

# 基于全局近似函数的薄壁结构耐撞性多目标优化

何成 陈国平 何欢

(南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室, 南京, 210016)

**摘要:**以圆锥形薄壁金属管为对象进行耐撞性优化研究,并对几种全局近似函数构造模型精度与适用性进行讨论。以薄壁管的多个几何参数为设计变量,以质量比吸能、长度比吸能、最大冲击载荷为目标函数,通过对比几种不同方法构造的近似模型精度,发现依据各个目标函数的非线性强弱程度不同,可以采用相对应的构造方法获得精度最高的近似模型。最后结合普适性最好的RBF法对圆锥管进行多目标的耐撞性优化,并给出设计空间中的Pareto解集与Pareto曲面,提供了多种侧重不同耐撞性指标优化的设计方案。

**关键词:**耐撞性;全局近似函数;径向基函数;多目标优化

中图分类号:V244 文献标识码:A 文章编号:1005-2615(2012)04-0472-06

## Multi-Objective Optimization of Thin-Walled Structures Crashworthiness Based on Global Approximate Function

He Cheng, Chen Guoping, He Huan

(State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures, Nanjing University  
of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China)

**Abstract:** Crashworthiness optimization of thin-walled metal structure is investigated and the accuracy and the applicability of models established by global approximate function are compared. Taking the geometrical characteristics of the thin-walled structure as the design variables, the specific energy absorption (SEA), the unit length of energy absorption (LEA) and the maximum impact load as objective functions, the accuracy of the approximate models constructed by several different methods are compared. Results show that the different objective functions have different levels of nonlinearity, so using the corresponding method can obtain the most accurate approximate model. Finally, the multi-objective optimization for the tapered thin-wall tube is presented by using RBF and the Pareto sets and Pareto surface are given.

**Key words:** crashworthiness; global approximate function; radial basis functions; multi-objective optimization

现代交通工具的发展使得交通事故成为一个世界性的问题,各国尤其是在发达国家对交通工具的耐撞性研究已经开展多年并日益成为工程界与理论界的热点。无论是在车体结构中还是在航空航天领域,金属薄壁结构都被作为缓冲吸能装置而广泛应用。如何合理设计薄壁结构,使其具有较高的耐撞性能就显得尤为重要。

结构冲击响应具有高度非线性特征,一般无法给出目标函数随结构参数变化的显式方程。要进行结构耐撞性优化必然需要在设计变量空间内取大量的样本点进行结构动态响应分析,大量样本点的计算成本非常高昂。从工程应用角度出发,根据少量样本点构造全局近似函数来逼近结构耐撞性目标函数,并且利用近似函数替代真实目标函数进行

结构耐撞性优化无疑是一种可取的办法。此方法是将试验获得的样本点进行插值、统计回归分析,得到反映响应特征与设计变量之间的近似关系。插值与回归类方法中以径向基函数(RBF)与响应面法(RSM)应用最为广泛。Liu<sup>[1]</sup>利用经典响应面法构造了方管质量比吸能的全局近似模型,采用遗传算法对模型进行了多目标优化,并与理论优化结果进行了对比。文献[2]利用DOE 试验设计方法与响应面法相结合,研究薄壁厚度、底端直径和锥管重量对应力流动材料圆锥形金属管的吸能特性的影响。Hou<sup>[3]</sup>将响应面优化方法应用到多单元胞薄壁结构的耐撞性优化中,取得了较好的结果。当响应值中含有较为明显的线性特征时,仅用单纯的RBF法构造出来的全局近似函数模型获得的结果往往较差。为此,Fang 等人<sup>[4-5]</sup>将RSM法和RBF法相结合,得到的增广径向基函数很好地解决了这个问题。

另外早期针对薄壁管的优化工作多集中于等截面管件的研究。实际上锥型薄壁管相比于等截面柱形管具有更优异的耐撞性能<sup>[6-7]</sup>,因此近些年来变截面薄壁管成为了提高目标结构耐撞性的重要缓冲吸能构件之一。

本文研究基于全局近似函数的金属薄壁结构耐撞性优化分析方法,针对基于不同构造方法的全局近似模型的精度及其在构造耐撞性指标方面的适用性进行讨论;为提高分析效率,将析因试验设计与中心复合试验设计相结合作为本文的试验设计方法,以质量比吸能、长度比吸能、最大冲击载荷为优化目标,以圆锥管冲击端尺寸、锥角、壁厚为设计变量,引入理想点法对圆锥管进行多目标优化研究,给出3个目标函数之间的Pareto 曲面,为研究者使用薄壁构件作为缓冲吸能元件提供设计参考。

