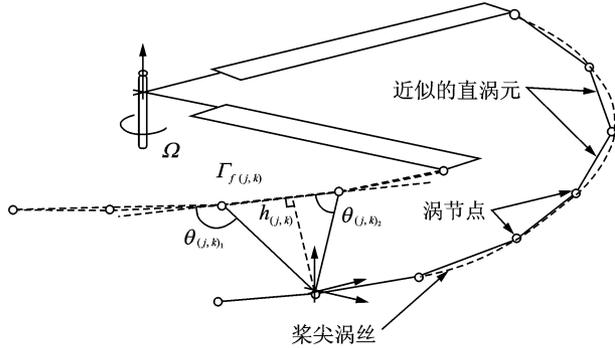


图9 近场涡元之间的位置关系

3.4 远场涡元所产生的诱导速度推导

文献[20]在推导毕奥-萨伐尔定理的过程中给出了诱导速度的3个分量为

$$\begin{cases} v_x = \sum_{k=1}^N \frac{\Gamma_k dl_{z_k}}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r_k} \right) - \sum_{k=1}^N \frac{\Gamma_k dl_{y_k}}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r_k} \right) \\ v_y = \sum_{k=1}^N \frac{\Gamma_k dl_{x_k}}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r_k} \right) - \sum_{k=1}^N \frac{\Gamma_k dl_{z_k}}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r_k} \right) \\ v_z = \sum_{k=1}^N \frac{\Gamma_k dl_{y_k}}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r_k} \right) - \sum_{k=1}^N \frac{\Gamma_k dl_{x_k}}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r_k} \right) \end{cases} \quad (9)$$

在本文方法中, r_k 近似取为计算点到直涡段中点的距离,关于该近似处理的可行性,将在3.5节中进行验证。

式(9)中的 $\sum_{k=1}^N \frac{\Gamma_k dl_{x_k}}{4\pi}$, $\sum_{k=1}^N \frac{\Gamma_k dl_{y_k}}{4\pi}$, $\sum_{k=1}^N \frac{\Gamma_k dl_{z_k}}{4\pi}$ 为只与涡元的位置和环量相关的常系数,因此可以将其看作多极展开的矩,为了简便起见,分别用 $L_{n,x}^m$, $L_{n,y}^m$, $L_{n,z}^m$ 来表示。由三维空间中电荷电势的快速多极展开,有

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^N \frac{\Gamma_k dl_{x_k}}{4\pi} \frac{1}{r_k} = \sum_{m=0}^p \sum_{n=-m}^m L_{m,x}^n Y_n^m(\theta, \phi) \cdot \mathbf{r}^n \\ \sum_{k=1}^N \frac{\Gamma_k dl_{y_k}}{4\pi} \frac{1}{r_k} = \sum_{m=0}^p \sum_{n=-m}^m L_{m,y}^n Y_n^m(\theta, \phi) \cdot \mathbf{r}^n \\ \sum_{k=1}^N \frac{\Gamma_k dl_{z_k}}{4\pi} \frac{1}{r_k} = \sum_{m=0}^p \sum_{n=-m}^m L_{m,z}^n Y_n^m(\theta, \phi) \cdot \mathbf{r}^n \end{cases} \quad (10)$$

由式(10)可以看出,要求出远场涡元所产生的诱导速度,只需求出 $Y_n^m(\theta, \phi) \cdot \mathbf{r}^n$ 3个方向的梯度即可。

设 $U(r, \theta, \phi) = Y_n^m(\theta, \phi) \cdot r^n$, 则

$$\begin{cases} \frac{\partial U(r, \theta, \phi)}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r} \cos\phi \sin\theta + \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{\cos\phi \cos\theta}{r} - \\ \frac{\partial U}{\partial \phi} \frac{\sin\phi}{r \sin\theta} \\ \frac{\partial U(r, \theta, \phi)}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial r} \sin\phi \sin\theta + \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{\sin\phi \cos\theta}{r} + \\ \frac{\partial U}{\partial \phi} \frac{\cos\phi}{r \sin\theta} \\ \frac{\partial U(r, \theta, \phi)}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial r} \cos\theta - \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{\sin\theta}{r} \end{cases} \quad (11)$$

