

基于观测器的分段仿射离散系统 H_∞ 控制

杨征山^{1,2} 高亚辉² 黄金泉¹

(1. 南京航空航天大学能源与动力学院, 南京, 210016; 2. 中国航空动力控制系统研究所, 无锡, 214063)

摘要:针对分段仿射离散系统, 提出一种基于观测器的 H_∞ 控制器设计方法。采用分段二次 Lyapunov 函数构造耗散不等式, 以保证闭环系统的稳定性和 H_∞ 性能。通过椭球体近似逼近凸多面体形式的作用域, 并借用奇异值分解技术处理矩阵等式约束, 从而把 H_∞ 性能指标最小化问题转化为线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI) 描述的凸优化问题, 并运用 LMI 工具箱求解。最后通过仿真实例说明所提方法的可行性。

关键词:分段仿射系统; 分段 Lyapunov 函数; H_∞ 性能; 观测器; 线性矩阵不等式 (LMI)

中图分类号: TP273

文献标识码: A

文章编号: 1005-2615(2012)06-0817-07

Observer-Based H_∞ Control of Discrete-Time Piecewise Affine Systems

Yang Zhengshan^{1,2}, Gao Yahui², Huang Jinquan¹

(1. College of Energy & Power Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China;

2. AVIC Aviation Motor Control System Institute, Wuxi, 214063, China)

Abstract: An observer-based H_∞ controller design method for discrete-time piecewise affine systems is presented. The basic idea is to construct dissipation inequality with piecewise-quadratic Lyapunov function to guarantee the stability and H_∞ performance of the closed-loop systems. By approximating polytopic operating regions with ellipsoids and using the singular value decomposition technique to treat the constraint of matrix equality, the minimum problem of the H_∞ performance index is transformed as a convex optimization problem involving linear matrix inequalities (LMIs), which are numerically feasible with commercially available LMI software. A numerical example is also given to verify the proposed theoretical results.

Key words: piecewise affine (PWA) systems; piecewise Lyapunov function; H_∞ performance; observer; linear matrix inequality (LMI)

近年来, 分段仿射 (Piecewise affine, PWA) 系统的状态反馈 H_∞ 控制已经取得了一些成果, 连续系统方面, 文献[1]中提出两步法为 PWA 系统设计鲁棒 H_∞ 控制器, 首先构造条件保证各局部控制器能够镇定对应作用域子系统, 然后基于所有子系统局部稳定的条件设计全局鲁棒 H_∞ 控制器。该方法能将控制器设计问题转化为线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI) 求解问题, 但由于首先要寻找条件保证各子系统稳定, 计算步骤较繁琐, 且保守性较大。为了克服这些缺点, 文献[2]中提

出一步法为 PWA 系统设计鲁棒 H_∞ 控制器, 设计过程中考虑凸多面体形式的作用域信息减少设计的保守性, 通过矩阵转换, 将结论转化为双线性矩阵不等式 (Bilinear matrix inequality, BMI) 描述。然而, 求解 BMI 时, 需要预先给定一组控制器的初始值, 初始值给定的好坏直接影响求解结果的保守性, 并且, 还没有方法能够保证给定的初始值使得 BMI 求解的结果是全局最优的。文献[3]使用椭球体描述作用域信息, 并将作用域信息考虑进 H_∞ 控制器设计中, 成功将结论转化为 LMI 描述, 且没有各子系统

需要局部稳定的限制。离散系统方面,基于椭球体描述作用域的思想,文献[4]为 PWA 系统设计了 H_∞ 控制器,结论也转化为 LMI 描述。

很多时候系统状态并非全部可测量,针对这种情况的 PWA 系统 H_∞ 控制结论较少,仅文献[5]讨论了连续系统的输出反馈 H_∞ 控制问题,且结论只能转化为 BMI 描述。本文针对 PWA 离散系统提出一种基于观测器的 H_∞ 控制方法。设计过程中,采用分段二次 Lyapunov 函数构造耗散不等式,能保证闭环系统从一个作用域切换到另一个作用域时能量耗散。此外,使用椭球体描述作用域信息,并运用 S-Procedure^[6]将其考虑进耗散不等式以处理仿射项。推导过程中,会碰到矩阵等式约束,通过借用奇异值分解技术对其进行处理,最后成功将控制器设计的结论转化为 LMI 描述。

1 问题描述

考虑如下受扰 PWA 离散系统

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(k+1) &= \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}_{1i} \boldsymbol{w}(k) + \\ &\quad \boldsymbol{B}_{2i} \boldsymbol{u}(k) + \boldsymbol{b}_i \\ \boldsymbol{z}(k) &= \boldsymbol{F}_i \boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}_i \boldsymbol{w}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) &= \boldsymbol{C}_i \boldsymbol{x}(k) \quad \boldsymbol{y}(k) \in \boldsymbol{S}_i, i \in \boldsymbol{P} \end{aligned} \tag{1}$$

式中: $\{\boldsymbol{S}_i\}_{i \in \boldsymbol{P}} \subseteq \boldsymbol{R}^p$ 表示将输出空间分割成一组凸多面体形式的作用域; \boldsymbol{P} 表示作用域的索引集; $\boldsymbol{x}(k) \in \boldsymbol{R}^n$ 为系统状态变量; $\boldsymbol{w}(k) \in \boldsymbol{R}^r$ 为 $l_2[0, \infty)$ 空间的外部干扰; $\boldsymbol{u}(k) \in \boldsymbol{R}^m$ 为控制输入; $\boldsymbol{z}(k) \in \boldsymbol{R}^r$ 为评价输出, $\boldsymbol{y}(k) \in \boldsymbol{R}^p$ 为测量输出; $(\boldsymbol{A}_i, \boldsymbol{B}_{1i}, \boldsymbol{B}_{2i}, \boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{F}_i, \boldsymbol{D}_i, \boldsymbol{C}_i)$ 为第 i 个作用域对应子系统的参数矩阵。

将 \boldsymbol{P} 划分为 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_0 \cup \boldsymbol{P}_1$, 其中 \boldsymbol{P}_0 为包含原点的作用域索引集, 即 $\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{P}_1$ 为其余作用域的索引集。记 Ω 为所有可能的从一个作用域切换到它本身或者另一个作用域的索引对集合

$$\Omega = \{(i, j) \mid \boldsymbol{x}(k) \in \boldsymbol{S}_i, \boldsymbol{x}(k+1) \in \boldsymbol{S}_j\}$$

