

## 基于子空间算法的对称结构重频模态识别

张家滨 陈国平

(南京航空航天大学振动工程研究所,南京,210016)

**摘要:**针对飞机等对称结构的重频模态较难识别的问题,在随机子空间算法的基础之上,利用空间投影的性质和响应点位置间的几何关系,分离对称耦合模态,建立对称模态响应和反对称模态响应Hankel矩阵,实现单独利用响应数据识别重频的对称和反对称模态。最后通过仿真算例表明,改进后的方法成功提取了重频模态的振型,避免了传统算法识别结果的中的振型耦合,同时提高了对称模态中固有频率和阻尼的识别精度。

**关键词:**环境激励;重频模态;随机子空间;模态分析

中图分类号:O324;TU311.3;U441

文献标识码:A

文章编号:1005-2615(2012)02-0191-07

## Modal Identification of Symmetrical Structure with Repeated Frequencies Based on Subspace Method

Zhang Jiabin, Chen Guoping

(Institute of Vibration Engineering Research, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China)

**Abstract:** The modals of the symmetrical structure with repeated frequencies, such as aircraft etc, are difficult to identified. For this problem, based on the stochastic subspace method, the paper isolates symmetric coupled modes, through the using of space projection and the geometric relationship of test points, and establishes Hankel matrix with symmetric modal response and the antisymmetric modal response, thus achieving symmetric and antisymmetric modal identification with repeated frequencies using output data only. Finally, simulation examples show that the improved method successfully extracts mode shapes with repeated frequencies, avoids the modal shapes coupling generated by traditional methods, and increases identification accuracy of natural frequency and damping at the same time.

**Key words:** ambient; mode with repeated frequency; stochastic subspace; modal analysis

传统的模态识别方法利用频响函数和脉冲响应函数进行参数识别,但是对称结构的重频模态一直困扰识别精度的难题,很容易产生模态遗漏或者是振型的混淆。尤其是飞机等对称结构,对称和反对称振型对应的固有频率很容易重合,利用频响函数很难有效提取对应的两阶模态,通过快速傅里叶变换(Fast Fourier transtorm, FFT),两阶模态只留下一个峰值或者间隙很小,几乎完全耦合在一起,给识别带来了困难。大型的工程实验一般通过纯模态的方法进行单模态的逐个识别,但是工作量较大

而且对于操作人员的工程经验要求较高。特别是一些工程结构无法施加人工激励的条件下,单独利用响应数据进行识别更是难以区分耦合模态。

时域算法与频域算法不同,未经过FFT变换,原始数据同时包含了所有的模态响应,利用多通道的数据同步采集,理论上存在实现耦合模态参数识别的可能,但是利用传统的随机子空间等时域算法识别得到的振型为耦合模态振型的线性组合,很难得到原始的模态振型。对此本文通过解析子空间算法的投影过程,利用投影空间的过滤特征,实现对

称重频模态的参数识别工作,避免了大量的重复性实验以及纯模态实验,利用单次实验的数据就可以得到模态参数的识别结果,因此具有较好的工程应用价值。

## 1 随机子空间算法

随机子空间算法<sup>[1]</sup>是以线性离散的状态空间方程为基础的

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{W}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{V}(k) \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $\mathbf{y}(k) \in \mathbf{R}^p$ , 为采集的测量数据向量;  $\mathbf{x}(k) \in \mathbf{R}^n$ , 为离散的状态向量;  $\mathbf{W}(k) \in \mathbf{R}^n$ , 为过程噪声, 主要由噪声干扰和模型的不准确引起的, 还包括未知的输入信息;  $\mathbf{V}(k) \in \mathbf{R}^p$ , 为测量噪声, 主要由传感器测量误差引起的, 还包括未知的输入信息;  $k$  为时刻;  $p$  为输出的个数;  $n$  为系统的阶数;  $\mathbf{A}, \mathbf{C}$  分别为系统状态矩阵和系统输出矩阵。

基于参考点的随机子空间识别 (Stochastic subspace identification, SSI) 算法, 建立 Hankel 矩阵

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{j}} \begin{bmatrix} y_0^{\text{ref}} & y_1^{\text{ref}} & y_2^{\text{ref}} & \cdots & y_{j-1}^{\text{ref}} \\ y_1^{\text{ref}} & y_2^{\text{ref}} & y_3^{\text{ref}} & \cdots & y_j^{\text{ref}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{i-1}^{\text{ref}} & y_i^{\text{ref}} & y_{i+1}^{\text{ref}} & \cdots & y_{j+i-2}^{\text{ref}} \\ y_i & y_{i+1} & y_{i+1} & \cdots & y_{j+i-1} \\ y_{i+1} & y_{i+1} & y_{i+2} & \cdots & y_{j+i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{2i-1} & y_{2i} & y_{2i} & \cdots & y_{j+2i-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{0|i-1}^{\text{ref}} \\ \mathbf{Y}_{i-1|2i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_p^{\text{ref}} \\ \mathbf{Y}_f \end{bmatrix} \quad (2)$$