其中 $\frac{\partial U}{\partial r}$, $\frac{\partial U}{\partial \theta}$, $\frac{\partial U}{\partial \phi}$ 可由式(12)求得

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial r} = n \cdot r^{n-1} \cdot Y_n^m(\theta, \phi) \\ \frac{\partial U}{\partial \theta} = r^n \cdot \sqrt{\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} \cdot e^{im\phi} \cdot \sin\theta \cdot (|m| \cdot \\ \cos\theta \cdot (\sin^2\theta)^{-1} \cdot p_n^{|m|}(\cos\theta) + \\ |\sin\theta|^{-1} \cdot p_n^{|m|+1}(\cos\theta)) \\ \frac{\partial U}{\partial \phi} = r^n \cdot \sqrt{\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} \cdot p_n^{|m|}(\cos\theta) \cdot m \cdot \\ (-\sin(m\phi) + i\cos(m\phi)) \end{cases} \quad (12)$$

将式(11,12)代入到式(10)中,即可求得远场涡元在当前涡节点处产生的诱导速度的3个分量。至此,推导出远场涡元诱导速度的多极展开表达式。

3.5 远场直线涡元等效为涡粒的可行性分析

本文在计算远场涡元所产生的诱导速度时,将直涡元近似等效为位于该涡段中点的涡粒。因此需要对这种等效处理给诱导速度的计算结果带来的误差进行分析。本节对单个直涡元在不同距离的测试点处产生的诱导速度进行了计算。用来计算的直涡元位于 x - y 平面内,其长度为1,平行于 y 轴,且以 $(0,0,0)$ 为 midpoint。在 z 轴的正半轴设定了一系列的观察点,如图10所示。分别采用直涡元的毕奥-萨伐尔公式和FMM算法进行诱导速度的计算,并用公式 $(U_F - U_D)/U_D$ 计算了两种方法的相对百分误差。其中 U_D 表示毕奥-萨伐尔定理计算的诱导速度, U_F 表示FMM算法计算的诱导速度。

图11给出了设定的一系列观察点处诱导速度的相对误差,靠近直涡元的观测点处的误差相对较大,当 $z > 0.5$ 时,相对误差快速减小。到 $z > 4$ 时,相对误差几乎为零。因此只要FMM方法中底层网格

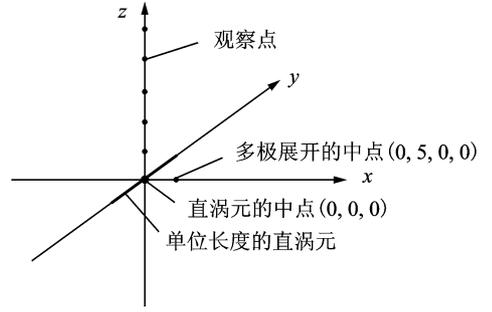


图10 直涡元与观察点的位置关系

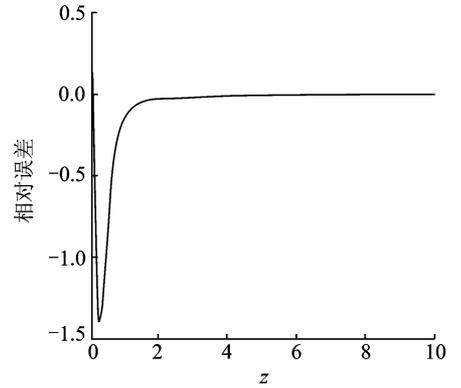


图11 不同观察点处诱导速度的误差

的边长不小于4倍的涡元长度,就可以将直涡元等效为涡粒。在实际的计算中,通过选取适当的定义域并对其进行适当的分层,可以满足上述要求。因此本文在多极展开算法中将远场直涡元等效为涡粒是可行的,不会影响计算结果的准确性。

4 算例计算与分析

为了验证本文所建立的快速多极展开算法的准确性和有效性,本节采用文献[18]中的旋翼模型进行计算分析。其中旋翼桨叶片数 $N_b = 4$, 半径 $R = 0.8255 \text{ m}$, 弦长 $c = 0.0635 \text{ m}$, 旋翼转速为 $\Omega = 207.345 \text{ rad/s}$ 。所有的计算都在装有 Intel(R) Pentium(R) 2.00 GHz 处理器的个人电脑上进行。