本文有 3 个基本假设: (1) 系统状态从作用域 \boldsymbol{S}_i 切换到 \boldsymbol{S}_j 的时刻, 系统动力学特性由作用域 \boldsymbol{S}_i 内的局部模型决定。 (2) 矩阵 \boldsymbol{C}_i 为行满秩, 即 $\text{rank}(\boldsymbol{C}_i) = p$ 。 (3) 为了方便后续理论推导, 将 \boldsymbol{C}_i 进行奇异值分解: $\boldsymbol{C}_i = \boldsymbol{U}_i [\boldsymbol{H}_i \quad \boldsymbol{0}] \boldsymbol{V}_i^T$, 其中 $\boldsymbol{U}_i \in \boldsymbol{R}^{p \times p}$ 和 $\boldsymbol{V}_i \in$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_i^T \overline{\boldsymbol{P}}_j \overline{\boldsymbol{A}}_i - \overline{\boldsymbol{P}}_i + \overline{\boldsymbol{F}}_i^T \overline{\boldsymbol{F}}_i - \lambda_{ij} \overline{\boldsymbol{E}}_i^T \overline{\boldsymbol{E}}_i & * & * \\ \overline{\boldsymbol{B}}_{1i}^T \overline{\boldsymbol{P}}_j \overline{\boldsymbol{A}}_i + \boldsymbol{D}_i^T \overline{\boldsymbol{F}}_i & \overline{\boldsymbol{B}}_{1i}^T \overline{\boldsymbol{P}}_j \overline{\boldsymbol{B}}_{1i} + \boldsymbol{D}_i^T \boldsymbol{D}_i - \gamma^2 \boldsymbol{I} & * \\ \overline{\boldsymbol{b}}_i^T \overline{\boldsymbol{P}}_j \overline{\boldsymbol{A}}_i - \lambda_{ij} f_i^T \overline{\boldsymbol{E}}_i & \overline{\boldsymbol{b}}_i^T \overline{\boldsymbol{P}}_j \overline{\boldsymbol{B}}_{1i} & \overline{\boldsymbol{b}}_i^T \overline{\boldsymbol{P}}_j \overline{\boldsymbol{b}}_i - \lambda_{ij} (f_i^T f_i - 1) \end{bmatrix} < 0 \quad i \in \boldsymbol{P}_1 \tag{6}$$

式中: $\overline{\boldsymbol{E}}_i = [\boldsymbol{E}_i \boldsymbol{C}_i \quad \boldsymbol{0}]$, 则闭环系统式(4)渐近稳定, 且从外部干扰 $\boldsymbol{w}(k)$ 到评价输出 $\boldsymbol{z}(k)$ 的 H_∞ 性能指

$\boldsymbol{R}^{n \times n}$ 为酉矩阵, $\boldsymbol{H}_i \in \boldsymbol{R}^{p \times p}$ 为对角矩阵, 按照值的大小降序排列。 (3) 存在矩阵 \boldsymbol{E}_i 和标量 f_i 使得 $\boldsymbol{S}_i \subseteq \epsilon_i$, 其中 $\epsilon_i = \{\boldsymbol{y}(k) \mid \|\boldsymbol{E}_i \boldsymbol{y}(k) + f_i\| \leq 1\}$ 。有很多计算椭球体外逼近凸多面体的方法^[6], 椭球体 ϵ_i 还可以被改写成如下二次型不等式的形式

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{y}(k) \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_i^T \boldsymbol{E}_i & * \\ f_i^T \boldsymbol{E}_i & f_i^T f_i - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}(k) \\ 1 \end{bmatrix} \leq 0 \tag{2}$$

本文的控制目标是设计基于观测器的控制器使得闭环系统渐近稳定, 且从外部干扰 $\boldsymbol{w}(k)$ 到评价输出 $\boldsymbol{z}(k)$ 的 H_∞ 性能指标最小。

2 基于观测器的 H_∞ 控制器设计

考虑如下基于观测器的控制器

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{x}}(k+1) &= \boldsymbol{A}_i \hat{\boldsymbol{x}}(k) + \boldsymbol{B}_{2i} \boldsymbol{u}(k) + \boldsymbol{b}_i + \\ &\quad \boldsymbol{L}_i (\hat{\boldsymbol{y}}(k) - \boldsymbol{y}(k)) \\ \hat{\boldsymbol{y}}(k) &= \boldsymbol{C}_i \hat{\boldsymbol{x}}(k) \\ \boldsymbol{u}(k) &= \boldsymbol{K}_i \hat{\boldsymbol{x}}(k) \quad \boldsymbol{y}(k) \in \boldsymbol{S}_i, i \in \boldsymbol{P} \end{aligned} \tag{3}$$

式中: $\hat{\boldsymbol{x}}(k) \in \boldsymbol{R}^n$ 为 $\boldsymbol{x}(k)$ 的估计值; $\hat{\boldsymbol{y}}(k)$ 为观测器输出; $\boldsymbol{K}_i, \boldsymbol{L}_i$ 分别为待求解的反馈控制增益和观测器增益。定义估计误差为 $\boldsymbol{e}(k) = \hat{\boldsymbol{x}}(k) - \boldsymbol{x}(k)$, 联合式(1, 3)得到闭环系统

$$\begin{aligned} \xi(k+1) &= \overline{\boldsymbol{A}}_i \xi(k) + \overline{\boldsymbol{B}}_{1i} \boldsymbol{w}(k) + \overline{\boldsymbol{b}}_i \\ \boldsymbol{z}(k) &= \overline{\boldsymbol{F}}_i \xi(k) + \boldsymbol{D}_i \boldsymbol{w}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) &\in \boldsymbol{S}_i, i \in \boldsymbol{P} \end{aligned} \tag{4}$$

式中: $\xi(k) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(k) \\ \boldsymbol{e}(k) \end{bmatrix}, \overline{\boldsymbol{A}}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{B}_{2i} \boldsymbol{K}_i & \boldsymbol{B}_{2i} \boldsymbol{K}_i \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{L}_i \boldsymbol{C}_i \end{bmatrix},$

$$\overline{\boldsymbol{B}}_{1i} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{1i} \\ -\boldsymbol{B}_{1i} \end{bmatrix}, \overline{\boldsymbol{b}}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_i \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \overline{\boldsymbol{F}}_i = [\boldsymbol{F}_i \quad \boldsymbol{0}].$$