$y_i^{\text{ref}}$  为  $i$  时刻  $r$  个参考点响应,  $y_i$  表示  $i$  时刻所有测点的响应。  $\mathbf{Y}_p^{\text{ref}} = \mathbf{Y}_{0|i-1}^{\text{ref}}$ , 为 Hankel 矩阵的前  $i \times r$  行, 表示过去行空间,  $\mathbf{Y}_f = \mathbf{Y}_{i-1|2i-1}$ , 为 Hankel 矩阵的后  $i$  行, 表示将来行空间。

求响应的将来行空间到过去行空间的投影<sup>[2]</sup>

$$\mathbf{O}_i = \mathbf{Y}_f / \mathbf{Y}_p^{\text{ref}} = \mathbf{Y}_f (\mathbf{Y}_p^{\text{ref}})^{\text{T}} \cdot (\mathbf{Y}_p^{\text{ref}} (\mathbf{Y}_p^{\text{ref}})^{\text{T}})^+ + \mathbf{Y}_p^{\text{ref}} \quad (3)$$

式中:  $(\cdot)^+$  表示求广义逆;  $(\cdot)^{\text{T}}$  表示求转置。

由随机子空间识别理论, 投影矩阵  $\mathbf{O}_i$  可以分解为可观矩阵  $\Gamma_i$  和卡尔曼滤波状态向量  $\hat{\mathbf{X}}_i$  的乘积。进而求得系统矩阵  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{C}$ , 具体的过程可参考文献<sup>[2]</sup>。

## 2 空间投影

投影矩阵表示为<sup>[3]</sup>

$$\mathbf{O}_i^{\text{def}} = \mathbf{Y}_f / \mathbf{Y}_p^{\text{ref}} = \Gamma_i \cdot \hat{\mathbf{X}}_i \quad (4)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_i = \Gamma_i^+ \cdot \mathbf{O}_i = \Gamma_i^+ \cdot \mathbf{Y}_f / \mathbf{Y}_p^{\text{ref}} \quad (5)$$

根据式(4,5), 从矩阵空间表示上看, 状态向量  $\hat{\mathbf{X}}_i$  是由  $\mathbf{Y}_p^{\text{ref}}$  展开得到的<sup>[4]</sup>, 即状态空间为参考点行空间的子集

$$\mathbf{X} \subset \mathbf{Y}_p; \{ \mathbf{x} \in \hat{\mathbf{X}}_i, \mathbf{y} \in \mathbf{Y}_p^{\text{ref}} \} \quad (6)$$

识别对称模态的最大问题为模态重叠, 从而导致无法准确识别<sup>[5]</sup>。若能将参考点行空间  $\mathbf{Y}_p^{\text{ref}}$  所包含的对称模态分离, 投影后得到的状态空间中只包含对称模态中的一阶, 这样就可以实现针对对称模态参数的识别, 避免系统矩阵的重根及振型的耦合。

## 3 对称模态分离

参考点行空间必须包含各阶模态响应, 这样才能保证不遗漏模态。但是同时导致了对称重频模态的识别困难<sup>[6]</sup>, 利用对称测量点, 重新构建参考点行空间, 使得参考点行空间仅包含对称模态响应或者仅包含反对称模态响应。

以图1 简易飞机模型为例。飞机机翼为对称结构, 机翼弯曲模态均包含对称和反对称振型, 且频率较近很难区分, 利用结构对称性, 重新设定参考点行空间。

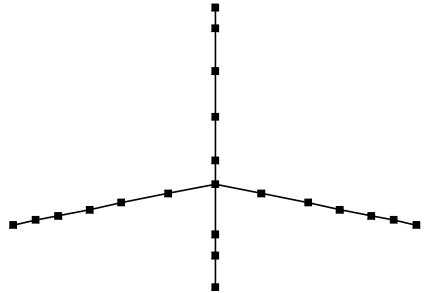


图1 简易飞机模型

### 3.1 采样点对称分布

在采样点和结构都完全对称的情况下利用几何关系进行模态分离。  $\mathbf{y}_i^l$  为机翼左侧  $i$  时刻响应向量,  $\mathbf{y}_i^r$  为机翼右侧  $i$  时刻响应向量。

令  $\mathbf{d}_i^s = (\mathbf{y}_i^l + \mathbf{y}_i^r) / 2$ ,  $\mathbf{d}_i^a = (\mathbf{y}_i^l - \mathbf{y}_i^r) / 2$ ,  $\mathbf{d}_i^s$  为对称模态参考点  $i$  时刻响应,  $\mathbf{d}_i^a$  为反对称模态参考点  $i$  时刻响应。利用结构的几何关系, 分别消去反对称模态

