

一种稳定的浸没边界-格子波尔兹曼方法

吴杰¹ 舒昌^{1,2} 赵宁¹

(1. 南京航空航天大学航空宇航学院, 南京, 210016; 2. 新加坡国立大学机械工程系, 新加坡, 119260)

摘要: 基于强制边界条件的浸没边界-格子波尔兹曼方法 (Immersed boundary-lattice Boltzmann method, IB-LBM) 提出了一种稳定的 IB-LBM。在该方法中, 采用了具有良好稳定性的多松弛时间 (Multi-relaxation time, MRT) 模型代替原来的单松弛时间 (Single-relaxation time, SRT) 模型。因而, 在保证无滑移边界条件能够精确满足的同时, 该方法的稳定性和适用性都得到了提高。通过对中高雷诺数下二维圆柱绕流算例的模拟, 计算所得的数值结果与其他文献中的结果吻合, 从而验证了该方法的可行性。

关键词: 浸没边界-格子波尔兹曼方法; 强制边界条件; 多松弛时间

中图分类号: O3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-2615(2013)03-0316-06

Stable Immersed Boundary-Lattice Boltzmann Method

Wu Jie¹, Shu Chang^{1,2}, Zhao Ning¹

(1. College of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China;
2. Department of Mechanical Engineering, National University of Singapore, Singapore, 119260)

Abstract: Based on the boundary condition-enforced immersed boundary-lattice Boltzmann method (IB-LBM), a stable variant of IB-LBM is proposed. By replacing the single-relaxation time (SRT) model in boundary condition-enforced IB-LBM with the multi-relaxation time (MRT) model, its stability and applicability are improved. In the meantime, the strict satisfaction of non-slip boundary condition is still guaranteed. To validate the current method, the simulation of two-dimensional flow over a circular cylinder with moderate and high Reynolds number is carried out. By comparing the obtained numerical results with previous data in literature, the good agreement is achieved, which illustrates the capability of the proposed method.

Key words: immersed boundary-lattice Boltzmann method (IB-LBM); boundary condition-enforced; multi-relaxation time (MRT)

近年来, 一种叫做浸没边界法 (Immersed boundary method, IBM) 的数值方法已经被广泛地应用于模拟流体绕边界流动的问题。IBM 最早是由 Peskin^[1] 在研究心脏血液流时提出的。它的基本思想是用某种体积力来代替流场中边界对其周围流体的影响。这样处理的好处在于含有此种体积力的 Navier-Stoke(N-S) 方程可以直接在规则网格上进行离散并求解, 而不再考虑流场中边界的具体形状及其位置, 因而也就消除了传统方法对贴

体网格的需求。所以, IBM 有效地简化了对物体绕流问题的计算求解过程, 尤其是当物体形状很复杂的时候。

另一方面, 作为不同于 N-S 方程模拟流体运动的另一类计算方法, 格子波尔兹曼方法 (Lattice Boltzmann method, LBM) 已经被成功地应用于各种不同流体问题的研究^[2], 其中包括多相流、微流体流及多孔介质流等。LBM 的最大特点是形式简单并容易实现。它可以分解成两个简单的连续变

基金项目: 中国博士后基金(20110491418)资助项目; 中央高校基本科研业务费专项资金(100156XAA12113)资助项目。

收稿日期: 2012-04-14; **修订日期:** 2013-03-03

通信作者: 吴杰, 男, 副教授, 1979 年出生, E-mail: wuj@nuaa.edu.cn。

化过程:迁移和碰撞。而它惟一的应变变量是密度分布函数(Density distribution function, DDF)。通过对 DDF 在动量空间上进行积分,就可以求得宏观变量如密度、速度等。与传统基于 N-S 方程的数值方法相比,LBM 避免了对非线性项以及泊松方程的求解。因此,它是一种简单且高效的流场模拟方法。