下面给出 H_∞ 性能分析结果, 作为后续讨论的基础。

引理 1 给定 $\gamma > 0$ 。如果对于所有的 $(i, j) \in \Omega$, 存在矩阵 $\boldsymbol{K}_i, \boldsymbol{L}_i, \overline{\boldsymbol{P}}_i = \overline{\boldsymbol{P}}_i^T > \boldsymbol{0}$, 标量 $\lambda_{ij} > 0$, 满足

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_i^T \overline{\boldsymbol{P}}_j \overline{\boldsymbol{A}}_i - \overline{\boldsymbol{P}}_i + \overline{\boldsymbol{F}}_i^T \overline{\boldsymbol{F}}_i & * \\ \overline{\boldsymbol{B}}_{1i}^T \overline{\boldsymbol{P}}_j \overline{\boldsymbol{A}}_i + \boldsymbol{D}_i^T \overline{\boldsymbol{F}}_i & \overline{\boldsymbol{B}}_{1i}^T \overline{\boldsymbol{P}}_j \overline{\boldsymbol{B}}_{1i} + \boldsymbol{D}_i^T \boldsymbol{D}_i - \gamma^2 \boldsymbol{I} \end{bmatrix} < 0 \quad i \in \boldsymbol{P}_0 \tag{5}$$

标小于 γ 。

证明: 式(6)等价于

$$\begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{P}}_i - \lambda_{ij} \bar{\mathbf{E}}_i^\top \bar{\mathbf{E}}_i & * & * \\ 0 & -\gamma^2 \mathbf{I} & * \\ -\lambda_{ij} f_i^\top \bar{\mathbf{E}}_i & 0 & -\lambda_{ij} (f_i^\top f_i - 1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_i^\top \\ \bar{\mathbf{B}}_{1i}^\top \\ \bar{\mathbf{b}}_i^\top \end{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_j [\bar{\mathbf{A}}_i \quad \bar{\mathbf{B}}_{1i} \quad \bar{\mathbf{b}}_i] + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_i^\top \\ \bar{\mathbf{D}}_i^\top \\ 0 \end{bmatrix} [\bar{\mathbf{F}}_i \quad \bar{\mathbf{D}}_i \quad 0] < 0 \quad (7)$$

因此,对任意系统状态 $\xi(k) \neq 0$ 和外部干扰 $\mathbf{w}(k)$,存在

$$\begin{bmatrix} \xi(k) \\ \mathbf{w}(k) \\ 1 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{P}}_i - \lambda_{ij} \bar{\mathbf{E}}_i^\top \bar{\mathbf{E}}_i & * & * \\ 0 & -\gamma^2 \mathbf{I} & * \\ -\lambda_{ij} f_i^\top \bar{\mathbf{E}}_i & 0 & -\lambda_{ij} (f_i^\top f_i - 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(k) \\ \mathbf{w}(k) \\ 1 \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_i & \bar{\mathbf{B}}_{1i} & \bar{\mathbf{b}}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(k) \\ \mathbf{w}(k) \\ 1 \end{bmatrix} \right\}^\top \bar{\mathbf{P}}_j \left\{ \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_i & \bar{\mathbf{B}}_{1i} & \bar{\mathbf{b}}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(k) \\ \mathbf{w}(k) \\ 1 \end{bmatrix} \right\} + \left\{ \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_i & \bar{\mathbf{D}}_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(k) \\ \mathbf{w}(k) \\ 1 \end{bmatrix} \right\}^\top \left\{ \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_i & \bar{\mathbf{D}}_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(k) \\ \mathbf{w}(k) \\ 1 \end{bmatrix} \right\} < 0 \quad (8)$$

将式(8)重新整理为

$$\begin{aligned} & \xi^\top(k+1) \bar{\mathbf{P}}_j \xi(k+1) - \xi^\top(k) \bar{\mathbf{P}}_i \xi(k) + \mathbf{z}^\top(k) \mathbf{z}(k) - \gamma^2 \mathbf{w}^\top(k) \mathbf{w}(k) - \lambda_{ij} \begin{bmatrix} \xi(k) \\ 1 \end{bmatrix}^\top \\ & \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{E}}_i^\top \bar{\mathbf{E}}_i & * \\ f_i^\top \bar{\mathbf{E}}_i & f_i^\top f_i - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(k) \\ 1 \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (9)$$

可以把式(9)变换为

$$\begin{aligned} & \xi^\top(k+1) \bar{\mathbf{P}}_j \xi(k+1) - \xi^\top(k) \bar{\mathbf{P}}_i \xi(k) + \mathbf{z}^\top(k) \mathbf{z}(k) - \gamma^2 \mathbf{w}^\top(k) \mathbf{w}(k) - \lambda_{ij} \begin{bmatrix} \mathbf{y}(k) \\ 1 \end{bmatrix}^\top \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 2\mathbf{R}_i - \mathbf{Q}_{1i} & * & * & * & * & * & * \\ -\mathbf{G}_i & 2\mathbf{R}_i - \mathbf{Q}_{2i} & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \gamma^2 \mathbf{I} & * & * & * & * \\ \mathbf{A}_i \mathbf{R}_i + \mathbf{B}_{2i} \mathbf{W}_{1i} & \mathbf{B}_{2i} \mathbf{W}_{1i} & \mathbf{B}_{1i} & \mathbf{Q}_{1j} + \alpha_{ij} \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^\top & * & * & * \\ 0 & \mathbf{A}_i \mathbf{R}_i + \mathbf{W}_{2i} \mathbf{C}_i & -\mathbf{B}_{1i} & \mathbf{G}_j & \mathbf{Q}_{2j} & * & * \\ \mathbf{F}_i \mathbf{R}_i & 0 & \mathbf{D}_i & 0 & 0 & \mathbf{I} & * \\ \mathbf{E}_i \mathbf{C}_i \mathbf{R}_i & 0 & 0 & \alpha_{ij} f_i \mathbf{b}_i^\top & 0 & 0 & \alpha_{ij} (f_i f_i^\top - \mathbf{I}) \end{bmatrix} > 0 \quad i \in \mathbf{P}_1 \quad (15)$$