4.1 诱导速度多极展开算法中参数的确定

在使用FMM算法之前,首先需要确定定义域的层数 L 和多极展开的项数 P 。表1,2给出了涡元数为8640时,诱导速度多极展开计算的CPU耗时和误差随 L 和 P 的变化趋势。其中,FMM计算结果与直接计算结果的误差采用式(13)计算^[7]

$$E = \left[\frac{\sum_{i=1}^n |D_i - F_i|^2}{\sum_{i=1}^n |D_i|^2} \right]^{1/2} \quad (13)$$

式中: D_i 表示采用直涡元的毕奥-萨伐尔定理计算

出的第 i 个涡元处的诱导速度; F_i 表示该涡元处由 FMM 计算得到的诱导速度。

表1 FMM 算法中参数 L 对时间和误差的影响 ($P=3$)

$$C_T=0.008, \mu=0.1, \alpha_s=-3^\circ$$

定义域 层数 L	FMM 计算 CPU 耗时/s	误差
1	73.328	0.122×10^{-2}
2	46.219	0.436×10^{-2}
3	14.453	3.599×10^{-2}
4	13.125	10.972×10^{-2}

表2 FMM 算法中参数 P 对时间和误差的影响 ($L=3$)

$$C_T=0.008, \mu=0.1, \alpha_s=-3^\circ$$

多极展开 项数 P	FMM 计算 CPU 耗时/s	误差
1	12.968	13.215×10^{-2}
2	13.813	7.540×10^{-2}
3	14.453	3.599×10^{-2}
4	16.547	3.515×10^{-2}
5	18.984	3.447×10^{-2}

由表1可以看出,随着 L 的增加,计算时间不断减小,误差相应地增加。此外,将直涡段等效为涡粒也对定义域的分层有所限制,例如当 $L=4$ 时就不满足上述规定,从而导致计算结果不准确。在表2中,随着 P 的增加,计算时间逐渐增加,数值误差先是有明显地减小,随后变化比较缓慢。因此,对 L 和 P 的选择需要综合考虑算法的 CPU 耗时和准确性进行折衷。在本文算例分析中分别选取 $L=3$, $P=3$ 。

值得指出的是,由于 PIPC 自由尾迹模型的计算是一个循环迭代过程,每次迭代时,定义域中网格的相对位置不变。因此,本文对与之相关的系数进行了预处理,以缩短尾迹模型的整体计算时间。

4.2 诱导速度多极展开算法的加速特性分析

由于在不同的研究中对自由尾迹中离散涡元数量的需求不同,例如只考虑单个桨尖涡的简单的自由尾迹模型,所需的涡元数量很少,但用来计算桨涡干扰噪声的高精度自由尾迹模型,要求最小尺寸涡元的离散角为 1° 甚至更小^[21],因此,本节算例中选取了不同的涡元数量,以分析 FMM 方法的加速特性。

表3,4 分别为悬停状态和前飞状态下取不同涡元数目时,FMM 和直接计算时间的对比及其相对误差。可以看出直接计算时间随涡元的数目呈平方量级增长,而多极展开方法的计算时间近似呈一

次函数增长。当涡元数量较少时,FMM 的加速优势并不明显,当涡元数目逐渐增加时,FMM 的优势逐渐体现出来,并且与直接计算的误差不超过 4%,满足工程应用的精度要求。特别地,当涡元数量为 17 000 左右时,悬停状态下 FMM 的耗时大约为直接计算的 1/7,前飞状态下大约为直接计算的 1/10,均体现出了明显的加速优势。

表3 悬停状态下 FMM 与直接计算对比

$$C_T=0.008, \alpha_s=0^\circ$$

涡元数量	FMM 计算	直接计算	误差
	CPU 耗时/s	CPU 耗时/s	
864	0.844	1.172	2.846×10^{-2}
1 728	1.609	4.359	2.280×10^{-2}
3 456	4.031	14.938	2.325×10^{-2}
8 640	19.688	104.391	2.264×10^{-2}
17 280	81.562 5	538.241	2.291×10^{-2}