在 IBM 和 LBM 中,流场通常都在规则的 Cartesian 网格上进行离散。基于这个共同点,可以把两种方法有效地结合起来,也就是浸没边界-格子波尔兹曼方法(Immersed boundary-lattice Boltzmann method, IB-LBM)。这项工作最早是由 Feng 和 Michaelides^[3]完成的。在此之后,IB-LBM 得到了不断地改进和提高并被用于处理各种物体绕流问题^[4-7]。但是,这些传统 IB-LBM 的一个主要缺陷是无滑移边界条件只能近似满足。这是由于对代替边界作用的体积力进行显式计算而造成的。最近,Wu 和 Shu^[8]提出了一种强制边界条件的 IB-LBM。不同于传统的 IB-LBM,该方法通过强制边界条件对体积力进行隐式求解,这样就保证了无滑移边界条件的精确满足。

然而,由于采用了单松弛时间(Single-relaxation time, SRT)的 LBM 模型,强制边界条件的 IB-LBM 会出现数值计算的不稳定,例如在较高雷诺数的情况下。基于 Wu 和 Shu 的方法,通过引入多松弛时间(Multi-relaxation time, MRT)模型^[9],本文提出了一种稳定的 IB-LBM。该方法在保证边界条件精确满足的同时,还能够准确地模拟中高雷诺数下的物体绕流问题。

1 数值方法

对于二维粘性不可压流,强制边界条件的 IB-LBM 的控制方程为

$$f_a(\mathbf{x} + \mathbf{e}_a \delta t, t + \delta t) = f_a(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\tau} [f_a(\mathbf{x}, t) - f_a^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t)] + F_a(\mathbf{f}, \mathbf{e}_a) \quad (1)$$

$$\rho \mathbf{u} = \sum_a \mathbf{e}_a f_a + \frac{1}{2} \mathbf{f} \delta t \quad (2)$$

式中: \mathbf{x} 为网格坐标; f_a 为密度分布函数; f_a^{eq} 为其相应的平衡状态; τ 为单松弛时间系数; \mathbf{e}_a 为粒子速度; \mathbf{f} 为代替边界作用的体积力; F_a 为其在 LBM 方程中相应的项。在本文的数值模拟中,采用的是 D2Q9 粒子速度模型,所以粒子速度 \mathbf{e}_a 为

$$\mathbf{e}_a = \begin{cases} (0, 0) & \alpha = 0 \\ (\pm 1, 0), (0, \pm 1) & \alpha = 1 \sim 4 \\ (\pm 1, \pm 1) & \alpha = 5 \sim 8 \end{cases} \quad (3)$$

而平衡分布函数为

$$f_a^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t) = \rho \omega_a \left[1 + \frac{\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{u})^2 - (c_s |\mathbf{u}|)^2}{2c_s^4} \right] \quad (4)$$

式中: $c_s^2 = 1/3$; $\omega_0 = 4/9$; $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 1/9$; $\omega_5 = \omega_6 = \omega_7 = \omega_8 = 1/36$; ρ 为密度; ω_a 为平衡函数系数; \mathbf{u} 为速度; c_s 为 LBM 中的声速。

在强制边界条件的 IB-LBM 中, \mathbf{f} 可以通过流体的速度修正量 $\delta \mathbf{u}$ 求解,而 $\delta \mathbf{u}$ 则是由边界速度的修正量 $\delta \mathbf{u}_B$ 决定。关于 $\delta \mathbf{u}_B$ 的方程组为

$$\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B} \quad (5)$$

式中: $\mathbf{X} = \{\delta \mathbf{u}_B^1, \delta \mathbf{u}_B^2, \dots, \delta \mathbf{u}_B^m\}^T$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{m1} & \delta_{m2} & \dots & \delta_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{11}^B & \delta_{12}^B & \dots & \delta_{1m}^B \\ \delta_{21}^B & \delta_{22}^B & \dots & \delta_{2m}^B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n1}^B & \delta_{n2}^B & \dots & \delta_{nm}^B \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_B^1 \\ \mathbf{U}_B^2 \\ \vdots \\ \mathbf{U}_B^m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{m1} & \delta_{m2} & \dots & \delta_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^* \\ \mathbf{u}_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^* \end{bmatrix}$$