式中: $\mathbf{R}_i = \mathbf{V}_i \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1i} & * \\ 0 & \mathbf{R}_{2i} \end{bmatrix} \mathbf{V}_i^\top$, 则闭环系统式(4)渐近稳定,且从外部干扰 $\mathbf{w}(k)$ 到评价输出 $\mathbf{z}(k)$ 的 H_∞ 性能指标小于 γ 。控制器的状态反馈控制增益和观测器增益分别为 $\mathbf{K}_i = \mathbf{W}_{1i} \mathbf{R}_i^{-1}$ 及 $\mathbf{L}_i = \mathbf{W}_{2i} \mathbf{U}_i \mathbf{H}_i \mathbf{R}_{1i}^{-1} \mathbf{H}_i^{-1} \mathbf{U}_i^\top$ 。

证明:下面证明 LMI 式(14)保证式(5)成立,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_i^\top \mathbf{E}_i & * \\ f_i^\top \mathbf{E}_i & f_i^\top f_i - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}(k) \\ 1 \end{bmatrix} < 0 \quad (10)$$

由于作用域信息式(2)的存在,根据 S-procedure,对于 $\mathbf{y}(k) \in \mathbf{S}_i, i \in \mathbf{P}_1$,式(10)能保证如下条件成立

$$\begin{aligned} & \xi^\top(k+1) \bar{\mathbf{P}}_j \xi(k+1) - \xi^\top(k) \bar{\mathbf{P}}_i \xi(k) + \mathbf{z}^\top(k) \mathbf{z}(k) - \gamma^2 \mathbf{w}^\top(k) \mathbf{w}(k) < 0 \end{aligned} \quad (11)$$

通过类似的推导,对于 $\mathbf{y}(k) \in \mathbf{S}_i, i \in \mathbf{P}_0$,可以从式(5)推出式(11)。构造分段二次 Lyapunov 函数 $\mathbf{V}(\xi(k)) = \xi^\top(k) \bar{\mathbf{P}}_i \xi(k)$,则式(11)等价于耗散不等式

$$\begin{aligned} & \mathbf{V}(\xi(k+1)) + \|\mathbf{z}(k)\|^2 - \gamma^2 \|\mathbf{w}(k)\|^2 < \mathbf{V}(\xi(k)) \end{aligned} \quad (12)$$

式(12)能保证闭环系统式(4)渐近稳定,且从外部干扰 $\mathbf{w}(k)$ 到评价输出 $\mathbf{z}(k)$ 的 H_∞ 性能指标小于 γ 。

在引理 1 的基础上,下面的定理给出基于异步观测器的控制器的 LMI 设计方法。

定理 1 给定 $\gamma > 0$ 。如果对于所有的 $(i, j) \in \Omega$,存在正定对称阵 $\mathbf{Q}_{1i} \in \mathbf{R}^{n \times n}, \mathbf{Q}_{2i} \in \mathbf{R}^{n \times n}, \mathbf{R}_{1i} \in \mathbf{R}^{p \times p}, \mathbf{R}_{2i} \in \mathbf{R}^{(n-p) \times (n-p)}$,矩阵 $\mathbf{G}_i \in \mathbf{R}^{n \times n}, \mathbf{W}_{1i} \in \mathbf{R}^{m \times n}, \mathbf{W}_{2i} \in \mathbf{R}^{n \times p}$,标量 $\alpha_{ij} > 0$,满足 LMIs

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{1i} & * \\ \mathbf{G}_i & \mathbf{Q}_{2i} \end{bmatrix} > 0 \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} 2\mathbf{R}_i - \mathbf{Q}_{1i} & * & * & * & * & * & * \\ -\mathbf{G}_i & 2\mathbf{R}_i - \mathbf{Q}_{2i} & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \gamma^2 \mathbf{I} & * & * & * & * \\ \mathbf{A}_i \mathbf{R}_i + \mathbf{B}_{2i} \mathbf{W}_{1i} & \mathbf{B}_{2i} \mathbf{W}_{1i} & \mathbf{B}_{1i} & \mathbf{Q}_{1j} & * & * & * \\ 0 & \mathbf{A}_i \mathbf{R}_i + \mathbf{W}_{2i} \mathbf{C}_i & -\mathbf{B}_{1i} & \mathbf{G}_j & \mathbf{Q}_{2j} & * & * \\ \mathbf{F}_i \mathbf{R}_i & 0 & \mathbf{D}_i & 0 & 0 & \mathbf{I} & * \\ 0 & i \in \mathbf{P}_0 \end{bmatrix} > 0 \quad (14)$$

LMI 式(15)保证式(6)成立,然后根据引理 1 即可得到本定理的结论。首先根据式(15)证明式(6)的成立。

文献[7]给出了条件,可以看出条件 $\mathbf{R}_i =$

$$\mathbf{V}_i \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1i} & * \\ 0 & \mathbf{R}_{2i} \end{bmatrix} \mathbf{V}_i^\top = \mathbf{R}_i^\top \text{ 和 } \mathbf{J}_i = \mathbf{U}_i \mathbf{H}_i \mathbf{R}_{1i} \mathbf{H}_i^{-1} \mathbf{U}_i^\top \text{ 意味着}$$

等式 $C_i R_i = J_i C_i$ 成立。联合 $C_i R_i = J_i C_i$ 与 $K_i =$

$W_{1i} R_i^{-1}, L_i = W_{2i} U_i H_i R_{1i}^{-1} H_i^{-1} U_i^T$, 由式(15)得到

$$\begin{bmatrix} 2\bar{R}_i - \bar{Q}_i & * & * & * & * \\ 0 & \gamma^2 I & * & * & * \\ \bar{A}_i \bar{R}_i & \bar{B}_{1i} & \bar{Q}_j + \alpha_{ij} \bar{b}_i \bar{b}_i^T & * & * \\ \bar{F}_i \bar{R}_i & D_i & 0 & I & * \\ \bar{E}_i \bar{R}_i & 0 & \alpha_{ij} f_i \bar{b}_i^T & 0 & \alpha_{ij} (f_i f_i^T - I) \end{bmatrix} > 0 \quad (16)$$

