

# 改进的等残余高度加工自由曲面刀具路径生成算法

赵世田<sup>1,2</sup> 赵东标<sup>1</sup> 付莹莹<sup>3</sup> 陆永华<sup>1</sup> 刘凯<sup>1</sup>

(1. 南京航空航天大学机电学院, 南京, 210016; 2. 盐城工学院机械工程学院, 盐城, 224051;

3. 德州学院机电工程系, 德州, 253023)

**摘要:**提出了改进的等残余高度算法用于加工自由曲面刀具路径生成。算法在生成相邻刀具路径轨迹时分两步, 首先根据当前刀具路径轨迹, 采用了Newton-Raphson迭代法精确求取刀具运动包络体上的点到自由曲面的距离, 结合给出的Newton迭代法的迭代角度初值计算方法, 精确求取满足要求的等残余高度点构成等残余高度线; 然后根据求取的等残余高度线精确求取相邻刀具路径轨迹, 求取过程类似。验证实例表明, 该方法可极大地减少刀具路径轨迹长度, 均匀曲面加工残余高度, 提高曲面加工质量。

**关键词:**自由曲面; 改进的等残余高度算法; 刀具路径生成

中图分类号: TP391

文献标识码: A

文章编号: 1005-2615(2012)02-0240-06

## Improved ISO-Scallop Tool Path Generation Algorithm for Free-Form Surface Machining

Zhao Shitian<sup>1,2</sup>, Zhao Dongbiao<sup>1</sup>, Fu Yingying<sup>3</sup>, Lu Yonghua<sup>1</sup>, Liu Kai<sup>1</sup>

(1. College of Mechanical and Electrical Engineering, Nanjing University of Aeronautics &

Astronautics, Nanjing, 210016, China;

2. College of Mechanical Engineering, Yancheng Institute of Technology, Yancheng, 224051, China;

3. Department of Mechanical and Electrical Engineering, Dezhou University, Dezhou, 253023, China)

**Abstract:** Improved ISO-scallop tool path generation algorithm is presented for free-form surface machining. The novel tool path generation algorithm includes two steps. Firstly, the Newton-Raphson iteration method is used to calculate the distance from the point of the tool swept volume to the free-form surface. The method for calculating the initial iteration angle combined with Newton iteration method is given to find the precise ISO-scallop point to construct the ISO-scallop curve according to current cutter contact tool path. Secondly, the neighbor cutter contact tool path is calculated from the ISO-scallop curve. The procedure is similar to the former one. Application example of the algorithm demonstrates that the total tool path length is reduced greatly, and the scallop distributed on the free-form surface is uniform and the machining quality is high.

**Key words:** free-form surface; improved ISO-scallop; tool path generation

自由曲面加工刀具路径生成方法主要有等参数法<sup>[1-4]</sup>、等平面法<sup>[5-9]</sup>和等残余高度法<sup>[10-18]</sup>等。前者刀具路径轨迹较为简单, 但是受弓高误差和残余高度及曲面曲率影响, 刀具路径轨迹参数选择较为保守, 会有冗余刀具路径轨迹, 而等残余高度法

在理论上可以产生最优的刀具路径轨迹, 即刀具路径轨迹最短、加工效率最高、残余高度均匀一致、加工质量最高, 因此有着很好的发展前景。

等残余高度法是美国的 Suresh 和 Yang<sup>[10]</sup>提出的一种刀具路径生成方法, 国内外的很多学

基金资助: 国家自然科学基金(51005122)资助项目; 航空科学基金(2008ZE52049)资助项目。

收稿日期: 2011-02-25; 修订日期: 2011-11-10

通讯作者: 赵东标, 男, 教授, 博士生导师, E-mail: zdbme@nuaa.edu.cn。

者<sup>[11-18]</sup>对该方法进行了一些改进与提高。但是仍然存在如下几方面问题:相邻路径上的切削点个数完全由之前的路径上的切削点的个数决定;采用当前刀具路径轨迹上在步距方向(即测地线方向)的曲率圆来近似计算轨迹间距,以当前刀位点处的左右两侧等残余高度点间的宽度近似代替步距,对于曲率变化大的曲面会导致步距计算偏差;相邻刀位轨迹间最大步距计算都是假设在一个平面内的,即相邻刀具路径轨迹的切向量方向平行,而事实上并非如此等。因此,目前的等残余高度并非真正意义上的等残余高度,有待进一步的完善和提高。