响应和对称模态响应,  $\mathbf{d}_i^s$  和  $\mathbf{d}_i^a$  为响应向量生成, 依然可以作为参考点使用。令

$$\mathbf{y}_i^s = [\mathbf{y}_i^{sT} \quad \mathbf{d}_i^{sT}]^T, \mathbf{y}_i^a = [\mathbf{y}_i^{aT} \quad \mathbf{d}_i^{aT}]^T \quad (7)$$

式中:  $\mathbf{y}_i^s$  为除去对称部位的响应后余下点的响应向量;  $\mathbf{y}_i^s$  包含了对称模态的所有响应信息;  $\mathbf{y}_i^a$  包含了反对称模态的所有响应信息。

利用  $\mathbf{d}_i^s$  和  $\mathbf{d}_i^a$ ,  $\mathbf{y}_i^s$  和  $\mathbf{y}_i^a$  重新构建参考点 Hankel 矩阵

$$\mathbf{H}^s = \frac{1}{\sqrt{j}} \begin{bmatrix} d_0^s & d_1^s & d_2^s & \cdots & d_{j-1}^s \\ d_1^s & d_2^s & d_3^s & \cdots & d_j^s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{j-1}^s & d_j^s & d_{j+1}^s & \cdots & d_{j+i-2}^s \\ \hline y_i^s & y_{i+1}^s & y_{i+2}^s & \cdots & y_{j+i-1}^s \\ y_{i+1}^s & y_{i+2}^s & y_{i+3}^s & \cdots & y_{j+i}^s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{2i-1}^s & y_{2i}^s & y_{2i+1}^s & \cdots & y_{j+2i-1}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{0|i-1}^s \\ \mathbf{Y}_{i-1|2i-1}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_p^s \\ \mathbf{Y}_f^s \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{H}^a = \frac{1}{\sqrt{j}} \begin{bmatrix} d_0^a & d_1^a & d_2^a & \cdots & d_{j-1}^a \\ d_1^a & d_2^a & d_3^a & \cdots & d_j^a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{j-1}^a & d_j^a & d_{j+1}^a & \cdots & d_{j+i-2}^a \\ \hline y_i^a & y_{i+1}^a & y_{i+2}^a & \cdots & y_{j+i-1}^a \\ y_{i+1}^a & y_{i+2}^a & y_{i+3}^a & \cdots & y_{j+i}^a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{2i-1}^a & y_{2i}^a & y_{2i+1}^a & \cdots & y_{j+2i-1}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{0|i-1}^a \\ \mathbf{Y}_{i-1|2i-1}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_p^a \\ \mathbf{Y}_f^a \end{bmatrix} \quad (9)$$

$\mathbf{H}^s$  为对称模态参考点 Hankel 矩阵,  $\mathbf{H}^a$  为反对称模态参考点 Hankel 矩阵。根据式(6)参考点行空间和卡尔曼滤波状态空间之间的关系, 利用  $\mathbf{H}^s$  得到的识别结果中仅包含对称模态, 利用  $\mathbf{H}^a$  得到的识别结构中仅包含反对称模态, 这样就避免了重频给识别带来的影响, 通过两次单独的识别得到对称和反对称模态。但是识别得到的振型为叠加振型, 根据整合的关系, 将其分离, 最后得到

$$\phi_{k_i}^s = [\varphi_{k_i}^s \quad \varphi_{k_i}^s/2 \quad \varphi_{k_i}^s/2]$$

$$\phi_{k_j}^a = [\varphi_{k_j}^a \quad \varphi_{k_j}^a/2 \quad -\varphi_{k_j}^a/2]$$

其中:  $\varphi_{k_i}^s$  对应应该阶非对称部位响应点振型;  $\varphi_{k_i}^s$  和  $\varphi_{k_j}^a$

对应整合后对称部位对称和反对称振型。

### 3.2 采样点非对称分布

对于质量完全对称分布的结构可以通过几何关系构建参考点向量, 但是很多情况结构虽然是对称的, 质量分布会有一定差别, 而且当采样点分布不同的时候, 如果继续利用测点位置几何关系进行处理, 达不到消除对称或反对称模态的效果。因此, 从对称结构的振型入手。

单独测试半边对称部位振型见图 1, 令  $\phi_k^l = [\phi_k^{(l_1)} \quad \cdots \quad \phi_k^{(l_m)}]^T$  为机翼左侧重频模态振型,  $\phi_k^r = [\phi_k^{(r)} \quad \cdots \quad \phi_k^{(r_m)}]^T$  为机翼右侧重频模态振型,  $m$  为单边测试点数。由于测量是分开进行的, 而且振型是相对量, 必须按照同一尺度得到的振型才有意义。因此, 两边各取一点作为基准点(非节点), 计算功率谱, 重合频率所对应的频谱幅值可以近似表示为对称和反对称模态响应之和

