

DOI:10.16356/j.1005-2615.2020.04.019

限带白噪声随机过程的雨流幅值概率密度函数模型

施剑玮, 奚蔚

(上海飞机设计研究院, 上海, 201210)

摘要: 对 17 种不同带宽系数的限带白噪声随机过程进行了雨流循环计数统计, 提出了一个限带白噪声随机过程的雨流幅值概率密度函数(Probability density function, PDF)模型。该模型是 Rayleigh 分布和 Weibull 分布的线性组合, 其中待定系数均为随机过程谱参数的函数。采用该模型对这 17 种随机过程的雨流幅值概率密度函数进行了公式拟合, 探究了模型中待定参数与随机过程谱参数之间的关系, 确定了模型表达式。对照随机过程的雨流计数统计结果, 将该模型与 Dirlik 模型的预测精度进行了比较, 结果表明该模型的预测效果优于 Dirlik 模型。

关键词: 限带白噪声; 雨流幅值; 概率密度函数; 振动疲劳; 数据拟合

中图分类号: V215.5

文献标志码: A

文章编号: 1005-2615(2020)04-0659-07

Probability Density Function Model of Rainflow Amplitude for Random Process of Band-Limited White Noise

SHI Jianwei, XI Wei

(Shanghai Aircraft Design and Research Institute, Shanghai, 201210, China)

Abstract: The rainflow cycle counting is carried out on seventeen random processes of band-limited white noise with different band widths, and a probability density function (PDF) model of rainflow amplitude for random processes of band-limited white noise is proposed. This model is a linear combination of a Rayleigh distribution and a Weibull distribution, where the undetermined coefficients are all functions of the spectral parameters of the random process. Data fitting is carried out on the rainflow amplitude PDFs of the seventeen random processes based on the proposed model, and the relationship between the parameters in the model and the spectral parameters of the random processes are investigated, and the formula of the model is determined. According to the rainflow cycle counting results of the random processes, the prediction accuracy of the proposed model is compared with that of Dirlik's model, which shows that the proposed model gives better prediction results than Dirlik's model.

Key words: band-limited white noise; rainflow amplitude; probability density function; vibration fatigue; data fitting

随机过程的雨流幅值概率密度函数模型是结构随机振动疲劳寿命分析频域法中的一个关键步骤^[1], 其作用在于根据结构疲劳危险部位的应力响应功率谱密度获得应力幅值概率密度函数曲线, 进而结合材料疲劳性能数据进行疲劳寿命分析。雨流计数统计方法的复杂性导致随机过程的雨流幅值概率密度

函数无法通过精细的理论推导获得^[2-3]。某些特殊随机过程(如理想窄带过程等)在适当假设基础上可以获得其雨流幅值概率密度函数的精确理论解, 但是该方面的研究成果远不能满足实际工程需求; 通过蒙特卡洛方法得到的经验公式^[4-5](如 Dirlik 模型等)相对而言预测精度更高, 但是该类方法缺乏理论基础。

收稿日期: 2020-01-03; 修订日期: 2020-06-15

通信作者: 施剑玮, 男, 高级工程师, E-mail: shijianwei@comac.cc。

引用格式: 施剑玮, 奚蔚. 限带白噪声随机过程的雨流幅值概率密度函数模型[J]. 南京航空航天大学学报, 2020, 52(4): 659-665. SHI Jianwei, XI Wei. Probability density function model of rainflow amplitude for random process of band-limited white noise[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2020, 52(4): 659-665.