为了消除冗余的刀具路径轨迹,使得加工后的自由曲面上的残余高度均匀一致,提高加工效率和加工质量,本文提出了一种改进的等残余高度刀具路径生成算法,简称为改进的等残余高度算法,进一步提高了残余高度计算精度,使得加工步距最大化,实现真正意义上的等残余高度加工自由曲面。

## 1 改进的等残余高度算法原理

刀具沿着相邻的两条刀具路径轨迹运动,相邻的刀具扫描体相交得到一条相贯线,如果该相贯线正好位于等残余高度面上,则可以维持加工行间残余高度均匀一致,实现行间距最大化。改进的等残余高度算法加工自由曲面时,首先根据当前刀具路径轨迹上的刀触点,计算步距方向上的等残余高度点及其投影点,重新拟合后得到等残余高度线和等残余高度投影线,根据等残余高度线再计算相邻刀具路径轨迹线。

## 2 改进的等残余高度算法实现

### 2.1 根据当前刀具路径轨迹求取等残余高度线

#### 2.1.1 刀具运动包络体数学模型的建立

自由曲面 $S(u, v)$ 的等距面 $S_{\text{offset}}(u, v)$ 定义为

$$S_{\text{offset}}(u, v) = S(u, v) + dn(u, v) \quad (1)$$

式中: $u$ 和 $v$ 为自由曲面参数; $d$ 为偏置距离; $n(u, v)$ 为曲面的单位法矢量。

用刀具半径为 $R$ 的球头刀加工自由曲面 $S(u, v)$ ,假设残余高度允差为 $h$ ,当 $d=h$ 时的等距面为等残余高度曲面 $S_{\text{sc}}(u, v)$ ;当 $d=R$ 时为刀位曲面 $S_{\text{cl}}(u, v)$ 。

自由曲面上的刀触点 $P_{\text{cc}}$ 对应的刀位点为 $P_{\text{cl}}$ ,所有的刀位点构成了刀位点刀具路径轨迹 $C_{\text{cl}}(t)$ 。在 $P_{\text{cl}}$ 点建立局部直角坐标系 $O_{\text{cl}}X_{\text{cl}}Y_{\text{cl}}Z_{\text{cl}}$ , $P_{\text{cl}}$ 点和 $P_{\text{cc}}$ 点有公共的法线方向, $Z_{\text{cl}}$ 轴沿着 $P_{\text{cc}}$ 点的法矢量方向, $X_{\text{cl}}$ 轴沿着 $C_{\text{cl}}(t)$ 的切线方向, $Y_{\text{cl}}$ 轴按照

右手定则由 $X_{\text{cl}}$ 轴和 $Z_{\text{cl}}$ 轴确定,即 $Y_{\text{cl}}=Z_{\text{cl}} \times X_{\text{cl}}$ ,如图1所示。

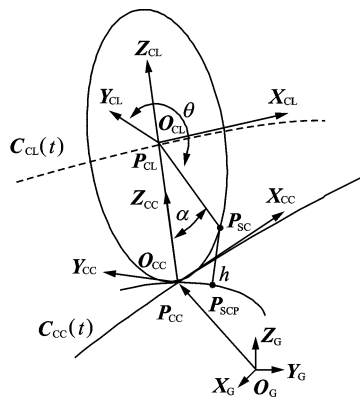


图1 等残余高度算法中的坐标系建立

在 $Y_{\text{cl}}O_{\text{cl}}Z_{\text{cl}}$ 平面内,刀具截平面是一个半径为 $R$ 的圆,用齐次坐标表示法<sup>[19]</sup>表示圆上任意一点,角度参数 $\theta$ 为

$${}^{\text{cl}}P(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ R\cos\theta \\ R\sin\theta \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