## 1 全局近似函数模型的构造

### 1.1 经典响应面法

经典响应面法是一种利用少量的样本点以及与之相对应的目标函数构造全局近似函数的方法。文中只简单介绍常用的二阶响应面模型,实际应用中可以根据不同需要对多项式的阶次进行调整,构造方法与二阶模型类似。

将近似方程表示为二次多项式的形式

$$f(x) = \beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i x_i + \sum_{i=1}^m \beta_{ii} x_i^2 +$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m \beta_{ij} x_i x_j \quad (1)$$

式中: $m$ 为总设计变量个数; $x_i$ 为第 $i$ 个设计变量; $\beta$ 为待定系数。对于 $n$ 个样本点可获得 $n$ 个 $x_{ki}$ ( $k=1,2,\dots,n;i=1,2,\dots,m$ )和相应的真实函数值 $f_k$ 之间关系式,写成矩阵形式,并通过最小二乘法计算可获得待定系数 $\hat{\beta}$

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X}) (\mathbf{X}^T \mathbf{f}) \quad (2)$$

### 1.2 径向基函数

径向基函数是一种多元离散数据的插值法,由一些对称的、以试验设计所生成的样本点为中心的基函数组合构造全局近似函数的方法。

假定真实响应函数为 $f(x)$ ,由RBF得到的近似值为 $f'(x)$ ,即

$$f'(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \quad (3)$$

式中: $n$ 为样本点的个数; $\mathbf{x}$ 为由设计变量构成的矢量, $\mathbf{x}_i$ 为第 $i$ 个样本点处响应值组成的矢量, $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|$ 为欧拉距离; $\varphi$ 为基函数; $\lambda_i$ 为待求加权系数。常用的基函数包括Gaussian 基函数、Multi-Quadric 基函数、Inverse Multi-Quadric 基函数,在本文中分别简记为“-GS”,“-MQ”和“-IMQ”。

将 $n$ 个设计变量组成的矢量以及其响应值代入式(3),写成矩阵为

$$\mathbf{f} = \mathbf{A} \boldsymbol{\lambda} \quad (4)$$

式中: $\mathbf{f} = [f'(x_1) \quad f'(x_2) \quad \dots \quad f'(x_n)]^T$ ;  $A_{i,j} = \varphi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|)$ ,  $i=1,2,\dots,n, j=1,2,\dots,n$ ;  $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_n]^T$ 。

利用最小二乘法可由式(4)解得

$$\boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) (\mathbf{A}^T \mathbf{f}) \quad (5)$$

将RSM法和RBF法相结合,在径向基函数的基础上增加线性多项式可得到的增广径向基法,在后续图表中简记为RBF-\* -LP,其表达式为

$$f'(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) + \sum_{j=1}^m c_j p_j(x) \quad (6)$$

式中: $m$ 为多项式的总项数; $c_j$ ( $j=1,2,\dots,m$ )为相关系数。

### 1.3 数值算例

以一强非线性二维曲面为例,分别采用RSM、RBF和增广RBF构造近似模型,对其模型精度与适用性进行讨论,函数表达式如下

$$f(x) = 500 + 1\,000 \sin(x_1) \sin(x_2) \cos(x_2) e^{\cos(x_1)} \\ x_1 \in [-2, 2], x_2 \in [-2, 2]$$

对于上述小规模模型问题,本部分采用5水平的全面析因试验设计法用于构造近似模型。在这里模型的适合性评价常采用均方误差(RSME)和判定系数 $R^2$ 准则<sup>[4]</sup>。通过比较表1中的RSME与 $R^2$ 值可以看到,RBF方法构造的近似函数模型精度均高于增广RBF法与RSM法,四阶RSM近似模型的 $R^2$ 值仅为0.52,精度要远低于RBF模型的平均水平。本文也研究了采用更高项次的RSM模型,研究表明,随着项次的增加,模型精度不但没有提高,拟合误差反而大幅增加。产生这种问题的主要原因在于RSM的精度不仅与真实响应特征有关,还与RSM的阶次与交叉项选取有关。在如何合理地选取高阶交叉项方面,至今没有通用准则,通常依赖于研究者的先验经验。相比而言,RBF方法则没有这方面的限制。另外,盲目地提高RSM的阶次,使得RSM的项数与样本点数目接近或饱和,会使得构造出的响应函数出现虚假噪声,从而影响到精度。因此在具有相同样本点数目情况下,RBF方法相比RSM方法更适合于构造非线性程度较高的函数模型,使用起来也更为方便。