其中 m 为边界点的个数, n 为边界周围 Cartesian 网格点的个数。 δ 和 δ^B 中 $\delta_{ij} = D_{ij}(\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{X}_B^l) \cdot \Delta x \Delta y$, $\delta_{ij}^B = D_{ij}(\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{X}_B^l) \Delta s_l$, $l = 1, \dots, m$ 。其中 $D_{ij}(\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{X}_B^l)$ 为 Delta 函数,下标 i 和 j 表示 Cartesian 网格, B 表示物体边界。Delta 函数是连接 Cartesian 网格点 \mathbf{x} 和边界点 \mathbf{X}_B 的桥梁,其表达式为^[10]

$$D_{ij}(\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{X}_B^l) = \frac{1}{h^2} \delta\left(\frac{x_{ij} - X_B^l}{h}\right) \delta\left(\frac{y_{ij} - Y_B^l}{h}\right) \quad (6a)$$

$\delta(r) =$

$$\begin{cases} \frac{1}{8}(3 - 2|r| + \sqrt{1 + 4|r| - 4r^2}) & |r| < 1 \\ \frac{1}{8}(5 - 2|r| - \sqrt{-7 + 12|r| - 4r^2}) & 1 \leq |r| < 2 \\ 0 & 2 \leq |r| \end{cases} \quad (6b)$$

式中: h 为 Cartesian 网格步长。在 IB-LBM 中, $h = \Delta x = \Delta y$ 。另外, Δs_l 为单位边界元的长度, \mathbf{U}_B 为边界的速度,而 \mathbf{u}^* 为流体速度的中间值,它是指未经修正的流场速度。在求得 $\delta \mathbf{u}_B$ 后,体积力 \mathbf{f} 可以通过以下的关系式得到

$$\mathbf{f} = 2\rho \delta \mathbf{u} / \delta t \quad (7a)$$

$$\delta \mathbf{u} = \sum_l \delta \mathbf{u}_B^l D_{ij}(\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{X}_B^l) \Delta s_l \quad (7b)$$

同样地,作用在边界上力可以直接通过 $\delta \mathbf{u}_B$ 获得

$$\mathbf{F} = -2\rho \delta \mathbf{u}_B / \delta t \quad (8)$$

此外,用 LBM 模拟流场时,对宏观量如密度、速度和压力求解为

$$\rho = \sum_{\alpha} f_{\alpha}, \rho \mathbf{u}^* = \sum_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} f_{\alpha}, p = c_s^2 \rho \quad (9)$$

由于强制边界条件的 IB-LBM 采用的是 SRT 模型,在某些情况如中高雷诺数时,数值计算的稳定性会受到影响。其表现为压力和速度场在梯度大的区域内出现剧烈震荡^[9],并且这些震荡将会在整个计算区域传播。为了克服这样的问题,采用的方法是把不同的物理量如动量、能量等在动量空间分开处理,使用不同的松弛时间系数使它们各自松弛到相应的平衡状态。这样,由于大梯度的存在而导致的震荡将会被有效地抑制。因此,为了提高该方法的稳定性,本文引入了 MRT 模型,其控制方程为

$$f_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{\alpha} \delta t, t + \delta t) = f_{\alpha}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} [\mathbf{R}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{R}^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t)] \quad (10)$$