将该点转换到全局坐标系 $O_GX_GY_GZ_G$ 中表示,得到刀具运动包络体方程

$${}^G P(t, \theta) = {}^G_{\text{cl}}T(t) {}^{\text{cl}}P(\theta) \quad (3)$$

式中: ${}^G_{\text{cl}}T(t)$ 表示在时刻 $t$ 时,从 $O_{\text{cl}}X_{\text{cl}}Y_{\text{cl}}Z_{\text{cl}}$ 坐标系到 $O_GX_GY_GZ_G$ 坐标系的变换矩阵

$${}^G_{\text{cl}}T(t) = \begin{bmatrix} i & j & k & P_{\text{cl}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中: $i, j, k$ 表示坐标系 $O_{\text{cl}}X_{\text{cl}}Y_{\text{cl}}Z_{\text{cl}}$ 各轴在 $O_GX_GY_GZ_G$ 中的方位,分别定义为

$$i = \frac{C'_{\text{cl}}(t)}{|C'_{\text{cl}}(t)|} \quad k = n(t) \quad j = k \times i \quad (5)$$

对于任意时刻 $t$ ,求取 ${}^G P(t, \theta)$ (简记为 ${}^G P(\theta)$ )上距离自由曲面的垂直距离为 $h$ 的一点,该点即为等残余高度点 $P_{\text{sc}}$ 。其求解涉及到:

- (1)  ${}^G P(\theta)$ 在自由曲面上的投影点;
- (2) 求取 $\theta_n$ ,满足 $|S(u, v) - {}^G P(\theta_n)| = h$ 。

#### 2.1.2 Newton-Raphson 迭代法迭代计算等残余高度点及其投影点

${}^G P(\theta)$ 在自由曲面上的投影点对应最短距离,定义函数 $f_{\text{sc}}(u, v)$

$$f_{\text{sc}}(u, v) = |S(u, v) - {}^G P(\theta)|^2 \quad (6)$$

采用Newton-Raphson 迭代法求取自由曲面上的投影点,迭代参数增量计算

$$\mathbf{H}(\tilde{\omega}^k) \Delta \tilde{\omega}^k = -\nabla f(\tilde{\omega}^k) \quad (7)$$

式中:  $\tilde{\omega}^k$  为迭代参数增量;  $\mathbf{H}(\tilde{\omega}^k)$  为距离函数的 Hessian 矩阵;  $\nabla f(\tilde{\omega}^k)$  为距离函数的梯度。分别表示如下

$$\Delta \tilde{\omega} = \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{H}(\tilde{\omega}) = \begin{bmatrix} \frac{d^2 f_{sc}}{du^2} & \frac{d^2 f_{sc}}{dudv} \\ \frac{d^2 f_{sc}}{dvdu} & \frac{d^2 f_{sc}}{dv^2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\nabla f(\tilde{\omega}) = \begin{bmatrix} \frac{df_{sc}}{du} \\ \frac{df_{sc}}{dv} \end{bmatrix} \quad (10)$$

### 2.1.3 Newton 迭代法中角度初值的确定

定义  ${}^G\mathbf{P}(\theta)$  点到曲面  $\mathbf{S}(u, v)$  的距离函数为

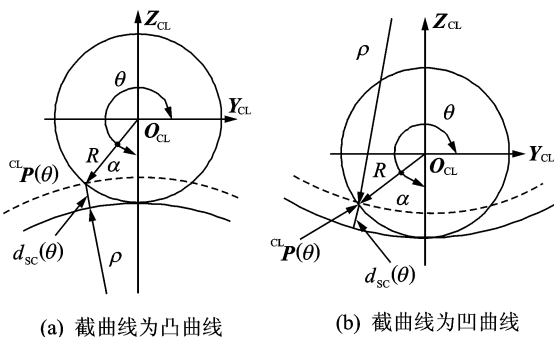
$$d_{sc}(\theta) = |\mathbf{S}(u, v) - {}^G\mathbf{P}(\theta)| \quad (11)$$