表1 基于5水平的RSM、RBF和增广RBF近似模型适合性评价

全局近似函数模型	判定参数	
	RSME	$R^2$
RSM-QP	250.719	0.520 6
RBF-GS	35.036	0.990 6
RBF-MQ	40.141	0.987 7
RBF-IMQ	35.988	0.990 1
RBF-GS-LP	35.276	0.990 5
RBF-MQ-LP	41.176	0.987 0
RBF-IMQ-LP	38.462	0.988 7

通过表1还可以发现增广RBF模型判定参数值始终介于RBF模型与RSM模型判定参数值之间,这是因为增广RBF构造的模型不同程度上提高了RBF描述线性响应特征的能力,而本数值算例属于强非线性问题,因此才会出现上述情况。增广RBF的这种特点在构造某些具有弱非线性特征的近似模型中是十分有意义的。

## 2 圆锥薄壁管的多目标优化

### 2.1 多目标优化问题描述

本文以金属薄壁圆锥管为研究对象,其计算模型如图1所示,以冲击端直径 $a$ 、倾斜角 $b$ 和薄壁厚度 $t$ 为设计变量;假设原几何尺寸为 $a=45$  mm, $b=$

$4^\circ$ , $t=2$  mm,以原始尺寸为设计空间中心点,将变量 $a,b,t$ 设计范围分别设定为 $[30,60]$  mm, $[3^\circ,5^\circ]$ , $[1.5,2.5]$  mm,在自由端附加120 kg集中质量模拟惯性的影响。本文椎管的材料为软钢,其物理参数为:密度 $7\ 830$  kg/m<sup>3</sup>,弹性模量207 GPa,泊松比0.3,屈服应力200 MPa,硬化模量为630 MPa

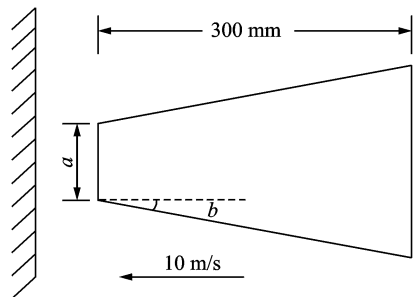


图1 圆锥薄壁管碰撞示意图

实际工程问题中,各个响应特征对参数的灵敏度差异较大。为了便于分析比较,将所有变量都进行量纲一化处理。经变换,新变量 $x_i$ 的变化范围为 $[-1,1]$ ,其中 $-1,0,1$ 分别表示设计空间的下限,中间值和上限。

质量比吸能(SEA)指的是结构有效破坏长度内单位质量吸收的能量,由于它很好地兼顾了能量吸收与结构质量两者的影响,因此在薄壁结构的耐撞性设计中被广泛作为评价指标之一<sup>[8]</sup>。除此之外,碰撞过程中的最大冲击载荷也是一个重要的考虑因素<sup>[9]</sup>。另外在某些情况下,当缓冲行程作为关注对象时,则应采用长度比吸能(LEA)来衡量缓冲吸能性能。LEA指的是结构有效破坏长度内单位长度吸收的能量。因此本文以这3个耐撞性能指标作为优化目标函数进行多目标优化。

引入理想点法,令各分目标的理想最优值为 $f_i^*$  ( $i=1,2,\dots,q$ )<sup>[10]</sup>,定义

$$\Phi(\mathbf{x}) = \min \sum_{i=1}^q w_i \left[ \frac{f_i(\mathbf{x}) - f_i^*}{f_i^*} \right] \quad (7)$$

式中: $w_i$ 为第 $i$ 个目标函数所对应的加权因子,本文中采用归一权。以质量比吸能、长度比吸能以及最大冲击载荷为优化目标进行多目标优化,优化问题可描述为

$$\begin{cases} \min \Phi(\mathbf{x}) = F(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_q(\mathbf{x})) \\ \text{s. t. } -1 \leq x_i \leq 1 \quad i=1,3 \end{cases} \quad (8)$$

式中: $f_1 = -SEA(x_1, x_2, x_3)$ ;  $f_2 = -LEA(x_1, x_2, x_3)$ ;  $f_3 = P_m(x_1, x_2, x_3)$ ,  $x_i$ 为设计变量。