现有的随机过程雨流幅值概率密度函数模型按照研究方法可以分为理论模型和统计模型两类。理论模型方面, Bendat等^[6]首先说明了一个窄带信号随着带宽的减小, 其峰值概率密度函数趋向于Rayleigh分布; 此外他假定窄带时域信号所有正的波峰后紧跟着一个等值波谷, 不管两者实际上是否构成应力循环, 因此应力幅值 S 概率密度函数同样也趋向于Rayleigh分布。Jiao和Moan^[7]通过将随机过程 $X(t)$ 正则化为具有单位方差的新过程 $X^*(t)$, 推导了 $X(t)$ 包络过程 $P(t)$ 的幅值概率密度函数。Fu和Cebon^[8]认为一个理想化的双模态功率谱能够用两个正弦波 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 在时域内相加近似, 因为 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 是窄带随机过程, 则其幅值概率密度函数服从Rayleigh分布, 由此可以得到双峰功率谱密度随机过程的幅值概率密度函数。统计模型方面, Dirlik^[5]通过Monte Carlo技术时域模拟, 对70种不同形状的功率谱密度函数进行了研究, 用一个指数分布和两个Rayleigh分布近似雨流循环幅值概率密度函数。Zhao和Baker^[9]假设雨流幅值概率密度函数(Probability density function, PDF)是一个Weibull分布和一个Rayleigh分布的线性组合, 并对模型中参数的确定方法进行了改进。王明珠等发现限带白噪声随机过程的雨流幅值概率密度函数^[10]可以用一个双参数Weibull分布进行描述, 并进一步发现采用一个双参数Weibull分布和两个Rayleigh分布加权组合的形式对一般宽带随机过程的雨流幅值分布模型^[11]描述效果很好。理论模型均是在窄带随机过程结论基础上进行的推广, 在预测宽带随机过程时不可避免地带来误差。相对来说, 统计模型适用范围更广, 但是现有成果的预测精度仍然不能做到令人满意。适用范围和预测精度是开展新模型研究过程中一对相互矛盾的评估标准, 因此通过统计方法研究某一特定类型随机过程的雨流幅值概率密度函数对探索模型规律来说极为重要。

本文通过带宽系数对限带白噪声随机过程进行了分类表征, 获取了标准雨流幅值概率密度函数PDF统计结果。提出了一个限带白噪声随机过程的雨流幅值概率密度函数模型, 该模型为一个Weibull分布和一个Rayleigh分布的线性组合。根据雨流幅值概率密度函数统计结果对该模型进行参数拟合, 给出了模型参数表达式。算例分析结果表明: 该模型对限带白噪声随机过程的雨流幅值概率密度函数预测效果优于Dirlik模型。

1 雨流幅值概率密度函数模型

1.1 模型研究方法流程

本文按照如图1所示流程进行限带白噪声随

机过程的雨流幅值概率密度函数模型研究。采用谐波叠加法(三角级数法)对不同带宽系数的限带白噪声随机过程(共计17种)进行时域抽样, 将抽样得到的随机过程时间历程进行雨流计数并按照一倍均方根值归一化后, 采用Weibull分布+Rayleigh分布形式的模型进行拟合, 并根据拟合结果进行参数关系讨论。

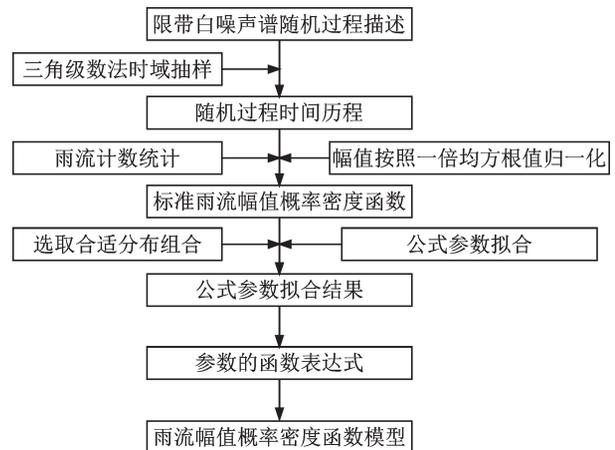


图1 雨流幅值概率密度函数模型研究方法流程图

Fig.1 Flowchart of research method for PDF of rainflow amplitude

1.2 限带白噪声随机过程的表征

1.2.1 功率谱密度形状

如果随机过程的功率谱密度在有限带宽上是均匀分布的, 则称之为限带白噪声随机过程^[12-13]。限带白噪声随机过程的功率谱密度形状如图2所示, 其中 f_c 为中心频率($f_c=50$ Hz), f_R 为频率范围, G_0 为功率谱密度量值($G_0=100$)。