式中: \mathbf{R} 为 f_{α} 在动量空间上的一组物理量, \mathbf{R}^{eq} 为其相应的平衡态,它们的表达式为

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \{\rho, e, \epsilon, j_x, q_x, j_y, q_y, p_{xx}, p_{xy}\}^T, \mathbf{R}^{\text{eq}} = \{0, e^{\text{eq}}, \epsilon^{\text{eq}}, 0, q_x^{\text{eq}}, 0, q_y^{\text{eq}}, p_{xx}^{\text{eq}}, p_{xy}^{\text{eq}}\}^T, \\ e^{\text{eq}} &= -2\rho + 3(j_x^2 + j_y^2)/\rho, \epsilon^{\text{eq}} = \rho - 3(j_x^2 + j_y^2)/\rho, \\ q_x^{\text{eq}} &= -j_x, q_y^{\text{eq}} = -j_y, p_{xx}^{\text{eq}} = (j_x^2 - j_y^2)/\rho, p_{xy}^{\text{eq}} = j_x j_y / \rho \end{aligned} \quad (11)$$

在 \mathbf{R} 空间中, ρ 为密度, e 为能量, ϵ 为能量的平方, j_x 和 j_y 分别为 x 和 y 方向的动量分量, q_x 和 q_y 分别为相应的能量通量, p_{xx} 和 p_{xy} 则为应力张量。 \mathbf{M} 为把 f_{α} 转化到 \mathbf{R} 空间的相应转化矩阵 $\mathbf{M} =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & -2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

此外, \mathbf{S} 为一个非负的对角矩阵, $\mathbf{S} = \text{diag}(0, s_1, s_2, 0, s_4, 0, s_6, s_7, s_8)$, 它的值可以由线性稳定性分析获得^[9]。在本文的模拟中,这些值分别取为 $s_1 = 1.1, s_2 = 1.05, s_4 = s_6 = 1.2, s_7 = s_8 = 1/\tau$ 。其中 $\tau = \nu/(c_s^2 \delta t) + 0.5$, ν 为流体运动粘度。

为了保证质量和动量的守恒,通常可以把体积力 \mathbf{f} 分成两部分加入到 MRT 模型的 LBM 中^[11],

其具体过程为:

- (1)由 f_{α} 计算动量空间上的物理量 \mathbf{R} ;
- (2)加入一半体积力对动量 $\mathbf{j}(j_x, j_y)$ 的影响, $\mathbf{j}' = \mathbf{j} + 0.5 \mathbf{f} \delta t$, 并用 \mathbf{j}' 计算 \mathbf{R}^{eq} ;
- (3)在动量空间上进行松弛运算, $\mathbf{S}(\mathbf{R} - \mathbf{R}^{\text{eq}})$;
- (4)加入另一半体积力的影响, $\mathbf{j}'' = \mathbf{j}' + 0.5 \mathbf{f} \delta t$ 。

这里,动量 $\mathbf{j}' = \rho \mathbf{u}$ 就是流场每个时间步上的输出值,其形式与方程(2)一致。因此,带 MRT 模型的强制边界条件的 IB-LBM 只是改变了分布函数 f_{α} 的计算方式,保持了体积力 \mathbf{f} 的求解过程。这样,该方法在提高了稳定性的同时,保证了无滑移边界条件的满足。

2 计算结果和分析

为了验证本文的方法,模拟了在不同雷诺数下的二维圆柱的绕流问题。对于该问题,雷诺数定义为 $Re = UD/\nu$ 。其中, U 为自由来流速度, D 为圆柱直径。在本文的模拟中,计算区域为 $50D \times 40D$, 圆柱位置为 $(20D, 20D)$ 。

首先,为了检验方法的准确性,考虑 $Re = 40$ 时的低雷诺数的情况。表 1 给出了阻力系数 C_d 、圆柱后缘分离气泡长度 L_s 和分离角 θ_s 的计算结果,并与文献[8,12,13]中的数值结果进行了比较。由表 1 可见,当前的计算结果与文献中的结果符合得很好,特别是与文献[8]的结果非常吻合。这说明本文的方法能够保证边界条件的精确满足。

表 1 圆柱绕流在 $Re = 40$ 时的计算结果

方法	C_d	L_s	$\theta_s / (^{\circ})$
文献[12]	1.52	2.35	53.8
文献[13]	1.55	2.34	52.7
文献[8]	1.554	2.3	53.27
本文	1.555	2.31	53.13