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_l &= \eta_l(k_1 \mathbf{F}_a + k_2 \mathbf{F}_s) \\ \mathbf{F}_r &= \eta_r(k_1 \mathbf{F}_a + k_2 \mathbf{F}_s) \end{aligned} \quad (10)$$

其中由于功率谱是不考虑数据相位的, 因此两侧测点频谱幅值之比直接反应了结构对称部位的振动幅值比, 利用这个比值得到同一尺度下的振型, 然后利用振型数据分离响应点模态。令

$$\varphi_k^l = [1/\phi_k^{(l_1)} \quad \cdots \quad 1/\phi_k^{(l_m)}]^T / (\eta_l \cdot \phi_k^{(l_u)}) \quad (11)$$

$$\varphi_k^r = [1/\phi_k^{(r)} \quad \cdots \quad 1/\phi_k^{(r_m)}]^T / (\eta_r \cdot \phi_k^{(r_v)})$$

式中  $l_u$  和  $r_v$  分别代表两侧的基准采样点序号。

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_i^s &= (\mathbf{y}_i^l \cdot \varphi_k^l + \mathbf{y}_i^r \cdot \varphi_k^r) / 2 \\ \mathbf{d}_i^a &= (\mathbf{y}_i^l \cdot \varphi_k^l - \mathbf{y}_i^r \cdot \varphi_k^r) / 2 \end{aligned} \quad (12)$$

得到  $\mathbf{d}_i^s$  和  $\mathbf{d}_i^a$  分别为对称模态参考点  $i$  时刻响应, 反对称模态参考点  $i$  时刻响应, 在此基础上计算  $\mathbf{y}_i^s$  和  $\mathbf{y}_i^a$ , Hankel 矩阵的构建方法与式(8,9)相同。

## 4 理论证明

将 Hankel 矩阵的参考点行空间改变后, 矩阵的构成产生了变化, 两点结论需要证明:

(1) 投影过程依然有效, 数据改变后不影响整个的识别计算过程。

(2) 数据改变后, 不影响系统矩阵  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{C}$  矩阵的识别。

**证明** 定义矩阵

$$\Delta_i^{\text{def}} = (\mathbf{A}^{i-1} \mathbf{G} \quad \mathbf{A}^{i-2} \mathbf{G} \quad \cdots \quad \mathbf{A} \mathbf{G} \quad \mathbf{G}) \in \mathbf{R}^{n \times mi} \quad (13)$$

$\mathbf{G} = \mathbf{E}[\mathbf{x}_{k+i}^{\text{as}} \mathbf{y}_k^{\text{as}T}] \in \mathbf{R}^{n \times r}$  为协方差矩阵。

定义两个由输出数据协方差矩阵组成的块

Toeplitz 矩阵

$$C_i^{as} = \begin{pmatrix} \Lambda_i^{as} & \Lambda_{i-1}^{as} & \Lambda_{i-2}^{as} & \cdots & \Lambda_1^{as} \\ \Lambda_{i+1}^{as} & \Lambda_i^{as} & \Lambda_{i-1}^{as} & \cdots & \Lambda_2^{as} \\ \Lambda_{i+2}^{as} & \Lambda_{i+1}^{as} & \Lambda_i^{as} & \cdots & \Lambda_3^{as} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Lambda_{2i-1}^{as} & \Lambda_{2i-2}^{as} & \Lambda_{2i-3}^{as} & \cdots & \Lambda_i^{as} \end{pmatrix} = \Gamma_i \Delta_i^c \quad (14)$$

式中  $\Lambda_i^{as} = E[y_{k+i} y_k^{asT}] \in R^{l \times r}$  为协方差矩阵

$$L_i^{as} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \bar{\Lambda}_0^{as} & \bar{\Lambda}_{-1}^{as} & \bar{\Lambda}_{-2}^{as} & \cdots & \bar{\Lambda}_{1-i}^{as} \\ \bar{\Lambda}_1^{as} & \bar{\Lambda}_0^{as} & \bar{\Lambda}_{-1}^{as} & \cdots & \bar{\Lambda}_{2-i}^{as} \\ \bar{\Lambda}_2^{as} & \bar{\Lambda}_1^{as} & \bar{\Lambda}_0^{as} & \cdots & \bar{\Lambda}_{3-i}^{as} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{\Lambda}_{i-1}^{as} & \bar{\Lambda}_{i-2}^{as} & \bar{\Lambda}_{i-3}^{as} & \cdots & \bar{\Lambda}_0^{as} \end{pmatrix} \in R^{ri \times ri} \quad (15)$$