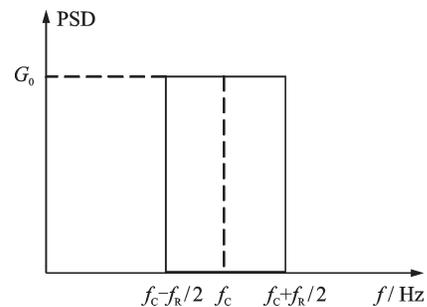


图2 功率谱密度形状示意图

Fig.2 Sketch map of spectral shape

1.2.2 谱参数

对于一般的单边功率谱密度 $G(f)$, 其各阶谱矩^[12-13]

$$m_i = \int_0^{\infty} f^i G(f) df \quad (1)$$

其均方根值^[12-13]

$$\sigma = \sqrt{m_0} = \sqrt{\int_0^{\infty} G(f) df} \quad (2)$$

不规则因子和带宽系数分别为^[12-13]

$$\gamma = \frac{m_2}{\sqrt{m_0 \cdot m_4}} \quad \epsilon = \sqrt{1 - \gamma^2} \quad (3)$$

17种限带白噪声随机过程的相关谱参数如表 1 所示, Sp 为过程编号。

表 1 限带白噪声随机过程相关谱参数

Table 1 Spectral parameters of white noise random processes with limited bands

Sp	f_r/Hz	f_r/f_c	均方根值 σ	不规则因子 γ	带宽系数 ϵ
1	4	0.08	20.00	0.998 9	0.046 1
2	10	0.20	31.62	0.993 4	0.114 4
3	16	0.32	40.00	0.983 6	0.180 3
4	20	0.40	44.72	0.974 9	0.222 5
5	24	0.48	48.99	0.964 8	0.262 8
6	30	0.60	54.77	0.947 5	0.319 6
7	36	0.72	60.00	0.928 4	0.371 5
8	40	0.80	63.25	0.915 0	0.403 4
9	44	0.88	66.33	0.901 4	0.433 0
10	46	0.92	67.82	0.894 6	0.447 0
11	48	0.96	69.28	0.887 7	0.460 4
12	50	1.00	70.71	0.880 9	0.473 3
13	60	1.20	77.46	0.847 6	0.530 6
14	70	1.40	83.67	0.816 9	0.576 8
15	80	1.60	89.44	0.789 5	0.613 8
16	90	1.80	94.87	0.765 7	0.643 2
17	100	2.00	100.00	0.745 4	0.666 7

对于一般的限带白噪声随机过程,假设其下限频率为 f_L , 上限频率为 f_H , 功率谱密度量值为 G_0 。令 $\delta = f_L/f_H$, 因为 $0 \leq f_L \leq f_H$, 所以 $\delta \in [0, 1]$ 。根据式(1)~(3)推导得到该随机过程的带宽系数为

$$\epsilon = \sqrt{1 - 5(1 - 2\delta^3 + \delta^6)/9(1 - \delta - \delta^5 + \delta^6)} \quad (4)$$

容易得到带宽系数 ϵ 的范围为: $0 \sim 0.666 7$ 。表 1 中限带白噪声随机过程带宽系数 ϵ 范围为: $0 \sim 0.666 7$, 因此可以认为表 1 中的 17 种功率谱密度曲线完整覆盖了所有限带白噪声随机过程的情况。

1.3 三角级数法时域抽样和雨流计数统计

根据各随机过程的上限频率 f_H 和下限频率 f_L 确定时域抽样相关参数: 功率谱密度频率分辨率 $\Delta f = f_L/1\ 000$, 采样频率 $F_s = 5f_H$, 时间分辨率 $\Delta t = 1/F_s$, 采样时间 $T = 10^5 \times \Delta t$ 。采用 Adam Nieslony 编写的 Matlab 程序进行雨流计数统计, 雨流幅值柱状数 $N=100$ 。