求取角度  $\theta_h$ , 满足  $d_{sc}(\theta_h) = h$ , 可以采用二分法、黄金分割法或者 Newton 迭代法求取  $\theta_h$  或  $\alpha_h$ , 但是前者收敛较慢, 而 Newton 迭代法对迭代初值要求较高, 如果迭代初值选择不合适, 可能会影响到迭代收敛, 找不到最终值。现有的研究成果<sup>[17]</sup>中采用的是设置刀触点对应的角度值作为迭代初值, 沿着步距方向采用二分法搜索, 本文借鉴 Sarma<sup>[12]</sup>的研究成果, 用于迭代法求取角度  $\theta_h$  初值确定。

在  $Y_{cl}O_{cl}Z_{cl}$  坐标平面内, 刀具截平面是半径为  $R$  的圆。理论上的  $\alpha = \alpha_0$  时, 满足  $d_{sc}(\theta_0) = h$ , 根据截曲线的曲率半径  $\rho$  和截曲线的凹凸性, 角度初值  $\alpha_0$  分为 3 种情况计算。

(1) 截曲线为凸曲线(图 2(a))

$$\alpha_0 = \arccos\left(\frac{R^2 + (\rho + R)^2 - (\rho + h)^2}{2R(\rho + R)}\right) \quad (12)$$



(a) 截曲线为凸曲线

(b) 截曲线为凹曲线

图2 根据刀触点求取等残余高度点时 Newton 迭代法中角度初值的确定

(2) 截曲线为凹曲线(图 2(b))

$$\alpha_0 = \pi - \arccos\left(\frac{R^2 + (\rho - R)^2 - (\rho - h)^2}{2R(\rho - R)}\right) \quad (13)$$

(3) 截曲线为直线

$$\alpha_0 = \arccos\left(\frac{R - h}{R}\right) \quad (14)$$

### 2.1.4 等残余高度点的 Newton 迭代计算

截面圆上对应角度  $\theta$  或者  $\alpha$  的点  ${}^G\mathbf{P}(\theta)$  到曲面  $\mathbf{S}(u, v)$  的垂直距离为  $d_{sc}(\theta)$ , 当  $\alpha_0 = 0$  时,  $d_{sc}(\theta_0) = 0$ , 即  ${}^G\mathbf{P}(\theta_0) = \mathbf{P}_{cc}$ , 因为残余高度允差  $h$  是一个很小的数, 远小于刀具半径  $R$ ; 当  $\alpha_0 = 90^\circ$  时,  $d_{sc}(\theta_0) > h$ , 由于距离函数的连续性及其可微性, 根据介值定理可知, 必有一个角度  $\alpha_h$ ; 当  $\alpha_h \in [0, 90^\circ]$  时, 满足  $d_{sc}(\theta_h) = h$ 。

Newton 迭代法的迭代过程

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \frac{h - d_{sc}(\theta_i)}{d'_{sc}(\theta_i)} \quad (15)$$

## 2.2 根据等残余高度线求取相邻刀具路径轨迹

根据等残余高度线求取相邻刀具路径轨迹, 类似于根据当前刀具路径轨迹求取等残余高度线。

### 2.2.1 运动包络体数学模型的建立

所有的等残余高度点  $\mathbf{P}_{sc}$  构成了等残余高度线  $\mathbf{C}_{sc}(t)$ , 它到相邻两条刀位点刀具路径轨迹的最短距离都是刀具半径  $R$ 。因此, 相邻的刀位点一定位于以等残余高度点为中心半径为  $R$  的圆上。