### 2.2 近似模型精度比较

为了获得准确可靠的近似模型,优化之前有必要针对不同方法构造的近似模型精度进行比较。为此在设计空间中随机选取了6个点的响应值,其在此设计空间中对应位置如表2所示。依据所获得的随机样本点,利用不同方法构造近似模型,将其与有限元计算获得的结果进行对比,将误差值与判定系数 $R^2$ 值列于表3中。通过观察表3可以得到以下结论。

(1)3个目标函数采用相对应的构造方法可获得精度最高的近似模型;RBF-IMQ构造的SEA模型精度最高;RSM构造的LEA模型与 $P_m$ 模型精度最高。

(2)对于构造SEA模型,RBF构造的近似模型精度普遍高于与之相对应的增广RBF构造的模型。反之,采用RSM构造的LEA与 $P_m$ 模型精度最高,增广RBF构造模型精度略高于与其相对应的

RBF构造模型。

(3)RBF方法用于构造耐撞性参数的近似模型通用性最高。虽然RBF方法在构造LEA模型与 $P_m$ 模型精度上不及增广RBF方法与RSM方法,但其精度已经完全满足工程要求。

由于RBF-IMQ构造的3个目标函数的近似模型均具有较高的精度,因此在后续优化过程中将采用此方法。

表2 随机选取的样本点的空间位置及其响应值

设计点	设计空间坐标		FEA			
			$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	
1	42.65	4.70	2.16	16.42	46.66	92.94
2	57.47	4.87	1.67	13.17	38.82	88.01
3	53.77	4.36	2.21	15.18	52.78	107.55
4	58.79	4.52	1.53	12.01	33.39	80.51
5	49.67	4.49	1.78	13.34	36.85	84.14
6	31.07	3.78	1.55	16.22	27.98	56.59

表3 基于近似函数方法优化结果的误差

目标函数	设计点	RSM	RBF-MQ-LP	RBF-IMQ-LP	RBF-GS-LP	RBF-MQ	RBF-IMQ	RBF-GS
$f_1(x)$	1	2.25	1.16	1.13	0.80	1.51	1.16	0.85
	2	5.96	2.18	2.14	3.31	0.52	3.46	3.01
	3	0.78	0.66	0.33	0.47	1.14	0.41	0.39
	4	4.54	2.09	2.11	3.90	1.74	2.18	3.35
	5	4.37	2.91	3.44	3.23	2.58	3.21	3.24
	6	4.45	3.27	3.08	2.96	3.48	0.19	3.39
	平均	3.73	2.05	2.04	2.45	1.83	1.77	2.37
	$R^2$	0.822	0.941	0.939	0.919	0.946	0.952	0.921
$f_2(x)$	1	6.08	6.82	6.75	6.46	7.09	7.15	7.06
	2	0.57	2.81	2.85	1.85	4.54	3.59	2.39
	3	6.52	7.47	7.12	7.24	7.54	7.55	7.80
	4	0.22	3.81	3.76	1.92	3.37	2.50	1.49
	5	3.70	4.76	4.32	4.52	5.24	4.42	4.22
	6	3.18	2.02	2.36	2.69	0.77	1.18	4.15
	平均	3.38	4.62	4.53	4.11	4.76	4.40	4.52
	$R^2$	0.961	0.946	0.950	0.952	0.941	0.945	0.945
$f_3(x)$	1	1.42	0.79	1.64	1.64	0.79	0.79	0.79
	2	2.32	1.76	0.36	5.06	2.80	0.64	4.15
	3	1.43	3.53	3.53	3.53	3.53	4.28	4.28
	4	3.01	9.97	8.34	2.17	10.60	9.00	2.61
	5	0.81	2.81	4.57	3.70	2.81	4.57	4.57
	6	5.66	3.05	2.34	1.38	1.93	1.64	3.25
	平均	2.44	3.65	3.46	2.91	3.74	3.49	3.28
	$R^2$	0.998	0.963	0.968	0.980	0.959	0.962	0.977