再考虑 $Re = 200, 400, 550$ 和 $3\ 000$ 时的中高雷诺数的情况。在这样的雷诺数情况下,圆柱绕流最终会发展成三维流动。但是,在流场发展的早期阶段,圆柱尾迹仍然是二维的。为了检验 MRT 模型对计算稳定性的影响,图 1 给出了 SRT 和 MRT 模型在 $Re = 200, 400$ 和 550 时阻力系数的时间历程。这里,无量纲时间定义为 $t^* = tU/(D/2)$ 。从图中可以看出,在相同的网格尺寸下, MRT 的结果比 SRT 的结果更快地趋于某个稳定的值。同时,随着雷诺数的增大, MRT 的结果震荡幅度基

本不变,而 SRT 的结果呈现出震荡幅度逐渐放大的趋势,并在某个雷诺数下由于震荡过大而计算发散了(在本文算例中, $Re=550$ 时 SRT 的模拟出现了发散)。因此,为了在中高雷诺数情况下保持计算的稳定性,有必要采用 MRT 模型。

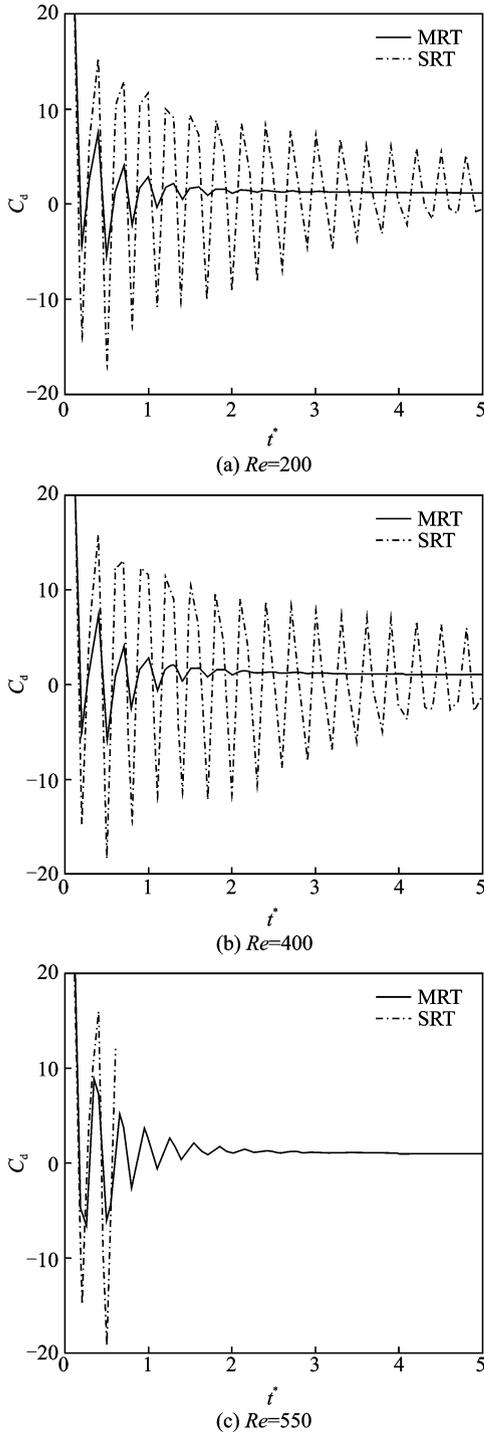


图1 $Re=200, 400$ 和 550 时圆柱上阻力系数的时间历程