同之前的方法类似, 以  $\mathbf{P}_{sc}$  点为坐标原点建立局部直角坐标系  $O_{sc}X_{sc}Y_{sc}Z_{sc}$ 。在  $Y_{sc}O_{sc}Z_{sc}$  平面内, 画一个半径为  $R$  的圆, 用齐次坐标表示法<sup>[19]</sup>表示圆上任意一点  ${}^{sc}\mathbf{P}(\theta)$ , 转换到全局坐标系  $O_G X_G Y_G Z_G$  中, 得到该圆沿着等残余高度线运动扫描后的运动包络体方程

$${}^G\mathbf{P}(t, \theta) = {}^G_{sc}\mathbf{T}(t) {}^{sc}\mathbf{P}(\theta) \quad (16)$$

式中:  ${}^G_{sc}\mathbf{T}(t)$  表示在时刻  $t$  时, 从  $O_{sc}X_{sc}Y_{sc}Z_{sc}$  坐标系到  $O_G X_G Y_G Z_G$  坐标系的变换矩阵

$${}^G_{sc}\mathbf{T}(t) = \begin{bmatrix} i & j & k & \mathbf{P}_{sc} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

式中:  $i, j, k$  表示坐标系  $O_{sc}X_{sc}Y_{sc}Z_{sc}$  各轴在  $O_G X_G Y_G Z_G$  中的方位, 分别定义为

$$i = \frac{C'_{sc}(t)}{|C'_{sc}(t)|} \quad k = n(t) \quad j = k \times i \quad (18)$$

对于任意时刻  $t$ ,  ${}^G\mathbf{P}(t, \theta)$  上距离自由曲面的垂直距离为  $R$  的点为相邻刀具路径轨迹的一个刀位

点  $P_{CL}$ , 拟合所有的  $P_{CL}$  构成了下一条  $C_{CL}(t)$ 。

### 2.2.2 Newton-Raphson 迭代法计算相邻刀具路径轨迹上的刀位点及其投影点

${}^G P(\theta)$  在自由曲面上的投影点对应最短距离, 定义函数  $D_{CL}(u, v)$

$$D_{CL}(u, v) = |S(u, v) - {}^G P(\theta)|^2 \quad (19)$$

### 2.2.3 Newton 迭代法中角度初值的确定

定义点  ${}^G P(\theta)$  到曲面  $S(u, v)$  的距离为

$$d_{CL}(\theta) = |S(u, v) - {}^G P(\theta)| \quad (20)$$

求取  $\theta_R$ , 满足  $d_{CL}(\theta_R) = R$ 。采用前面相同的方法, 给出迭代角度初值  $\beta_0$  的确定方法。

同样, 理论上的  $\beta = \beta_0$ , 满足  $d_{CL}(\theta_0) = R$ , 根据截曲线的曲率半径  $\rho$  和截曲线的凹凸性, 角度初值  $\beta_0$  分为 3 种情况计算。

(1) 截曲线为凸曲线(图 3(a))

$$\beta_0 = \pi - \arccos\left(\frac{R^2 + (\rho + h)^2 - (\rho + R)^2}{2R(\rho + h)}\right) \quad (21)$$

(2) 截曲线为凹曲线(图 3(b))

$$\beta_0 = \arccos\left(\frac{R^2 + (\rho - h)^2 - (\rho - R)^2}{2R(\rho - h)}\right) \quad (22)$$

(3) 截曲线为直线

$$\beta_0 = \arccos\left(\frac{R - h}{R}\right) \quad (23)$$

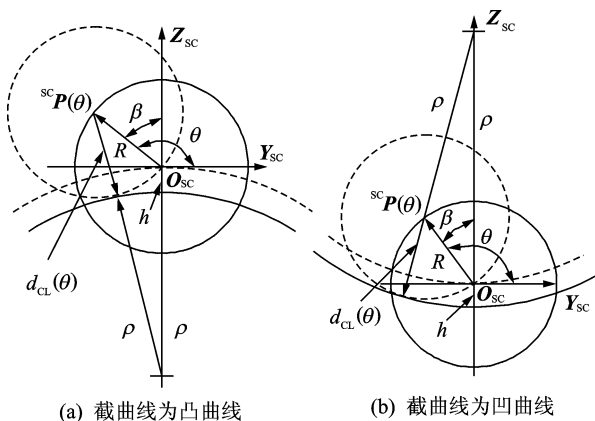


图3 根据等残余高度点求取刀位点时 Newton 迭代法中角度初值的确定

### 2.2.4 相邻刀具路径轨迹上刀位点 Newton 迭代计算

同之前的求取等残余高度点的方法类似, 采用 Newton 迭代法求取相邻刀具路径轨迹上的刀位点

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \frac{R - d_{CL}(\theta)}{d'_{CL}(\theta_i)} \quad (24)$$