1.4 公式参数拟合

1.4.1 拟合函数及拟合方法

假设限带白噪声随机过程的雨流幅值概率密度函数由一个 Weibull 分布和一个 Rayleigh 分布构成, 其表达式为

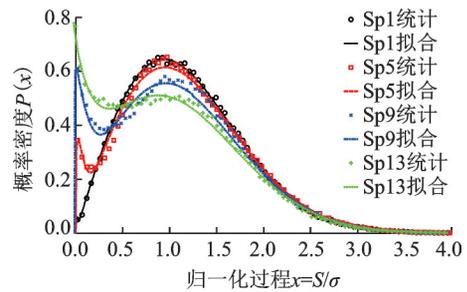
$$P(x) = \omega_1 \alpha_1 / \beta_1 (x/\beta_1)^{\alpha_1 - 1} \exp(-(x/\beta_1)^{\alpha_1}) + (1 - \omega_1) \frac{2x}{\beta_2^2} \exp(-(x/\beta_2)^2) \quad (5)$$

式中: α_1 和 β_1 分别为 Weibull 分布的形状参数和尺度参数; β_2 为 Rayleigh 分布的尺度参数; ω_1 为 Weibull 分布的权重系数。

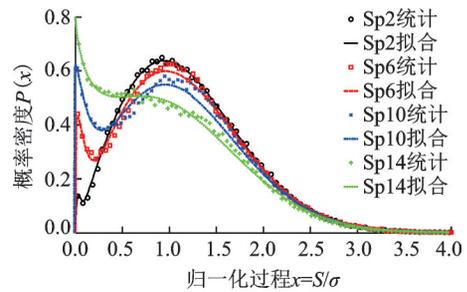
采用 1stOpt 软件进行参数拟合, 优化算法选择麦夸特 (Levenberg-Marquardt) 法, 算法参数设定按照缺省设置。

1.4.2 雨流幅值概率密度函数统计及拟合结果

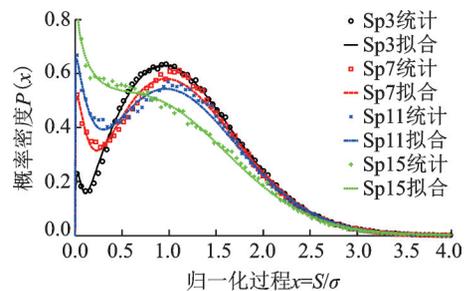
采用 Weibull 分布 + Rayleigh 分布形式对上述 17 种功率谱密度 (Power spectral density, PSD) 曲线的随机过程概率密度函数曲线拟合结果如图 3 所示。



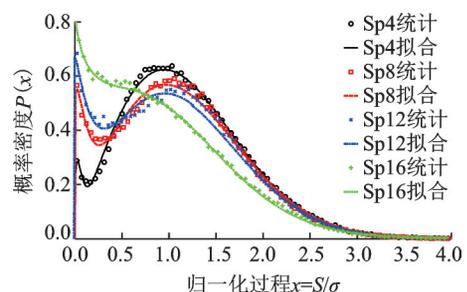
(a) Random process of Sp1-Sp5-Sp9-Sp13



(b) Random process of Sp2-Sp6-Sp10-Sp14



(c) Random process of Sp3-Sp7-Sp11-Sp15



(d) Random process of Sp4-Sp8-Sp12-Sp16

图 3 概率密度函数曲线拟合结果比较

Fig.3 Comparison between fitting results and statistics of probability density functions

从图3中可以看出:采用Weibull分布+Rayleigh分布形式的模型对限带白噪声随机过程的雨流幅值概率密度曲线描述效果较好。

1.4.3 公式参数统计

采用Weibull分布+Rayleigh分布进行限带白噪声随机过程雨流幅值概率密度函数拟合的参数统计结果如表2所示。拟合参数包括权重系数 ω_1 , 形状参数 α_1 , 尺度参数 β_1 和 β_2 。