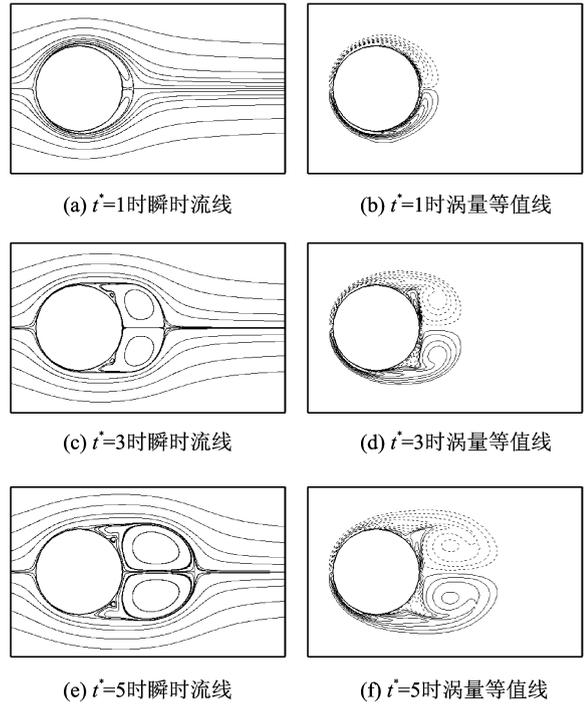


图2 圆柱绕流在 $Re=550$ 时的瞬时流线和涡量等值线

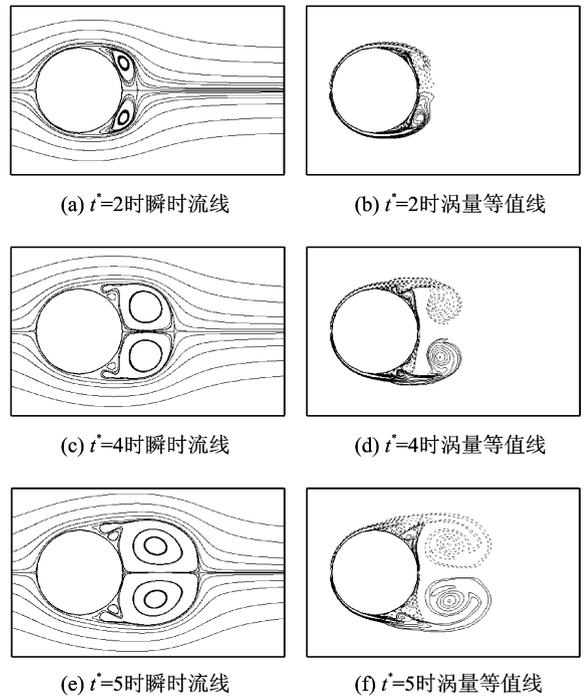


图3 圆柱绕流在 $Re=3000$ 时的瞬时流线和涡量等值线

文献[14,15]中的数值结果符合。在流动的初始阶段,圆柱后缘形成了一对对称的主涡。随着时间的推移,主涡的强度逐渐增强。与此同时,还出现了同样对称但强度较小的一对次涡并不断发展。在此过程中,次涡始终附在圆柱表面并被主涡包围

图2,3 分别给出了 $Re=550$ 和 3000 时在不同时刻的流线和涡量等值线。图中的流动结构与

着。这样的流动发展过程在 Bouard 和 Cou-tanceau^[16]的实验中被称为 α 现象。由图 2 和 3 可见,本文的数值方法准确地再现了这种流动特征。此外,图 4 给出了 $Re=550$ 时圆柱后对称轴上不同时刻的 u 速度分布。由该图可以发现,当前的计算结果与文献[15]中的数值模拟结果及文献[16]中的实验结果都能较好地相吻合。