### 2.3 优化试验设计

本文采用中心复合试验设计方法,为提高全局近似函数的精度,在原中心复合试验设计基础上增

加 $2^k$ 析因设计,改进后的试验样本点及对应的目标函数值如表4所示。

表4 试验样本点及对应的目标函数值

样本点	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$SEA/(kJ \cdot kg^{-1})$	$LEA/(kJ \cdot m^{-1})$	$P_m/kN$
1	0	0	0	16.40	44.54	86.66
2	-1	-1	1	26.92	59.41	89.18
3	-1	-1	-1	16.29	25.69	55.71
4	1	-1	1	15.54	63.37	115.44
5	1	-1	-1	11.83	30.63	67.86
6	1	1	1	15.58	65.42	132.15
7	1	1	-1	11.44	32.08	88.85
8	-1	1	1	22.90	56.25	91.24
9	-1	1	-1	14.70	26.87	58.68
10	0	-1	0	16.31	42.78	83.30
11	0	1	0	15.64	44.34	96.48
12	1	0	0	14.50	49.15	107.44
13	-1	0	0	19.99	40.23	69.58
14	0	0	1	18.69	59.43	111.64
15	0	0	-1	12.91	28.45	63.51
16	-0.5	-0.5	0.5	19.76	49.34	84.72
17	-0.5	-0.5	-0.5	16.39	33.94	73.02
18	0.5	-0.5	0.5	15.95	52.97	102.76
19	0.5	-0.5	-0.5	13.03	35.33	79.61
20	0.5	0.5	0.5	15.74	53.30	107.46
21	0.5	0.5	-0.5	14.27	38.07	87.26
22	-0.5	0.5	0.5	18.32	48.77	86.26
23	-0.5	0.5	-0.5	15.74	34.89	73.34

## 2.4 耐撞性优化

不妨认为有限元计算结果即为试验真值。利用RBF-IMQ近似模型结合遗传算法进行寻优计算。通过变化不同的权系数可以得到侧重不同目标分量的Pareto解集。

本文随机选取了1 728组权系数,利用MLS法拟合出3个耐撞性参数设计空间内的Pareto曲面(图2),并在曲面上选取部分Pareto解集列于表5。此解集是为设计者提供一个设计区间,是一个全局的相对最优解,设计者可以在解集中根据不同的优化要求与侧重点进行选取。

从表5中还可以看出,在实际设计过程中很难使得多个目标函数达到最优值,例如LEA的最优解与最大冲击载荷的最优解之间存在截然相反的

关系,即提高LEA就必然会导致最大载荷的增大,确保了最大载荷就会引起LEA的减小。实际上长度比吸能与平均冲击载荷近似相等(不考虑摩擦力情况下),平均冲击载荷高,对应的最大载荷值也会处于高水平状态,各个目标分量之间、相互影响相互关联。

图3给出了加权因子分别取0.3,0.35,0.35(对应表5中的3号设计点)时,优化后冲击载荷时域曲线。从表6可以看出质量比吸能与长度比吸能都获得较大程度的提高,同时有效降低了最大冲击载荷,表明此种优化方法达到了预期效果。另外优化后原锥形管的质量也从原来的0.975 kg降至0.763 kg,这为交通工具的轻量化提供了有利的支持。

表5 基于RBF-IMQ方法锥形薄壁管的部分Pareto解集

样本点	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$SEA/(kJ \cdot kg^{-1})$	$LEA/(kJ \cdot m^{-1})$	$P_m/kN$
1	-1.00	-1.00	1.00	26.92	60.07	89.18
2	-1.00	-1.00	0.94	26.59	58.43	88.00
3	-1.00	-0.91	0.59	24.09	49.69	81.59
4	-1.00	-0.81	0.43	22.89	48.64	78.43
5	-1.00	-0.61	0.30	21.82	45.83	75.69
6	-1.00	-0.87	-0.10	20.20	39.77	70.86
7	-1.00	-0.02	0.02	20.08	40.54	69.87
8	-1.00	-1.00	-0.43	18.78	34.62	66.01
9	-1.00	-1.00	-0.67	17.66	30.66	61.66
10	-0.99	-1.00	-0.9	16.61	26.94	57.22