表2 拟合参数统计结果

Table 2 Statistic results of curve fitting parameters

Sp	权重系数 ω_1	形状参数 α_1	尺度参数 β_1	尺度参数 β_2
1	0.001 09	1.834 25	0.016 92	1.330 23
2	0.006 51	1.610 25	0.046 61	1.337 47
3	0.014 87	1.448 58	0.055 30	1.341 34
4	0.023 53	1.327 33	0.067 39	1.343 68
5	0.033 66	1.253 10	0.078 79	1.349 78
6	0.051 55	1.184 04	0.096 90	1.358 71
7	0.074 64	1.131 94	0.118 64	1.369 66
8	0.091 23	1.110 67	0.136 96	1.374 05
9	0.107 16	1.082 23	0.148 89	1.380 11
10	0.116 73	1.068 78	0.160 81	1.382 33
11	0.126 76	1.048 85	0.170 09	1.383 58
12	0.137 84	1.046 66	0.182 74	1.388 67
13	0.197 63	0.984 78	0.253 93	1.401 53
14	0.292 24	0.914 94	0.394 63	1.416 82
15	0.393 72	0.905 64	0.552 13	1.391 71
16	0.446 68	0.889 95	0.634 00	1.324 38
17	0.451 45	0.877 39	0.634 28	1.270 78

采用Weibull分布+Rayleigh分布进行限带白噪声随机过程雨流幅值概率密度函数拟合的参数间相互关系见图4。

从图4中可以看出:拟合参数中权重系数 ω_1 、形状参数 α_1 和尺度参数 β_1 与带宽系数 ϵ 的函数关系呈单调关系,尺度参数 β_2 随带宽系数 ϵ 增大呈现

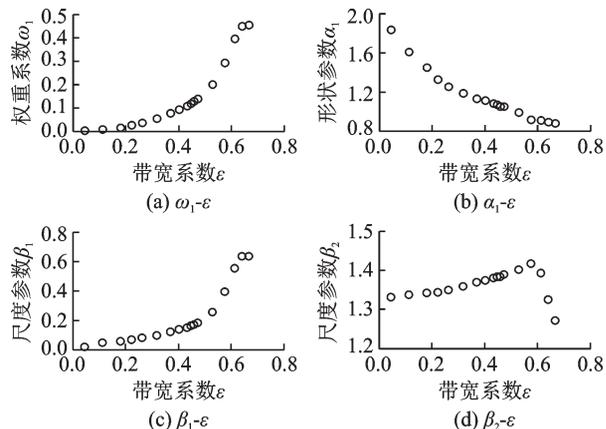


图4 拟合参数随带宽系数 ϵ 变化关系

Fig.4 Relationship between curve fitting parameters and ϵ

先增大后减小趋势。据此对采用Weibull分布+Rayleigh分布形式得到的拟合参数结果进行曲线拟合,进而获取其相互间的函数关系表达式。

1.5 拟合公式参数关系

1.5.1 参数关系

带宽系数 ϵ 为0时该随机过程为理想窄带过程,其雨流幅值概率密度函数为Rayleigh分布,此时权重系数 $\omega_1=0$,形状参数 $\alpha_1=2$ 。根据图4中拟合参数间的变化趋势,假设权重系数 ω_1 和形状参数 α_1 与带宽系数 ϵ 近似满足以下形式的指数函数关系

$$\omega_1 = k_1 \cdot (e^{k_2 \cdot \epsilon} - 1) \tag{6}$$

$$\alpha_1 = k_3 \cdot (e^{k_4 \cdot \epsilon} - 1) + 2 \tag{7}$$

观察尺度参数 β_1 和权重系数 ω_1 的相互关系,假设两者满足以下指数函数关系

$$\beta_1 = k_5 \cdot e^{k_6 \cdot \omega_1} + k_7 \tag{8}$$

显然尺度参数 β_2 与带宽系数 ϵ 关系为分段函数。假设 $0 \leq \epsilon < 0.6$ 时,尺度参数 β_2 与 ϵ 呈指数函数关系; $0.6 \leq \epsilon \leq 1$ 时,尺度参数 β_2 与 ϵ 呈线性关系,函数表达式如下

$$\beta_2 = \begin{cases} k_8 \cdot e^{k_9 \cdot \epsilon} + k_{10} & 0 \leq \epsilon < 0.6 \\ k_{11} \cdot \epsilon + k_{12} & 0.6 \leq \epsilon \leq 1 \end{cases} \tag{9}$$