式中: $\bar{Q}_i = \begin{bmatrix} Q_{1i} & * \\ G_i & Q_{2i} \end{bmatrix}$, $\bar{R}_i = \begin{bmatrix} R_i & * \\ 0 & R_i \end{bmatrix}$ 。另一方面, 式(13)意味着 $\bar{Q}_i = \bar{Q}_i^T > 0$, 进而可以得到 $(\bar{R}_i - \bar{Q}_i)^T \bar{Q}_i^{-1} (\bar{R}_i - \bar{Q}_i) \geq 0$, 等价于 $\bar{R}_i \bar{Q}_i^{-1} \bar{R}_i \geq 2\bar{R}_i - \bar{Q}_i$ 。因此, 式(16)能保证

$$\begin{bmatrix} \bar{R}_i \bar{Q}_i^{-1} \bar{R}_i & * & * & * & * \\ 0 & \gamma^2 I & * & * & * \\ \bar{A}_i \bar{R}_i & \bar{B}_{1i} & \bar{Q}_j + \alpha_{ij} \bar{b}_i \bar{b}_i^T & * & * \\ \bar{F}_i \bar{R}_i & D_i & 0 & I & * \\ \bar{E}_i \bar{R}_i & 0 & \alpha_{ij} f_i \bar{b}_i^T & 0 & \alpha_{ij} (f_i f_i^T - I) \end{bmatrix} > 0 \quad (17)$$

对式(17)左右同乘以 $\text{diag}\{\bar{R}_i^{-1}, I, I, I, I\}$, 然后运用 Schur 补^[6], 可将式(17)写成

$$\begin{bmatrix} \bar{Q}_i^{-1} & * & * & * \\ 0 & \gamma^2 I & * & * \\ \bar{A}_i & \bar{B}_{1i} & \bar{Q}_j + \alpha_{ij} \bar{b}_i \bar{b}_i^T & * \\ \bar{F}_i & D_i & 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{E}_i^T \\ 0 \\ \alpha_{ij} \bar{b}_i f_i^T \\ 0 \end{bmatrix} > 0 \quad (18)$$

根据矩阵求逆公式 $(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)DA^{-1}$ ^[8], 可以得到

$$(I - f_i^T f_i)^{-1} = I + f_i^T (I - f_i f_i^T)^{-1} f_i$$

$$f_i^T (I - f_i f_i^T)^{-1} = (I - f_i^T f_i)^{-1} f_i^T \quad (19)$$

利用式(19), 可以将式(18)转化为

$$\begin{bmatrix} \bar{Q}_i^{-1} + \alpha_{ij}^{-1} \bar{E}_i^T \bar{E}_i & * & * & * \\ 0 & \gamma^2 I & * & * \\ \bar{A}_i & \bar{B}_{1i} & \bar{Q}_j & * \\ \bar{F}_i & D_i & 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_{ij}^{-1} \bar{E}_i^T f_i^T \\ 0 \\ \bar{b}_i \\ 0 \end{bmatrix} > 0 \quad (20)$$

对式(20)运用 Schur 补, 然后左右分别乘以

$$\phi = \text{diag}\{I, I, \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}\} \text{ 和 } \phi_{2i}^T, \text{ 得到}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{Q}_i^{-1} + \alpha_{ij}^{-1} \bar{E}_i^T \bar{E}_i & * & * & * & * \\ 0 & \gamma^2 I & * & * & * \\ \alpha_{ij}^{-1} f_i \bar{E}_i & 0 & \alpha_{ij}^{-1} (f_i^T f_i - I) & * & * \\ \bar{A}_i & \bar{B}_{1i} & \bar{b}_i & \bar{Q}_j & * \\ \bar{F}_i & D_i & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (21)$$

运用 Schur 补, 式(21)等价于

$$\begin{bmatrix} \bar{Q}_i^{-1} + \alpha_{ij}^{-1} \bar{E}_i^T \bar{E}_i & * & * \\ 0 & \gamma^2 I & * \\ \alpha_{ij}^{-1} f_i \bar{E}_i & 0 & \alpha_{ij}^{-1} (f_i^T f_i - I) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{A}_i^T \\ \bar{B}_{1i}^T \\ \bar{b}_i^T \end{bmatrix} \bar{Q}_j^{-1} \begin{bmatrix} \bar{A}_i & \bar{B}_{1i} & \bar{b}_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{F}_i^T \\ D_i^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{F}_i & D_i & 0 \end{bmatrix} > 0 \quad (22)$$

令 $\bar{Q}_i^{-1} = \bar{P}_i$, $\bar{Q}_j^{-1} = \bar{P}_j$, $\alpha_{ij}^{-1} = \lambda_{ij}$, 可以将不等式(22)转化为式(6)。到此, 已经从式(15)证明了式(6)的成立。类似的, 还可以根据式(14)证明式(5)的成立。然后, 根据引理1可知, 闭环系统式(4)渐近稳定, 且从外部干扰 $w(k)$ 到评价输出 $z(k)$ 的 H_∞ 性能指标小于 γ 。

注解1 条件式(13~15)不仅是关于变量 $Q_{1i}, Q_{2i}, R_{1i}, R_{2i}, G_i, W_{1i}, W_{2i}$ 和 α_{ij} 的 LMI, 而且是关于 γ^2 的 LMI, 因此, 最优 H_∞ 性能指标可以通过求解如下 LMI 优化问题获得

$$\min_{\gamma^2, Q_{1i}, Q_{2i}, R_{1i}, R_{2i}, G_i, W_{1i}, W_{2i}, \alpha_{ij}} \gamma^2 \quad (23)$$

s. t. 式(13 ~ 15)

式中 $(i, j) \in \Omega$ 。如果优化问题式(23)有最优解 $(\gamma_o, Q_{1io}, Q_{2io}, R_{1io}, R_{2io}, G_{io}, W_{1io}, W_{2io}, \alpha_{ijo})$, 则最优 H_∞ 性能指标为 γ_o , 对应的状态反馈控制增益和观测器增益分别为 $K_i = W_{1io} R_{1io}^{-1}, L_i = W_{2io} U_i H_i R_{1io}^{-1} H_i^{-1} U_i^T$ 。

定理1给出了基于分段二次 Lyapunov 函数的 H_∞ 控制器设计方法, 通过其结论很容易得到基于公共二次 Lyapunov 函数的 H_∞ 控制器设计方法。