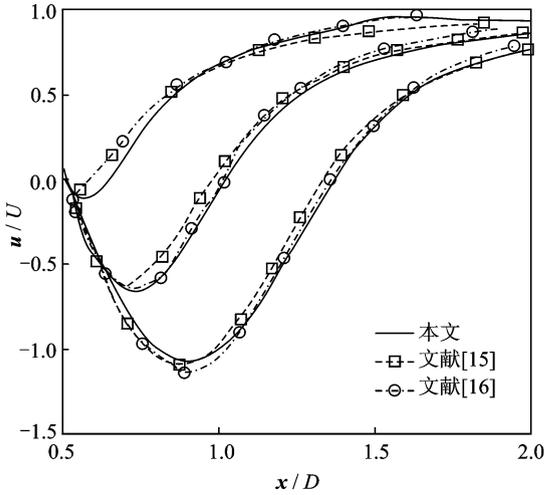


图 4 $Re=550$ 时圆柱后对称轴上不同时刻的 u 速度分布

为了进一步检验本文的方法并展示其处理运动边界的能力,本文还模拟了 $Re=1\ 000$ 时充分发展的二维圆柱绕流以及相同雷诺数下旋转震荡圆柱的流动。当圆柱旋转运动时,其角速度变化为

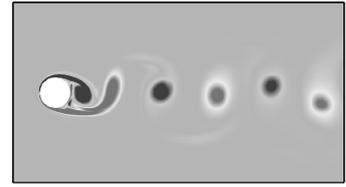
$$\omega(t) = \omega_0 \sin(2\pi ft) \quad (12)$$

式中: ω_0 为角速度幅值, f 为无量纲转动频率。在本文的模拟中,它们的取值分别为 $\omega_0=5.5$ 和 $f=0.625$ 。

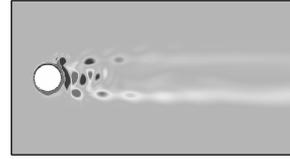
表 2 给出了静止和旋转圆柱的阻力系数 C_d 、最大升力系数 C_l^{\max} 以及无量纲漩涡脱落频率(即 St 数)的计算结果。同时,表中还包括了文献[17~19]中的数值结果。由表 2 可见,对于充分发展的静止和运动的圆柱绕流,当前的计算结果也能与文献中的结果符合得很好。这说明本文的方法也能精确地模拟中高雷诺数的非定常流动。此外,图 5 给出了静止圆柱在某个瞬时的涡量等值线以

表 2 静止和转动圆柱在 $Re=1\ 000$ 时的计算结果

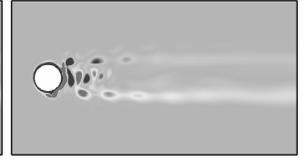
方法	C_d		C_l^{\max}		St	
	静止	旋转	静止	旋转	静止	旋转
文献[17]	1.509				0.237	
文献[18]	1.519				0.239	
文献[19]	1.610±0.198	0.707±0.101	1.332	0.103	0.241	
本文	1.545±0.194	0.769±0.101	1.346	0.128	0.235	



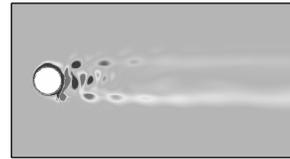
(a) 静止圆柱



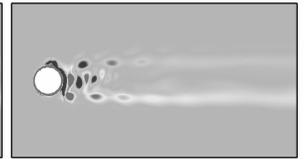
(b) $t' = T/4$



(c) $t' = T/2$



(d) $t' = 3T/4$



(e) $t' = T$

图 5 $Re=1\ 000$ 时静止和旋转圆柱的涡量等值线

及运动圆柱在一个旋转周期内的涡量等值线图。从图中可知,圆柱后缘的漩涡由于旋转的作用从原来的前后交替分布变成了近似的上下对称分布。这也解释了旋转圆柱阻力系数减小的原因。

3 结束语

本文在强制边界条件的 IB-LBM 的基础上,提出了一种稳定的 IB-LBM。与传统的 IB-LBM 相比,强制边界条件的 IB-LBM 能保证无滑移边界条件的精确满足。但是,由于使用了 SRT 模型,强制边界条件的 IB-LBM 没有足够的稳定性。因此,在某些情况如中高雷诺数时,该方法的适用性就会受到影响。另一方面,MRT 的 LBM 模型具有良好的稳定性。所以,本文在强制边界条件的 IB-LBM 中用 MRT 模型代替了 SRT 模型。这样,不但保持了该方法的精确性,而且提高了它的稳定性及适用范围。用该方法对中高雷诺数下二维圆柱绕流进行数值模拟,所得的计算结果与文献中的结果很吻合,有效地验证了该方法的准确性和有效性。

参考文献:

- [1] Peskin C S. Numerical analysis of blood flow in the heart[J]. Journal of Computational Physics, 1977,25 (3):220-252.
- [2] Chen S, Doolen G D. Lattice Boltzmann method for fluid flows[J]. Annual Review of Fluid Mechanics, 1998,30:329-364.