1.5.2 参数拟合结果

根据式(6)–(9)的函数关系,参数拟合结果见表3。

表3 参数拟合结果

Table 3 Curve fitting results of the parameters

参数	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6
数值	0.008 8	5.85	1.253 0	-3.222 0	0.699 0	1.373 0
参数	k_7	k_8	k_9	k_{10}	k_{11}	k_{12}
数值	-0.658 0	0.021 1	2.862 6	1.306 2	-2.286 3	2.795 0

根据表3中的参数拟合结果,雨流幅值概率密度函数参数间相互关系拟合曲线见图5。

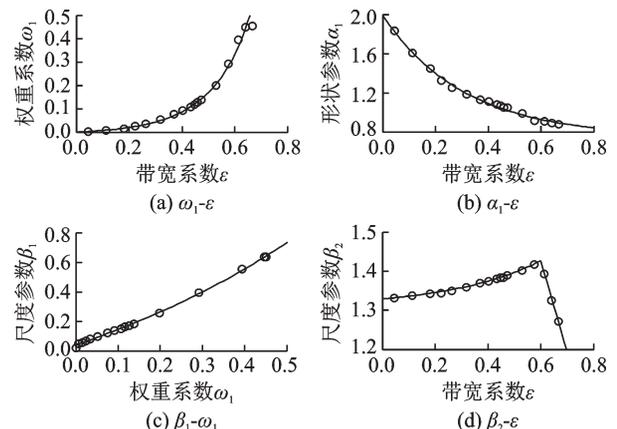


图5 概率密度函数参数间相互关系拟合曲线

Fig.5 Fitted curves of relationship between model parameters

从图 5 可以看出式(6)—(9)对拟合公式中待定参数和带宽系数之间函数关系的描述精度较高。

2 新的概率密度函数 $p(S)$ 模型

根据上述参数拟合结果,给出限带白噪声随机过程雨流幅值概率密度函数模型表达式如式(5)所示,式中各参数表达式如下

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 0.0088(e^{5.85\epsilon} - 1) \\ \alpha_1 &= 1.253(e^{-3.222\epsilon} - 1) + 2 \\ \beta_1 &= 0.699e^{1.373\epsilon} - 0.658 \\ \beta_2 &= \begin{cases} 0.0211e^{2.8626\epsilon} + 1.3062 & 0 \leq \epsilon < 0.6 \\ -2.2863\epsilon + 2.795 & 0.6 \leq \epsilon \leq 1 \end{cases} \end{aligned} \tag{10}$$

2.1 模型预测效果

2.1.1 模型参数预测效果

根据式(10)对上述 17 种功率谱密度的权重系数 ω_1 、形状参数 α_1 、尺度参数 β_1 和 β_2 给出的模型预测结果与统计结果比较见图 6。

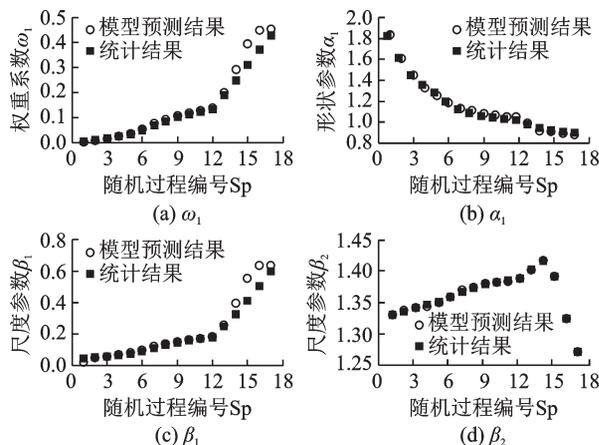


图 6 模型参数预测结果与统计结果比较

Fig.6 Comparison between predicted results and statistic results of model parameters

从图 6 可以看出,形状参数 α_1 和尺度参数 β_2 这两个参数整体上拟合精度较高,编号为 Sp14~Sp17 的随机过程的权重系数 ω_1 和尺度参数 β_1 的公式结果与统计结果差距较明显。