推论1 如果存在正定对称阵 $Q_1 \in R^{n \times n}, Q_2 \in R^{n \times n}, R_{1i} \in R^{p \times p}, R_{2i} \in R^{(n-p) \times (n-p)}$, 矩阵 $G \in R^{n \times n}, W_{1i} \in R^{m \times n}, W_{2i} \in R^{n \times p}$, 标量 $\gamma > 0, \alpha_i > 0$, 使得 LMI 优化问题

$$\min_{\gamma^2, Q_1, Q_2, R_{1i}, R_{2i}, G, W_{1i}, W_{2i}, \alpha_i} \gamma^2 \quad (24)$$

s. t.

$$\begin{bmatrix} Q_1 & * \\ G & Q_2 \end{bmatrix} > 0 \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} 2\mathbf{R}_i - \mathbf{Q}_1 & * & * & * & * & * \\ -\mathbf{G} & 2\mathbf{R}_i - \mathbf{Q}_2 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \gamma^2 \mathbf{I} & * & * & * \\ \mathbf{A}_i \mathbf{R}_i + \mathbf{B}_{2i} \mathbf{W}_{1i} & \mathbf{B}_{2i} \mathbf{W}_{1i} & \mathbf{B}_{1i} & \mathbf{Q}_1 & * & * \\ 0 & \mathbf{A}_i \mathbf{R}_i + \mathbf{W}_{2i} \mathbf{C}_i & -\mathbf{B}_{1i} & \mathbf{G} & \mathbf{Q}_2 & * \\ \mathbf{F}_i \mathbf{R}_i & 0 & \mathbf{D}_i & 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad i \in \mathbf{P}_0 \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} 2\mathbf{R}_i - \mathbf{Q}_1 & * & * & * & * & * & * \\ -\mathbf{G} & 2\mathbf{R}_i - \mathbf{Q}_2 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \gamma^2 \mathbf{I} & * & * & * & * \\ \mathbf{A}_i \mathbf{R}_i + \mathbf{B}_{2i} \mathbf{W}_{1i} & \mathbf{B}_{2i} \mathbf{W}_{1i} & \mathbf{B}_{1i} & \mathbf{Q}_1 + \alpha_i \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^T & * & * & * \\ 0 & \mathbf{A}_i \mathbf{R}_i + \mathbf{W}_{2i} \mathbf{C}_i & -\mathbf{B}_{1i} & \mathbf{G} & \mathbf{Q}_2 & * & * \\ \mathbf{F}_i \mathbf{R}_i & 0 & \mathbf{D}_i & 0 & 0 & \mathbf{I} & * \\ \mathbf{E}_i \mathbf{C}_i \mathbf{R}_i & 0 & 0 & \alpha_i \mathbf{f}_i \mathbf{f}_i^T & 0 & 0 & \alpha_i (\mathbf{f}_i \mathbf{f}_i^T - \mathbf{I}) \end{bmatrix} > 0 \quad i \in \mathbf{P}_1 \quad (27)$$

式中: $\mathbf{R}_i = \mathbf{V}_i \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1i} & * \\ 0 & \mathbf{R}_{2i} \end{bmatrix} \mathbf{V}_i^T$, 有最优解 $(\gamma_o, \mathbf{Q}_{1o}, \mathbf{Q}_{2o}, \mathbf{R}_{1io}, \mathbf{R}_{2io}, \mathbf{G}_o, \mathbf{W}_{1io}, \mathbf{W}_{2io}, \alpha_{io})$, 则闭环系统式(4)渐近稳定, 且从外部干扰 $\mathbf{w}(k)$ 到评价输出 $\mathbf{z}(k)$ 的 H_∞ 性能指标最优, 其值为 γ_o 。控制器的状态反馈控制增益和观测器增益分别为 $\mathbf{K}_i = \mathbf{W}_{1io} \mathbf{R}_{1io}^{-1}$, $\mathbf{L}_i = \mathbf{W}_{2io} \mathbf{U}_i \mathbf{H}_i \mathbf{R}_{1io}^{-1} \mathbf{H}_i^{-1} \mathbf{U}_i^T$ 。

证明: LMI 优化问题式(24)中, 令 $\mathbf{Q}_{1i} = \mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_{2i} = \mathbf{Q}_2$, $\mathbf{G}_i = \mathbf{G}$, $\alpha_{ij} = \alpha_i$, 即可得到本结论, 且此时系统的公共二次 Lyapunov 函数为 $\mathbf{V}(\xi(k)) = \xi^T(k) \bar{\mathbf{P}} \xi(k)$, 其中 $\bar{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & * \\ \mathbf{G} & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix}^{-1}$ 。

注解 2 基于公共二次 Lyapunov 函数的 H_∞ 控制器设计方法要比基于分段二次 Lyapunov 函数的 H_∞ 控制器设计方法保守, 因为如果优化问题式(24)有最优解 $(\gamma_o, \mathbf{Q}_{1o}, \mathbf{Q}_{2o}, \mathbf{R}_{1io}, \mathbf{R}_{2io}, \mathbf{G}_o, \mathbf{W}_{1io}, \mathbf{W}_{2io}, \alpha_{io})$, 则优化问题式(23)肯定有可行解 $(\gamma_f, \mathbf{Q}_{1if}, \mathbf{Q}_{2if}, \mathbf{R}_{1if}, \mathbf{R}_{2if}, \mathbf{C}_{if}, \mathbf{W}_{1if}, \mathbf{W}_{2if}, \alpha_{ijf})$, 其中 $\gamma_f = \gamma_o$, $\mathbf{Q}_{1if} = \mathbf{Q}_{1o}$, $\mathbf{Q}_{2if} = \mathbf{Q}_{2o}$, $\mathbf{R}_{1if} = \mathbf{R}_{1io}$, $\mathbf{R}_{2if} = \mathbf{R}_{2io}$, $\mathbf{G}_{if} = \mathbf{G}_o$, $\mathbf{W}_{1if} = \mathbf{W}_{1io}$, $\mathbf{W}_{2if} = \mathbf{W}_{2io} \alpha_{ijf} = \alpha_{io}$, 反之却不成立。但是优化问题式(24)的计算量要比式(23)小, 因为式(23)除了要满足式(24)中所有的 LMI, 还要另外满足因作用域之间切换带来的 LMI。