## 3 改进的等残余高度刀具路径生成算法

根据本文第 2 部分, 给出改进的等残余高度刀具路径生成算法描述:

(1) 给定自由曲面  $S(u, v)$ 、刀具尺寸  $R$ 、弓高允差  $e$  和残余高度允差  $h$  等加工参数。

(2) 取自由曲面的一条边界, 根据  $e$  按照等弓高误差变步长算法<sup>[20]</sup>进行曲线离散, 得到一系列的刀触点, 构成一条刀触点刀具路径轨迹  $C_{CC}(t)$ 。

(3) 根据  $C_{CC}(t)$ ,  $R$  和  $h$ , 计算等残余高度线  $C_{SC}(t)$  及其在自由曲面上的投影线  $C_{SCP}(t)$ 。

(4) 离散  $C_{SC}(t)$ , 根据离散点计算相邻刀具路径轨迹的刀位点及其投影点。

(5) 拟合所有的离散刀触点得到  $C_{CC}(t)$ , 根据  $e$  重新离散曲线。

(6) 检测  $C_{CC}(t)$  是否覆盖整个曲面加工区域, 则输出全部的  $C_{CC}(t)$  并结束; 否则重复 (3~5)。

## 4 验证实例

对图 4 所示自由曲面进行刀具路径生成, 所选刀具尺寸为  $R = 4 \text{ mm}$ , 残余高度允差  $h = 0.1 \text{ mm}$ , 弓高允差  $e = 0.03 \text{ mm}$ , 迭代允差  $\epsilon = 5 \times 10^{-4}$ 。经过本文算法生成刀具路径轨迹, 得到的刀触点刀具路径轨迹如图 5(a) 所示, 参数域内的刀具路径轨迹如图 5(b) 所示, 虚线对应了等残余高度投影线在参数域内的表示, 采用 Vericut 数控加工仿真软件进行自由曲面的仿真加工如图 5(c) 所示; 采用了改进的等参数法生成刀具路径轨迹, 得到的刀触点刀具路径轨迹如图 5(d) 所示, 参数域内的刀具路径轨迹如图 5(e) 所示, 仿真加工如图 5(f) 所示。UG 自动生成的等参数法刀具路径轨迹类似改进的等参数法。因此, 未再给出 UG 的等参数法刀具路径轨迹及其仿真图。

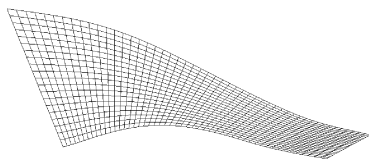


图4 自由曲面

由结果显示, 本文算法得到的刀触点刀具路径轨迹总长度为  $3\,062.041 \text{ mm}$ , 改进的等参数法得到的刀触点刀具路径轨迹总长度为  $4\,440.176 \text{ mm}$ , UG 软件生成的刀触点刀具路径轨迹总长度为  $4\,483.209 \text{ mm}$ 。对比可见, 本文算法所得刀具路