表4 前飞状态下 FMM 与直接计算对比

$$C_T=0.008, \mu=0.1, \alpha_s=-3^\circ$$

涡元数量	FMM 计算	直接计算	误差
	CPU 耗时/s	CPU 耗时/s	
864	0.828	1.172	3.954×10^{-2}
1 728	1.547	4.328	3.683×10^{-2}
3 456	3.359	14.688	3.576×10^{-2}
8 640	14.453	102.891	3.599×10^{-2}
17 280	53.031	534.156	3.533×10^{-2}

4.3 自由尾迹几何形状的计算

为了进一步验证快速多极展开算法的准确性并体现它在工程应用中的价值,本节将该方法应用到自由尾迹模型中,对悬停和前飞状态下桨尖涡的几何形状进行求解,并将其与直接计算结果进行对比。图12给出了悬停状态下桨尖涡几何形状的侧视图,图13给出了前进比为0.2时桨尖涡几何形状的俯视图、侧视图和后视图,通过比较可以发现,两种方法求解出的桨尖涡几何外形能够很好地吻合,这表明在自由尾迹模型中引入本文所建立的 FMM 算法不会影响模型的精度。

4.4 前飞桨盘诱导入流计算

本节计算了旋翼模型在前飞状态下桨盘平面的诱导入流分布,其中前进比 $\mu=0.23$,拉力系数 $C_T=0.006 4$,旋翼轴倾角 $\alpha_s=-3^\circ$,并将计算结果与实验数据^[22]进行了对比。由图14可以看出,基于 FMM 和直接方法的旋翼尾迹计算出的桨盘平面诱导入流完全一致,并且入流分布的大小和趋势与实验数据基本一致;纵向诱导速度分布存在明显的梯度,而横向入流分布左右两边基本对称,诱导速

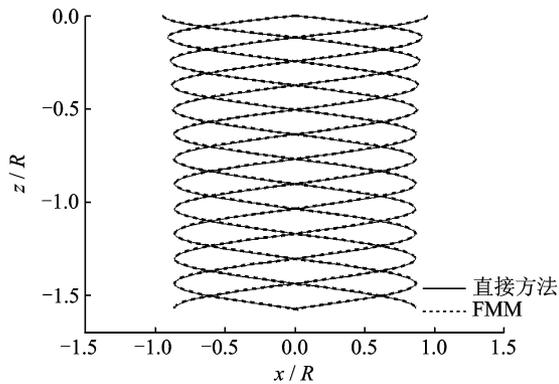
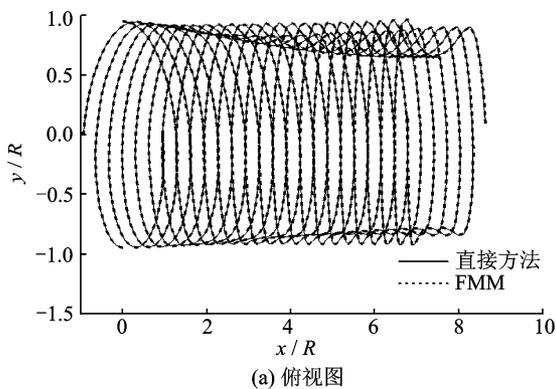
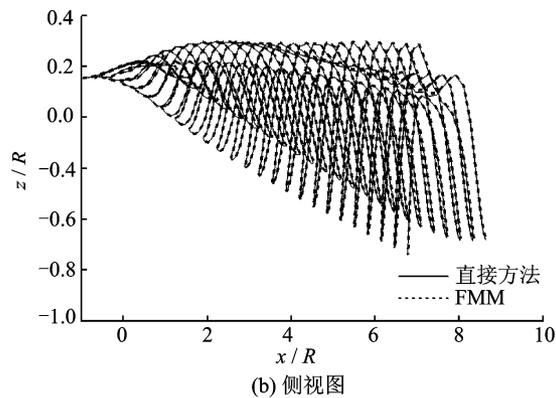