3 仿 真

将所提出的控制律应用到非线性连续搅拌反应釜^[9], 模型如下

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= -\phi \mathbf{x}_1 \mathbf{k}(\mathbf{x}_2) + \mathbf{q}(\mathbf{x}_{1f} - \mathbf{x}_1) \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \beta \phi \mathbf{x}_1 \mathbf{k}(\mathbf{x}_2) - (\mathbf{q} + \delta) \mathbf{x}_2 + \delta(\mathbf{u} + \mathbf{w}) + \mathbf{q} \mathbf{x}_{2f} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{k}(\mathbf{x}_2) &= \exp(\mathbf{x}_2 / (1 + \mathbf{x}_2 / \chi)) \end{aligned} \quad (28)$$

式中: $\beta = 8.0$, $\phi = 0.072$, $\delta = 0.3$, $\chi = 20.0$, $\mathbf{x}_{1f} = 1.0$, $\mathbf{x}_{2f} = 0.0$, $\mathbf{q} = 1.0$, $\mathbf{w} = e^{-0.0001t} \sin(2\pi \times 0.5t)$ 为系统遭受的干扰。自治系统具有 3 个稳态点: $\mathbf{x}_{s1} = [0.856 \quad 0.886]$, $\mathbf{x}_{s2} = [0.552 \quad 2.751 \quad 7]$, $\mathbf{x}_{s3} = [0.235 \quad 4 \quad 4.705 \quad 0]$ 。状态 \mathbf{x}_2 的工作范围为 $\mathbf{x}_2 \in [0, 6]$, 目标是将系统镇定到稳态点 \mathbf{x}_{s1} 。

将输出空间化分为如下 3 个作用域: $\mathbf{S}_1 = \{\mathbf{y} | 0 \leq \mathbf{y} \leq 1.8\}$, $\mathbf{S}_2 = \{\mathbf{y} | 1.8 < \mathbf{y} < 3.7\}$, $\mathbf{S}_3 = \{\mathbf{y} | 3.7 < \mathbf{y} < 6\}$, 每个作用域包含一个稳态点。基于 Taylor 展开, 将动力学方程式(28)在各个稳态点进行线性化, 每一个作用域内会有一个局部仿射模型。选择采样周期 $T = 0.5 \text{ s}$, 把得到的分段仿射模型离散化, 然后通过变换 $\mathbf{x}(k) = \zeta(k) + \mathbf{x}_{s1}$ 将稳态点 \mathbf{x}_{s1} 的坐标平移到原点, 其中 $\zeta(k)$ 为平移后新坐标系下的状态。坐标平移后的系统为

$$\begin{aligned} \zeta(k+1) &= \mathbf{A}_i \zeta(k) + \mathbf{B} \mathbf{w}(k) + \mathbf{B} \mathbf{u}(k) + \mathbf{b}_i \\ \Upsilon(k) &= \mathbf{C} \zeta(k) \\ \Upsilon(k) &\in \mathbf{S}_i, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (29)$$

式中 $\Upsilon(k) = \mathbf{y}(k) - \mathbf{C} \mathbf{x}_{s1}$, 且

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} 0.415 \ 9 & -0.066 \ 0 \\ 0.672 \ 7 & 0.878 \ 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} 0.095 \ 6 & -0.172 \ 7 \\ 3.235 \ 3 & 1.732 \ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_3 &= \begin{bmatrix} -1.123 \ 7 & -0.250 \ 5 \\ 12.989 \ 6 & 2.354 \ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0.150 \ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0.048 \ 1 \\ -0.385 \ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{b}_3 &= \begin{bmatrix} -0.361 \ 3 \\ 2.890 \ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [0 \quad 1] \end{aligned}$$

系统式(29)的作用域信息可以描述成式(2)的形式, 对应的参数为 $E_1 = 1.111 \ 1$, $f_1 = -0.015 \ 6$,

$E_2=1.052\ 6, f_2=-1.962\ 1, E_3=0.869\ 6, f_3=-3.447\ 0$ 。假设系统评价输出为 $z=F\zeta(k)$, 其中 $F=[0\ 1]$, 则通过求解 LMI 优化问题式(23)可以获得基于观测器的 H_∞ 控制器, 其增益和系统 H_∞ 性能指标为

$$\begin{aligned} K_1 &= [2.410\ 7\ \ -25.539\ 9] \\ K_2 &= [5.091\ 6\ \ -28.758\ 7] \\ K_3 &= [-30.166\ 5\ \ -38.849\ 3] \\ L_1 &= [0.020\ 5\ \ -1.304\ 1]^T \\ L_2 &= [0.027\ 9\ \ -1.532\ 5]^T \\ L_3 &= [0.019\ 1\ \ -1.907\ 4]^T \\ \gamma_o &= 0.100\ 5 \end{aligned}$$

运用所得 H_∞ 控制器在工作范围内做了多组仿真验证, 结果都能使系统镇定到稳态点 x_{s1} 。进而, 为了验证控制器的 H_∞ 性能, 还与基于文献[9]所提方法求解出的镇定控制器进行仿真对比, 对比结果显示本文控制器能更加有效的抑制干扰。图 1 记录了初始状态分别为 $x(0)=x_{s3}, x(0)=[1.2\ 0.2]$, 且系统无干扰时的仿真结果。图 2 给出了相