径轨迹总长度仅占后两者的比例分别为68.96%和68.30%，总长度分别减少31.04%和31.70%。因此，本文算法可以大幅减少刀具路径轨迹总长度，极大地提高加工效率。同一残余高度允差要求前提下，采用本文算法所得相邻刀具路径轨迹间的步距不等，大端最大步距 $\Delta u=0.03246$ ，最小步距为 $\Delta u=0.02889$ ，小端最大步距 $\Delta u=0.06062$ ，最小步距 $\Delta u=0.03064$ (图5(b))；采用改进的等参数法，则参数域内的最小步距 $\Delta u=0.02928$ ，最大步距为 $\Delta u=0.03205$ (图5(e))，近似于本文算法在最大端的步距。由于改进的等参数法大小端都采用相同的步距增量，由此会造成小端存在冗余的刀具路径轨迹，降低了曲面加工效率，在小端形成过高的加工精度；VERICUT 仿真加工结果显示改进的等参数法加工后的残余高度从曲面的左侧宽部往右侧窄部方向呈递减趋势，右侧窄端有密集冗余的刀具路径轨迹(图5(f))，曲面残余高度“左大右小”不一致，本文算法所得自由曲面的残余高度在整个曲面上分布均匀一致(图5(c))，没有冗余的刀具路径轨迹，曲面加工质量高于前者。在总共566个点的计算中，有关迭代次数统计信息如表1所示，其中最大迭代次数为两次，共有13个点，有474个点需要迭代一次，迭代角度初值即可满足残余高度允差要求的有79个点，即无需迭代计算，总迭代次数为500次，平均迭代次数为0.88次。

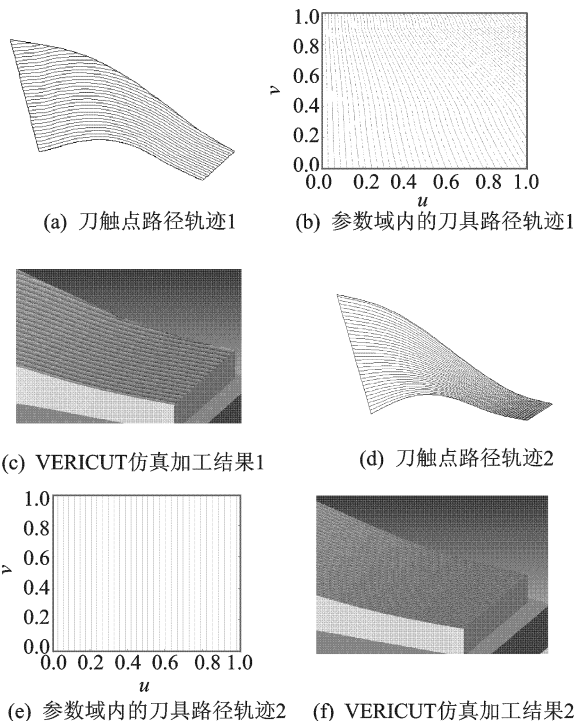


图5 改进的等残余高度法和改进的等参数法生成的刀具路径轨迹对比

表1 迭代次数统计

总点数	需要迭代次数			总迭代次数	平均迭代次数
	0	1	2		
566	79	474	13	500	0.88

## 5 结 论

(1)本文算法相对改进的等参数法和UG的等参数法生成的刀具路径轨迹总长度分别减少31.04%和31.70%。

(2)本文算法生成的刀具路径轨迹加工自由曲面后的残余高度分布均匀一致，而UG的等参数法和改进的等参数法生成的刀具路径轨迹加工自由曲面后，曲面残余高度在冗余刀具路径轨迹区域存在过高的加工精度。