- [3] Feng Z, Michaelides E. The immersed boundary-lattice Boltzmann method for solving fluid-particles interaction problems [J]. *Journal of Computational Physics*, 2004,195(2):602-628.
- [4] Feng Z, Michaelides E. Proteus: A direct forcing method in the simulations of particulate flows[J]. *Journal of Computational Physics*, 2005,202(1):20-51.
- [5] Peng Y, Shu C, Chew Y T, et al. Application of multi-block approach in the immersed boundary-lattice Boltzmann method for viscous fluid flows[J]. *Journal of Computational Physics*,2006,218(2):460-478.
- [6] Niu X D, Shu C, Chew Y T, et al. A momentum exchange-based immersed boundary-lattice Boltzmann method for simulating incompressible viscous flows [J]. *Physics Letters A*, 2006,354(3):173-182.
- [7] Gao T, Lu X Y. Insect normal hovering flight in ground effect [J]. *Physics of Fluids*, 2008,20(8):087101.
- [8] Wu J, Shu C. Implicit velocity correction-based immersed boundary-lattice Boltzmann method and its applications[J]. *Journal of Computational Physics*, 2009,228(6):1963-1979.
- [9] Lallemand P, Luo L S. Theory of the lattice Boltzmann method: dispersion, dissipation, isotropy, Galilean invariance, and stability [J]. *Physical Review E*,2000,61(6):6546-6562.
- [10] Griffith B E, Peskin C S. On the order of accuracy of the immersed boundary method: Higher order convergence rates for sufficiently smooth problems[J]. *Journal of Computational Physics*, 2005,208(1):75-105.
- [11] Lallemand P, Luo L S. Theory of the lattice Boltzmann method: Acoustic and thermal properties in two and three dimensions [J]. *Physical Review E*, 2003,68(3):036706.
- [12] Dennis S C R, Chang G Z. Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at Reynolds number up to 100 [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1970,42(3):471-489.
- [13] Shukla R K, Tatineni M, Zhong X. Very high-order compact finite difference schemes on non-uniform grids for incompressible Navier-Stokes equations [J]. *Journal of Computational Physics*, 2007,224(2):1064-1094.
- [14] Niu X D, Chew Y T, Shu C. Simulation of flows around an impulsively started circular cylinder by Taylor series expansion-and least squares-based lattice Boltzmann method [J]. *Journal of Computational Physics*, 2003,188(1):176-193.
- [15] Berthelsen P A, Faltinsen O M. A local directional ghost cell approach for incompressible viscous flow problems with irregular boundaries [J]. *Journal of Computational Physics*, 2008,227(9):4354-4397.
- [16] Bouard R, Coutanceau M. The early stage of development of the wake behind an impulsively started cylinder for $40 < Re < 10^4$ [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1980,101(3):583-607.
- [17] Henderson R D. Nonlinear dynamics and pattern formation in turbulent wake transition [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1997,352(1):65-112.
- [18] He J W, Glowinski R, Metcalfe A, et al. Active control and drag optimization for flow past a circular cylinder: I. Oscillatory cylinder rotation [J]. *Journal of Computational Physics*, 2000,163(1):87-117.
- [19] Chen Y, Botella O. The LS-STAG method: A new immersed boundary/level-set method for the computation of incompressible viscous flows in complex moving geometries with good conservation properties [J]. *Journal of Computational Physics*, 2008,229(4):1043-1076.