$\bar{\Lambda}_i^{as} = E[y_k^{as} y_k^{asT}] \in R^{r \times r}$ , 将式(15)代入投影矩阵的表达式, 得到<sup>[7]</sup>

$$\begin{aligned} O_i &= Y_f / Y_p^{as} = Y_f (Y_p^{as})^T \cdot (Y_p^{as} (Y_p^{as})^T)^{-1} + Y_p^{as} = \\ & C_i^{as} \cdot (L_i^{as})^{-1} \cdot Y_p^{as} = \\ & \Gamma_i \cdot \Delta_i^c \cdot (L_i^{as})^{-1} \cdot Y_p^{as} = \Gamma_i \hat{X}_i^{as} \end{aligned} \quad (16)$$

过程中 Kalman 最佳估计  $X_i$  发生变化, 由式(6)投影过程中的空间关系, 通过数据整合, 改变数据中模态响应的成分, 得到仅包含对称模态响应或者反对称模态响应的状态向量。

由状态空间方程, 得

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{i+1} \\ Y_{i|i}^{as} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} (\hat{X}_i) + \begin{pmatrix} \rho_w \\ \rho_v \end{pmatrix} \quad (17)$$

式中  $\rho_w, \rho_v$  为 Kalman 滤波最佳估计的残差, 由于它们和  $\hat{X}_i$  是相互独立的, 利用新得到的状态向量  $\hat{X}_i$ , 计算系统矩阵  $A$ , 由于状态向量中对称耦合模态响应已经分离, 因此避免了  $A$  矩阵中特征值分解中的重根问题。  $C$  矩阵为观测矩阵, 建立输入和输出直接的关系, 由于  $Y_{i|i}^{as}$  进行了数据整合处理, 通过  $C$  矩阵得到的振型为新的响应向量的振型, 通过反向的处理得到系统的真实振型结果。

综上所述, 通过数据间的运算重新构建参考点进行空间是可行的, 计算过程不会影响识别过程, 仅仅改变了模态空间的组成, 方便进行重频模态的识别。

### 5 仿真算例

以有限元飞机模型作为仿真模型, 左右机翼完全对称, 机翼的弯曲模态均包含对称和反对称模

态, 具体模型如图 2 所示。

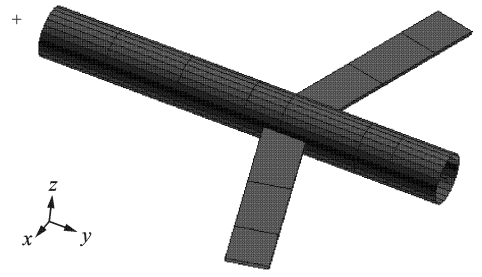


图 2 对称机翼有限元模型

机身顶端固定约束全部自由度, 飞机各阶模态理论值见表 1, 其中飞机机翼一弯及二弯的对称和反对称模态均为重频模态。

表 1 有限元模型模态理论值

序号	固有频率	阻尼 / %	振型
1	3.555	2	机翼对称一弯
2	3.556	2	机翼反对称一弯
3	13.646	2	机身一弯
4	21.811	2	机翼反对称二弯
5	22.054	2	机翼对称二弯