(3)基于Newton迭代法的迭代角度初值计算可以直接或只需1~2次迭代即可得到满足残余高度要求的等残余高度点。

## 参考文献:

- [1] Lin Y, Lee T. An adaptive tool path generation algorithm for precision surface machining [J]. Computer-Aided Design, 1999, 31(4): 237-47.
- [2] Elber G, Cohen E. Toolpath generation for freeform surface models [J]. Computer-Aided Design, 1994, 26(6): 490-496.
- [3] 吴福忠, 柯映林. 组合曲面参数线五坐标加工刀具轨迹的计算 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2003, 15(10): 1247-1252.  
Wu Fuzhong, Ke Yinglin. Iso-parametric tool path planning for five-axis compound surface machining [J]. Journal of Computer Aided Design & Computer Graphics, 2003, 15(10): 1247-1252.
- [4] Loney G, Ozsoy T. NC machining of free form surfaces [J]. Computer-Aided Design, 1987, 19(2): 85-90.
- [5] Feng H, Teng Z. Iso-planar piecewise linear NC tool path generation from discrete measured data points [J]. Computer-Aided Design, 2005, 37(1): 55-64.
- [6] Kiswanto G, Lauwers B, Kruth J. Gouging elimination through tool lifting in tool path generation for five-axis milling based on faceted models [J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2007, 32(3): 293-309.
- [7] Huang Y, Oliver J. Non-constant parameter NC tool path generation on sculptured surfaces [J]. The International Journal of Advanced Manufacturing

- Technology, 1994, 9(5): 281-290.
- [8] Ding S, Mannan M, Poo A, et al. Adaptive iso-planar tool path generation for machining of free-form surfaces[J]. Computer-Aided Design, 2003, 35(2): 141-153.
- [9] 陈涛,罗宏志,钟毅芳,等. 基于曲率的曲面加工刀位轨迹生成算法[J]. 工程图学学报, 2001, 22(2): 29-34.  
Chen Tao, Luo Hongzhi, Zhong Yifang, et al. Curvature based algorithm of cutter location path generation for NC machining of freeform surfaces[J]. Journal of Engineering Graphics, 2001, 22(2): 29-34.
- [10] Suresh K, Yang C. Constant scallop-height machining of free-form surfaces[J]. ASME Journal of Engineering for Industry, 1994, 116(2): 253-259.
- [11] Lin R, Koren Y. Efficient tool-path planning for machining free-form surfaces[J]. ASME Journal of Engineering for Industry, 1996, 118(1): 20-28.
- [12] Sarma R, Dutta D. The geometry and generation of NC tool paths [J]. Journal of Mechanical Design, 1997, 119(2): 253-258.
- [13] Lee Y. Non-isoparametric tool path planning by machining strip evaluation for 5-axis sculptured surface machining [J]. Computer-Aided Design, 1998, 30(7): 559-570.
- [14] 蔡永林, 席光, 樊宏周, 等. 任意曲面叶轮五坐标数控加工刀具轨迹生成[J]. 西安交通大学学报, 2003, 37(1): 77-80.  
Cai Yonglin, Xi Guang, Fan Hongzhou, et al. Tool-path planning for 5-axis numerical control machining of arbitrary surface impeller [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2003, 37(1): 77-80.
- [15] Lo C. Efficient cutter-path planning for five-axis surface machining with a flat-end cutter[J]. Computer-Aided Design, 1999, 31(9): 557-566.
- [16] 叶佩青, 陈涛, 汪劲松. 复杂曲面五坐标数控加工刀具轨迹的规划算法[J]. 机械科学与技术, 2004, 23(8): 883-886.  
Ye Peiqing, Chen Tao, Wang Jinsong. Tool path planning algorithm for five-axis NC machining of sculptured surfaces [J]. Mechanical Science and Technology, 2004, 23(8): 883-886.
- [17] Feng H, Li H. Constant scallop-height tool path generation for three-axis sculptured surface machining[J]. Computer-Aided Design, 2002, 34(9): 647-654.
- [18] 吴宝海, 李山, 张定华, 等. 自由曲面的五坐标端铣加工研究[J]. 中国机械工程, 2007, 18(10): 1135-1139.  
Wu Baohai, Li Shan, Zhang Dinghua, et al. Study on 5-axis end milling of free-form surfaces[J]. China Mechanical Engineering, 2007, 18(10): 1135-1139.
- [19] 熊有伦. 机器人技术基础[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2004.  
Xiong Youlun. Fundamentals of robotics [M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2004.
- [20] Zhao Shitian, Zhao Dongbiao, Fu Yingying. Algorithm of variable forward step size planning in freeform surface machining[C]// 2009 International Conference on Information and Automation (ICIA). Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2009: 618-622.