2.1.2 雨流幅值概率密度函数曲线预测效果

根据式(5)和式(10)对上述 17 种功率谱密度的随机过程雨流幅值概率密度函数进行预测的效果如图 7—12 所示。

2.2 讨论

从图 7—12 中可以看出,对于限带白噪声随机过程,新模型和 Dirlik 模型对雨流幅值 $S_a > 1.5\sigma$ 部分的高幅值区域描述精度较高;新模型对雨流幅值 $S_a < 1.5\sigma$ 的中低幅值区给出的概率密度函数预测结果描述效果较好,并且明显高于 Dirlik 模型。对

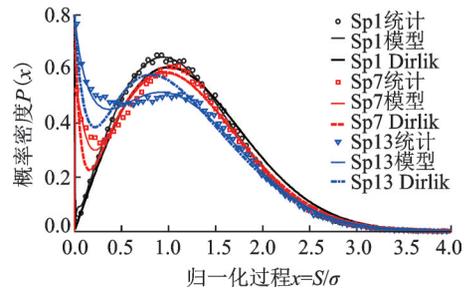


图 7 Sp1-Sp7-Sp13 模型预测效果比较

Fig.7 Comparison on prediction accuracy of Sp1-Sp7-Sp13

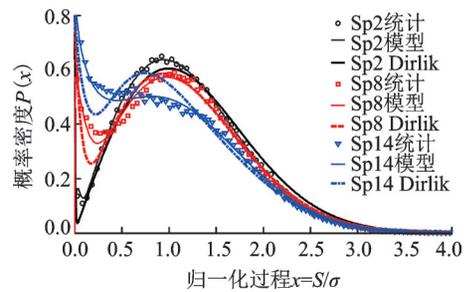


图 8 Sp2-Sp8-Sp14 模型预测效果比较

Fig.8 Comparison on prediction accuracy of Sp2-Sp8-Sp14

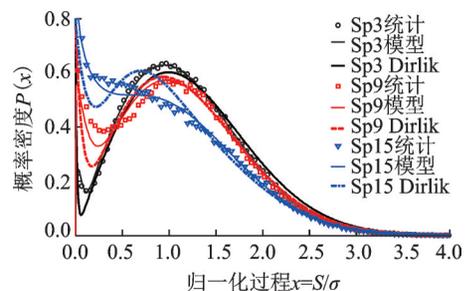


图 9 Sp3-Sp9-Sp15 模型预测效果比较

Fig.9 Comparison on prediction accuracy of Sp3-Sp9-Sp15

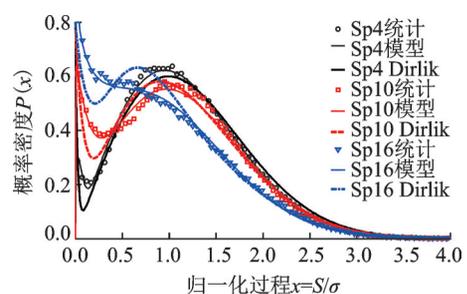


图 10 Sp4-Sp10-Sp16 模型预测效果比较

Fig.10 Comparison on prediction accuracy of Sp4-Sp10-Sp16

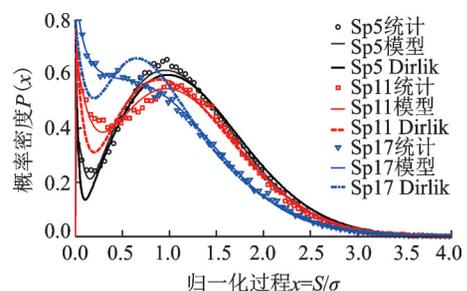


图 11 Sp5-Sp11-Sp17 模型预测效果比较

Fig.11 Comparison on prediction accuracy of Sp5-Sp11-Sp17

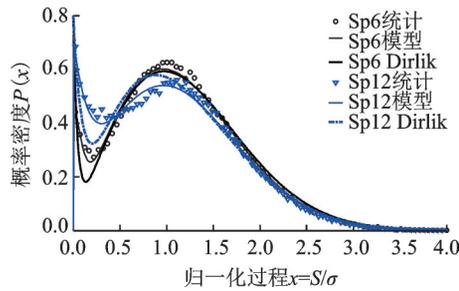


图12 Sp6-Sp12模型预测效果比较

Fig.12 Comparison on prediction accuracy of Sp6-Sp12

于编号为 Sp1~Sp10($0 < \epsilon < 0.45$)的随机过程, Dirlik模型对其雨流幅值概率密度曲线描述效果较好;对于编号为 Sp11~Sp17($0.45 < \epsilon < 0.66$)的随机过程, Dirlik模型结果与雨流计数统计结果有明显差别,具体表现为:雨流幅值 $0.4\sigma < S_a < 1.2\sigma$ 区域 Dirlik模型预测结果偏大,雨流幅值 $S_a < 0.4\sigma$ 和 $S_a > 1.2\sigma$ 区域 Dirlik模型预测结果偏小。

将 $P(S)$ 模型在归一化过程统计数据点 $x(i)$ 处的计算结果与 $P(x)$ 统计结果的差值均方根定义为模型的精度误差

$$\text{err} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \{ [PS(x(i)) - P(x(i))]^2 \}}{N}} \quad (11)$$

式中: $x(i)$ 为归一化过程的第 i 个统计数据点; $PS(x(i))$ 为模型在 $x(i)$ 处的雨流幅值概率密度函数预测结果; $P(x(i))$ 为在 $x(i)$ 处的雨流幅值概率密度函数统计结果; N 为雨流幅值柱状数。