在机翼左右两端各设置一个激励点, 位置为机翼根部 1/3 处, 响应测量点分两种情况考虑, 一种机翼两边对称布点见图 3, 一种是机翼两边非对称布点见图 4。

主要考虑模型前五阶模态, 对比对称模态的识

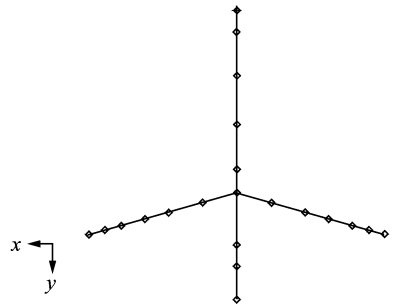


图 3 对称分布测量点位置

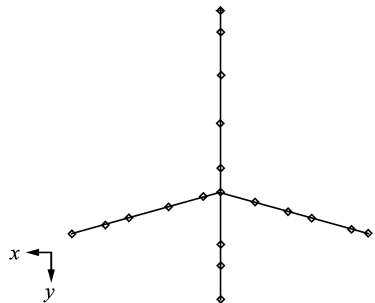


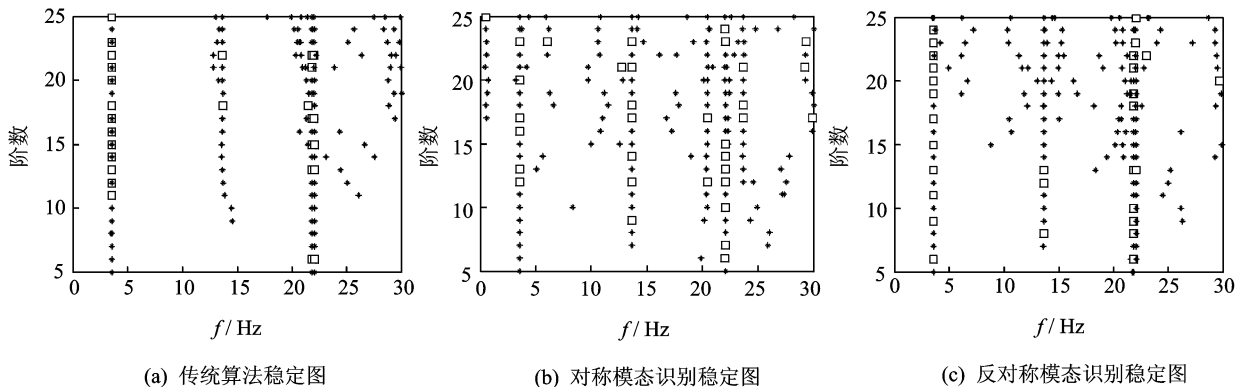
图 4 非对称分布测量点位置

别结果,设定采样率为100 Hz,采样点数为6 000,利用随机子空间算法和本文的方法进行识别,建立识别结果稳定图。取频率识别误差小于1%,阻尼小于5%,振型MAC值大于0.99为稳定点,先针对采样点对称分布的情况,分别采用传统的随机子空间算法和本文方法,识别结果稳定图见图5。

振型、固有频率及阻尼识别结果见图6,7及表2(由于振型主要为机翼振型,振型图为 $xz$ 平面,坐

标系见图2)。

从识别的结果中可以看出,对称布点的情况下,改进后的算法避免了振型识别结果中重频模态的耦合,大幅提高了振型的识别精度,同时频率和阻尼的精度也有了明显的改善。为了进一步验证算法的有效性和抗干扰的性能,在响应信号中分别加入1%,2%和5%的噪声,对比不同干扰下算法的识别精度,其结果如表3所示。