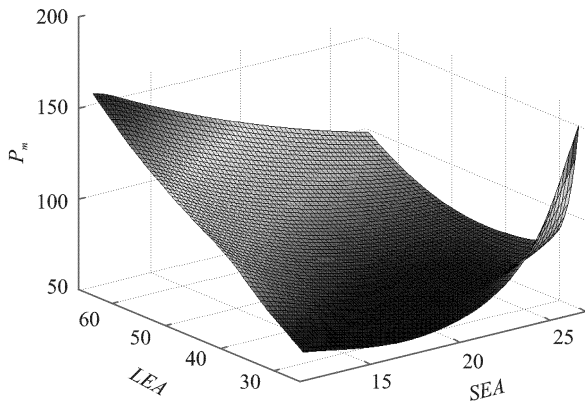


图2 圆锥管3个目标函数的Pareto曲面

表6 优化前后圆锥管耐撞性比较

项目	SEA/ (kJ·kg <sup>-1</sup> )	LEA/ (kJ·m <sup>-1</sup> )	P <sub>m</sub> /kN	M/kg
原锥形管	16.40	44.54	86.66	0.975
FEA	24.09	49.69	81.59	0.763

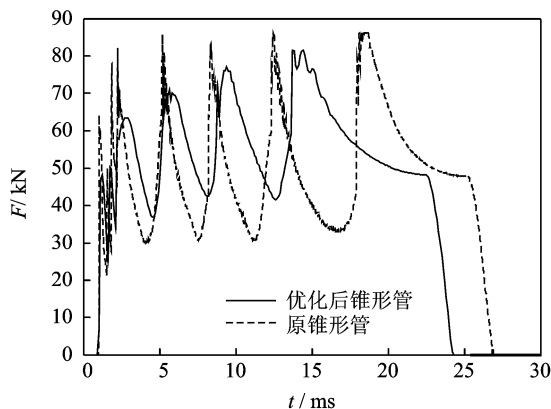


图3 优化前后圆锥管冲击载荷时域曲线

### 3 结束语

本文针对几种构造近似模型的方法进行了讨论,并以圆锥薄壁管为对象进行了多参数多目标优化研究。研究表明,相对于RSM和增广RBF方法而言,传统的RBF方法更适合于描述锥形薄壁金属管在强冲击载荷下的冲击响应。

由于不同耐撞性指标表现出不同的非线性强弱,因此不同指标有其相应的最优的近似模型构造方法:RBF方法最适合用于构造质量比吸能的近似模型;RSM则最适合构造长度比吸能与最大冲击载荷的近似模型。其中以RBF方法的通用性最好,能够保证其构造的近似模型都具有较高的精度,适用性最广。

论文采用的多目标优化方法效果较好,有效改

善了原薄壁管耐撞性能,给出的3个耐撞性参数Pareto解集,为设计人员使用薄壁管作为缓冲吸能元件提供了很好的参考依据。

### 参考文献:

- [1] Liu Yucheng. Optimum design of straight thin-walled box section beam for crashworthiness analysis [J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2008, 44(3): 139-147.
- [2] Sheriff N M, Gupta N K. Optimization of thin conical frusta for impact energy absorption [J]. Thin-Walled Structures, 2008, 46(6): 653-666.
- [3] Hou Shujuan, Li Qing, Long Shuyao, et al. Multi-objective optimization of multi-cell sections for the crashworthiness design [J]. International Journal of Impact Engineering, 2008, 35(11): 1355-1367.
- [4] Fang H, Rais-Rohani M, Liu Z, et al. A comparative study of metamodeling methods for multi-objective crashworthiness optimization [J]. Computers and Structures, 2005, 83(25/26): 2121-2136.
- [5] Fang H, Horstemeyer M F. Global response approximation with radial basis functions [J]. Engineering Optimization, 2006, 38(4): 407-424.
- [6] Lanzi L, Castelletti L M L, Anghileri M. Multi-objective optimization of composite absorber shape under crashworthiness requirements [J]. Compos Struct, 2004, 65(3/4): 433-41.
- [7] 荆友录, 温卫东, 魏民祥. 不同截面结构薄壁直梁的轴向耐撞性研究 [J]. 机械科学与技术, 2009, 28(4): 455-459.
- [8] Jing Youlu, Wen Weidong, Wei Mingxiang. A study of the axial crashworthiness of thin-walled straight beams with different shapes [J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2009, 28(4): 455-459.
- [9] 杜星文, 宋宏伟. 圆柱壳冲击动力学及耐撞性设计 [M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [10] Du Xingwen, Song Hongwei. Impact dynamics theory and crashworthiness design of cylindrical structures [M]. Beijing: Science Press, 2003.
- [9] Foias C, Sell G R, Temam R. Inertial manifolds for nonlinear evolutionary equation [J]. Journal of Differential Equations, 1988, 73(2): 309-353.
- [10] Frank R. Scattered data interpolation: tests of some methods [J]. Mathematical of Computation, 1982, 38(157): 181-200.