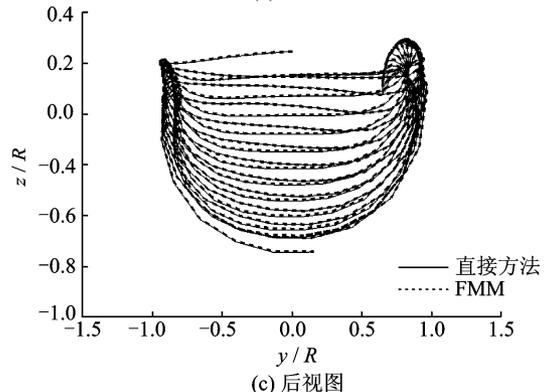
图12 悬停状态桨尖涡几何外形对比(侧视图) $C_T=0.008, \alpha_s=0^\circ$



(a) 俯视图

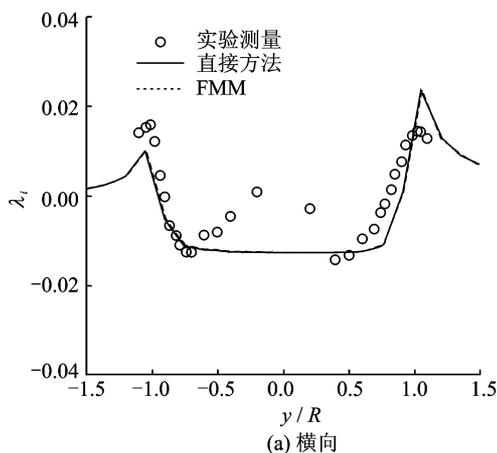


(b) 侧视图

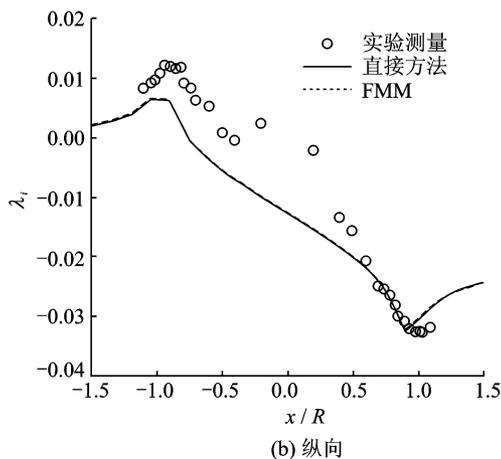


(c) 后视图

图13 前飞状态桨尖涡几何外形对比 $C_T=0.008, \alpha_s=-3^\circ$



(a) 横向



(b) 纵向

图14 前飞状态桨盘平面诱导入流分布
 $C_T=0.0064, \mu=0.23, \alpha_s=-3^\circ$

5 结 论

本文针对旋翼自由尾迹分析中的计算效率问题,建立了求解尾迹中涡元诱导速度的快速多极展开算法。通过算例的计算分析,结论如下:

(1) FMM算法中定义域层数 L 和多极展开项数 P 的选取需要综合考虑其对计算效率和计算精度的影响,进行折衷选择。

(2) 在计算效率方面,随着涡元数量的增加,FMM算法体现出了明显的加速优势,对于具有2万量级涡元数的自由尾迹模型,计算耗时仅为直接计算法的1/10。

(3) 在准确性方面,使用该方法能够精确地求解出尾迹的几何形状,与传统方法相比,保持了较高的精度。FMM算法能够很好地应用到旋翼自由尾迹的计算分析中。

参考文献:

[1] Leishman J G, Bhagwat M J, Bagai A. Free-wake filament methods for the analysis of helicopter rotor wakes[J]. Journal of Aircraft, 2002, 39(5): 759-775.