“□”表示稳定点,“\*”表示非稳定点  
图5 识别稳定图

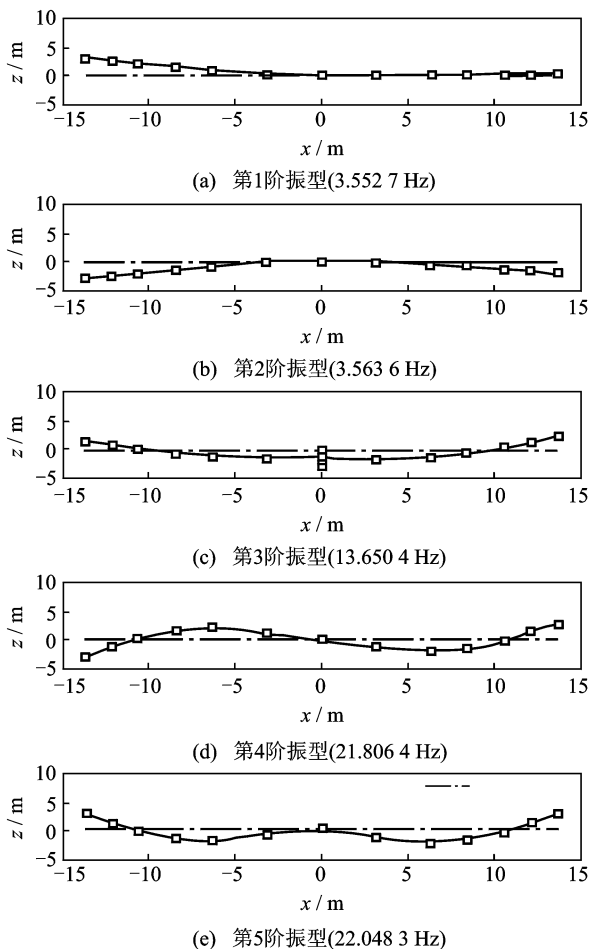


图6 随机子空间振型识别结果

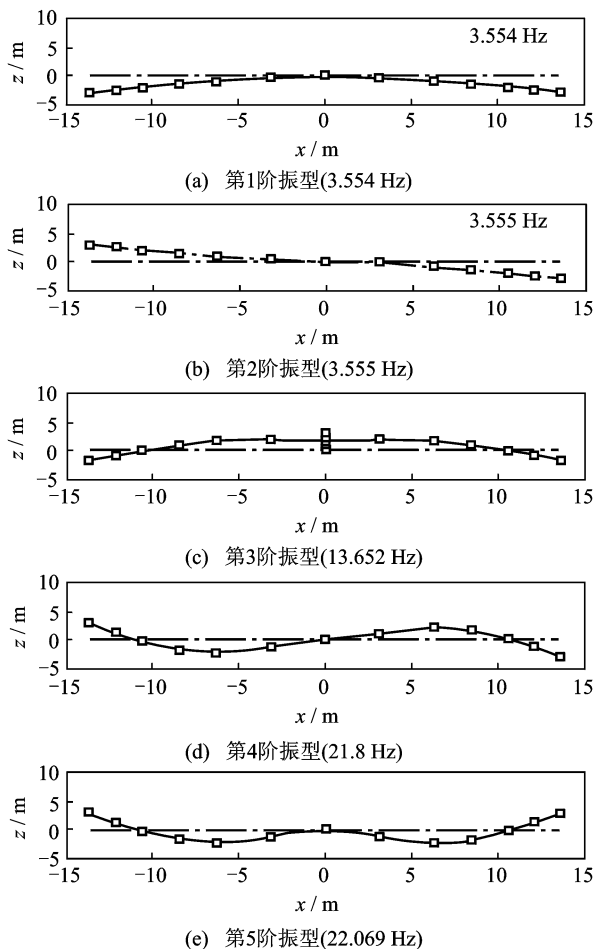


图7 改进后振型识别结果

在不同噪声干扰下,算法得到了较好识别结果,具有一定的抗干扰特性。随着噪声的加大,识别结果的误差略有增加,但幅度很小,较好地克服了噪声对于信号的污染。

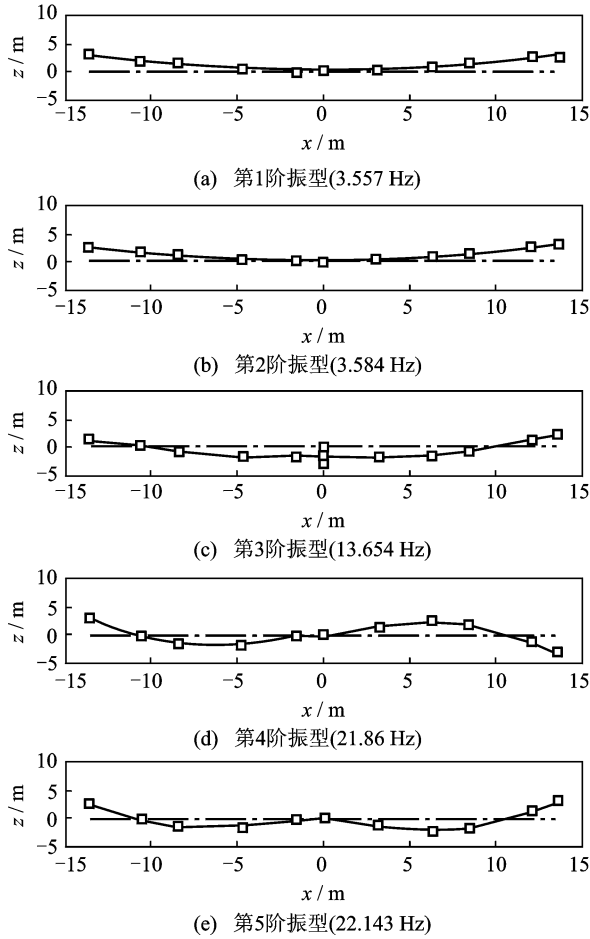


图8 随机子空间振型识别结果

在采样点非对称分布的条件下,利用第2种方法进行识别。对比随机子空间和改进后算法的识别精度,振型、固有频率及阻尼识别结果见图8,9及表4。

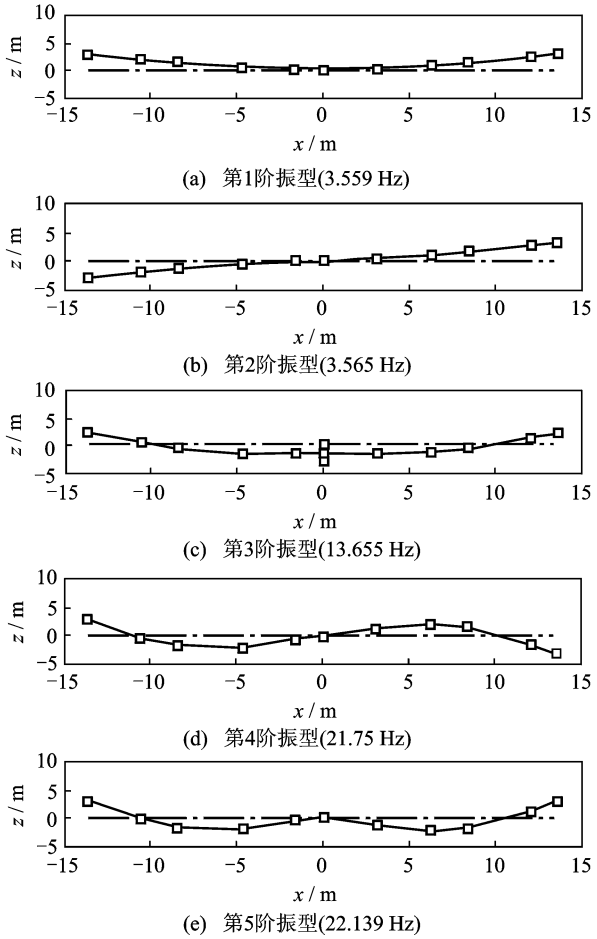


图9 改进后振型识别结果

表2 对称分布采样点模态参数识别结果

阶数	理论值		随机子空间			改进后算法		
	固有频率/Hz	阻尼/%	固有频率/Hz	阻尼/%	振型 MAC	固有频率/Hz	阻尼/%	振型 MAC
1	3.555	2	3.556	3.17	0.598 9	3.554	2.31	1.000 0
2	3.556	2	3.549	1.77	0.309 6	3.555	2.13	0.999 2
3	13.646	2	13.655	3.11	0.937 3	13.652	1.63	0.997 9
4	21.811	2	21.799	2.90	0.999 9	21.800	1.86	0.999 9
5	22.054	2	22.059	1.38	0.984 1	22.069	1.47	1.000 0

表3 不同噪声干扰下对称分布采样点模态参数识别结果

阶数	理论值		加入1%噪声			加入2%噪声			加入5%噪声		
	固有频率/Hz	阻尼/%	固有频率/Hz	阻尼/%	振型 MAC	固有频率/Hz	阻尼/%	振型 MAC	固有频率/Hz	阻尼/%	振型 MAC
1	3.555	2	3.541	1.85	0.997	3.542	2.03	0.998	3.541	1.94	0.992
2	3.556	2	3.549	0.85	0.994	3.548	0.73	0.991	3.572	0.93	0.992
3	13.646	2	13.656	0.98	0.997	13.669	2.29	0.996	13.636	3.45	0.997
4	21.811	2	21.718	1.68	0.997	21.717	1.65	0.993	21.647	1.64	0.990
5	22.054	2	22.025	2.32	0.995	22.025	0.86	0.996	22.120	0.45	0.987

表4 非对称分布采样点模态参数识别结果

随机子空间			改进后算法		
固有频率/ Hz	阻尼/ %	振型/ MAC	固有频率/ Hz	阻尼/ %	振型/ MAC
3.536	2.55	0.235 5	3.559	2.41	0.994 0
3.569	2.2	0.412 5	3.565	1.53	0.998 1
13.654	1.72	0.945 6	13.655	1.82	0.997 9
21.844	1.14	0.999 2	21.750	1.57	1.000 0
22.153	1.23	0.973 2	22.139	1.45	0.997 6

识别结果与均匀分布条件下类似,两种测试条件、通用的随机子空间算法都可以得到对称耦合模态频率,较为精确地识别固有频率。但是振型的识别结果就受到了很大的干扰,左右两边的振型不对称,而且很难分辨对称和反对称振型,振型之间发生耦合,理论振型和实验结果振型之间的MAC值时产生了较大误差。改进后的算法有效地解决了振型的识别误差,不管是在对称布点还是非对称布点的情况下,都得到了比较好的振型识别结果,与理论识别结果的误差很小,同时也提高了固有频率和阻尼的识别精度。在加入噪声干扰情况下,算法体现了较好的抗干扰能力,在5%噪声干扰下依然得到了较好的识别结果。