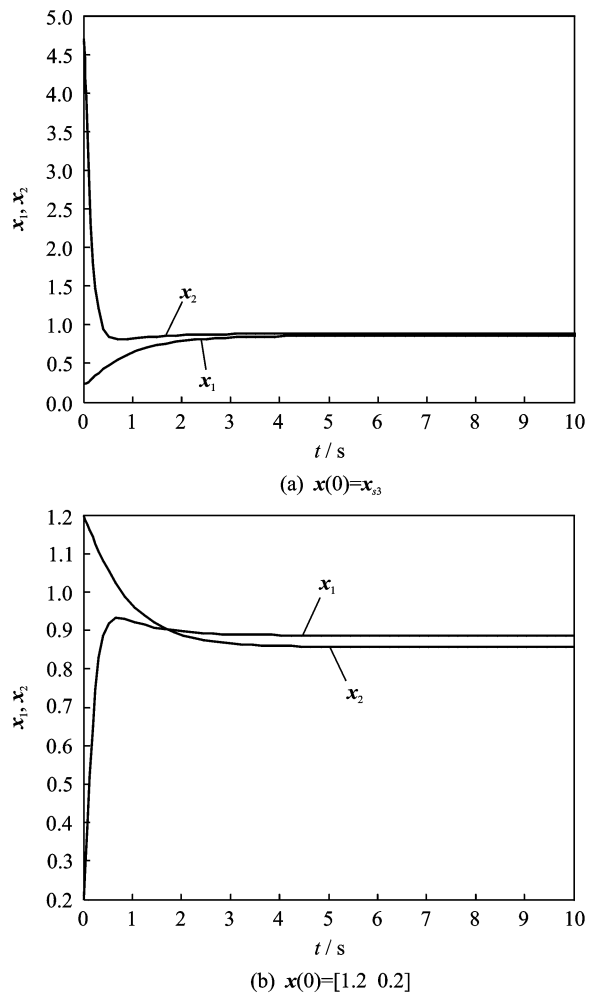


图 1 无扰闭环控制系统响应特性

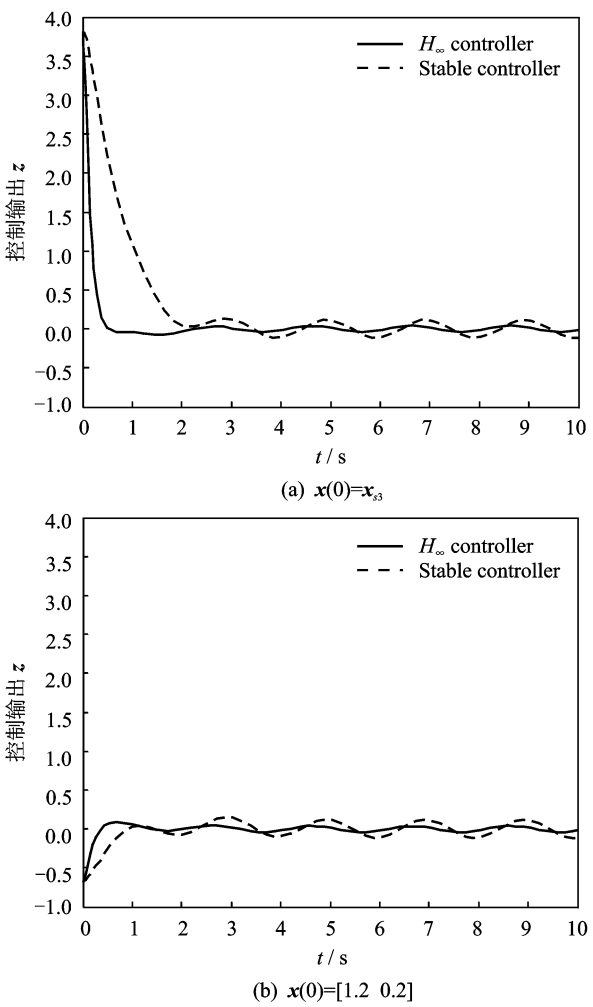


图 2 受扰闭环控制系统 H_∞ 性能评价指标对比
($w=e^{-0.0001t}\sin(2\pi\times0.5t)$)

同初始条件但非零干扰时, 与文献[9]控制器的抗干扰能力对比情况。

4 结束语

本文讨论了 PWA 离散系统的基于观测器的输出反馈 H_∞ 控制问题, 通过构造耗散不等式保证系统能量耗散, 考虑椭球体描述的作用域信息以处理仿射项, 并借用奇异值分解技术处理矩阵等式约束, 最后将控制器设计的结论转化为 LMI 描述。仿真结果表明, 所提方法不仅能使系统稳定, 而且能有效抑制干扰。类似于文献[10], 本文考虑的 PWA 系统是在输出空间划分作用域, 但很多系统的作用域划分是在状态空间进行的^[11-13], 此时不能保证系统和控制器在同一时刻切换到同一作用域, 如何为这类系统设计 H_∞ 控制器有待进一步研究。

参考文献:

[1] Feng G. Controller design and analysis of uncertain

piecewise-linear systems[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 2002,49(2):224-232.

[2] Zhu Y, Li D Q, Feng G. H_∞ controller synthesis of uncertain piecewise continuous-time linear systems [J]. IEEE Proc Control Theory Appl, 2005, 152 (5):513-519.

[3] Rodrigues L, Boukas E K. Piecewise-linear H_∞ controller synthesis with applications to inventory control of switched production systems[J]. Automatica, 2006,42(8):1245-1254.

[4] Gao Yahui, Liu Zhiyuan, Chen Hong. Non-synchronized observer-based control of discrete-time piecewise affine systems [J]. Acta Automatica Sinica, 2009,35(10):1341-1346.

[5] Zhang J, Tang W. Output feedback H_∞ control for uncertain piecewise linear systems [J]. Journal of Dynamical and Control Systems, 2008,14(1):121-144.

[6] 俞立. 鲁棒控制-线性矩阵不等式的处理方法[M]. 北京:清华大学出版社,2002:6-20.

[7] Daniel W C H, Lu G. Robust stabilization for a class of discrete-time nonlinear systems via output feedback: The unified LMI approach[J]. Int J Control, 2003,76(2):105-115.

[8] Kailath T. Linear Systems [M]. USA: Prentice-Hall, Inc. , 1989:67-69.

[9] 刘志林. 分段仿射系统的控制器设计及预测控制方法研究[D]. 中国:哈尔滨工业大学,2007:40-109.

[10] Gao Yahui, Liu Zhiyuan, Chen Hong. Observer-based controller design of discrete time piecewise affine systems[J]. Asian Journal of Control, 2010, 12(4):558-567.

[11] Feng G. Nonsynchronized state estimation of discrete time piecewise linear system[J]. IEEE Transactions on Signal Processing. 2006,54(1):295-303.

[12] Rodrigues L, How J P. Observer-based control of piecewise-affine systems[J]. International Journal of Control, 2003,76(5):459-477.

[13] Gao Y, Liu Z, Chen H. Non-synchronized observer-based control of discrete-time piecewise affine systems: An LMI approach [J]. 2009, 35(10):1341-1346.