度的梯度很小。从而进一步验证了本文方法的准确性。

- [2] Bliss D B, Teske M E, Quachenbush T R. A new methodology for free wake analysis using curved vortex elements[R]. NASA-CR-3958, 1990.
- [3] Bagai A, Leishman J. Free-wake analysis of tandem, tilt-rotor and coaxial rotor configurations [C]// American Helicopter Society 41st Annual Forum. Fort Worth, TX: [s. n.], 1995: 851-870.
- [4] Lim J W, Yu Y H, Johnson W. Calculation of rotor blade-vortex interaction airloads using a multiple-trailer free-wake model [J]. *Journal of Aircraft*, 2003, 40(6): 1123-1130.
- [5] Greengard L, Beatson R. Wavelets, multilevel methods and elliptic PDFs[M]. England: Oxford University Press, 1997: 1-37.
- [6] Greengard L, Rokhlin V. A fast algorithms for particle simulations [J]. *Journal of Computational Physics*, 1987, 73(3): 25-348.
- [7] Greengard L, Rokhlin V. A new version of the fast multipole method for the Laplace equation in three dimensions[J]. *Acta Numerical*, 1997, 6(1): 229-270.
- [8] Greengard L. The rapid evaluation of potential fields in particle systems[D]. Cambridge MA: MIT Press, 1988.
- [9] 刘建平. 电势多极展开的一种导出方法[J]. *西南师范大学学报*, 2010, 35(6): 185-189.
Liu Jianping. A deduction method of electric potential multipole expansion [J]. *Journal of Southwest China Normal University*, 2010, 35(6): 185-189.
- [10] 雷霆, 姚振汉, 王海涛. 三维快速多极边界元高性能并行计算[J]. *清华大学学报*, 2007, 47(2): 280-283.
Lei Ting, Yao Zhenhan, Wang Haitao. High performance parallel computations of 3-D fast multipole boundary element method [J]. *Journal of Tsinghua University*, 2007, 47(2): 280-283.
- [11] 徐文哲, 聂在平. 基于谱域球谐展开的多层快速多极子算法[J]. *成都理工大学学报*, 2007, 34(6): 665-668.
Xu Wenxi, Nie Zaiping. Multilevel fast multipole algorithm with spherical harmonics expansion of the k-space integrals[J]. *Journal of Chengdu University of Technology*, 2007, 34(6): 665-668.
- [12] 颜银铃. 三维位势场快速多极边界元法[D]. 秦皇岛: 燕山大学机械工程学院, 2005.
Yan Yinling. Three dimensional fast multipole Bem for potential problems[D]. Qinhuangdao: College of Mechanical Engineering, Yanshan University, 2005.
- [13] Chua K, Quackenbush T R. A fast three-dimensional vortex method for unsteady wake calculations[J]. *AIAA Journal*, 1993, 31(10): 1957-1958.
- [14] Sitaraman J, Ananthan S. Fast method for evaluating biot-savart integrals in rotor wake calculation[C]// AHS International 4th Decennial Specialists' Conference on Aeromechanics of the American Helicopter Society. San Francisco, CA: [s. n.], 2004: 831-838.
- [15] He C J, Zhao J G. Modeling rotor wake dynamics with viscous vortex particle method[J]. *AIAA Journal*, 2009, 47(4): 902-915.
- [16] 魏鹏, 史勇杰, 徐国华, 等. 基于粘性涡模型的旋翼流场数值方法研究[J]. *航空学报*, 2012, 33(5): 771-779.
Wei Peng, Shi Yongjie, Xu Guohua, et al. Numerical method simulating rotor flow field based upon viscous vortex model [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2012, 33(5): 771-779.
- [17] 魏鹏, 招启军, 徐国华. 倾转旋翼机悬停和前飞状态旋翼尾迹特性分析[C]//第二十七届全国直升机年会论文. 南京: [s. n.], 2011: 132-137.
Wei Peng, Zhao Qijun, Xu Guohua. Behavior analysis on tiltrotor wake in hover and forward flight [C]//27th National Helicopter Annual Forum. Nanjing: [s. n.], 2011: 132-137.
- [18] Bagai A. Contributions to the mathematical modeling of rotor flow-fields using a pseudo-implicit free-wake analysis [D]. College Park, Maryland: University of Maryland, 1995.
- [19] Vatistas G H, Kozel V, Mih W C. A simpler model for concentrated vortices[J]. *Experiments in Fluids*, 1991, 11(1): 73-76.
- [20] 徐华舫. 空气动力学基础(上册)[M]. 北京: 北京航空学院出版社, 1987: 237-240.
- [21] Bagai A, Leishman J. Adaptive grid sequencing and interpolation schemes for helicopter rotor wake analyses[J]. *AIAA Journal*, 1998, 36(9): 1593-1602.
- [22] Elliot J W, Althoff S L, Sailey R H. Inflow measurements made with a laser velocimeter on a helicopter model in forward flight [R]. NASA-TM-100542, 1988.