## 6 结束语

本文在随机子空间算法的基础上,通过重新构建Hankel矩阵,利用投影空间的性质实现了对称耦合模态的参数识别。通过仿真算例表明,在单次利用响应数据的条件下,新的算法较好地解决了对称模态的耦合问题,利用结构的几何关系或者单边测试结果,有效地区分开对称和反对称振型,实现了模态的解耦,同时避免了附加的实验过程,通过数据块间的运算进行解耦,并且在算法的基础上可

以发展分组测试条件下的识别,适用于结构较为复杂需多次测量的条件。

## 参考文献:

- [1] Reynders E, Roeck G D. Reference-based stochastic sub-space identification for experimental and operational modal analysis [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2008, 22(3): 617-637.
- [2] Van Overschee P, De Moor B. Subspace identification for linear systems: theory, implementation and applications[M]. Dordrecht (Netherlands): Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [3] Van Overschee P, De Moor B. Subspace algorithms for the identification of combined deterministic-stochastic systems [J]. Automatica, 1994, 30(1): 75-93.
- [4] 张贤达. 矩阵分析与应用[M]. 北京:清华大学出版社, 2004.  
Zhang xianda. Matrix analysis and applications[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004.
- [5] Viberg M. Subspace-based methods for the identification of linear time-invariant systems [J]. Automatica 1995, 31: 1835-1851.
- [6] 孙久厚, 朱德懋. 固有振动系统动力修改的近频耦合模态子空间摄动法 [J]. 航空学报, 1992, 13(9): 480-483.  
Sun Jiuhou, Zhu Demao. Coupled-mode subspace perturbation method for structure dynamic modification [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 1992, 13(9): 480-483.
- [7] Yu Danjiang, Ren Weixin. EMD-based stochastic subspace identification of structures from operational vibration measurements [J]. Engineering Structures, 2005, 27(12): 1741-1751.