表4给出了本文模型与 Dirlik模型的预测精度

表4 本文模型和 Dirlik模型的预测精度比较

Table 4 Comparison of prediction accuracy between the proposed model and Dirlik's model

Sp	本文模型误差/%	Dirlik模型误差/%
1	0.70	2.56
2	0.67	2.40
3	0.83	2.41
4	1.01	2.46
5	1.33	2.65
6	1.32	2.62
7	1.45	2.85
8	1.41	3.05
9	2.06	3.92
10	1.39	3.19
11	1.50	3.63
12	1.51	3.62
13	1.25	3.95
14	1.38	4.32
15	1.41	4.06
16	1.01	4.07
17	1.03	4.41
均值	1.25	3.30

比较。从表4中可以看出:本文提出的模型对限带白噪声随机过程雨流幅值概率密度函数的预测精度显著高于 Dirlik模型。

3 结 论

(1) 由于限带白噪声随机过程的带宽系数范围为 $0 \sim 0.6667$,因此本文中选取的17个随机过程完全覆盖了限带白噪声随机过程。

(2) 本文中提出的模型对于限带白噪声随机过程的雨流幅值概率密度函数曲线描述效果优于 Dirlik模型; Dirlik模型对于宽带限带白噪声随机过程的概率密度函数曲线描述存在明显误差。

(3) 对于编号为 Sp14~Sp17的随机过程,新模型对权重系数 ω_1 和尺度参数 β_1 的预测结果与统计结果有明显差距,但是该误差对最终的概率密度函数曲线描述精度没有产生明显影响。

(4) 模型中共计12个系数($k_1 \sim k_{12}$),系数个数较多。如果仅考虑疲劳损伤有贡献的雨流幅值部分(滤波模型),即可减少拟合公式个数(如只需一个 Weibull分布),进而显著减少拟合参数和系数的个数,从而简化模型。

(5) 对于单峰功率谱密度、双峰功率谱密度以及多峰谱密度的随机过程,在对随机过程合理完整表征的条件下,也可以按照本文的研究思路进行相应的概率密度函数预测模型研究。

参考文献:

- [1] NIESLONY A, MACHA E. Spectral method in multiaxial random fatigue[M]. Berlin, Heidelberg: Springer, 2007.
- [2] BENASCIUTTI D, SHERRATT F, CRISTOFORI A. Recent developments in frequency domain multiaxial fatigue analysis[J]. International Journal of Fatigue, 2016, 91: 397-413.
- [3] CARPINTERI A, SPAGNOLI A, VANTADORI S. A review of multiaxial fatigue criteria for random variable amplitude loads[J]. Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, 2017, 40(7): 1007-1036.
- [4] 姚卫星. 结构疲劳寿命分析[M]. 北京: 科学出版社, 2018.
YAO Weixing. Fatigue life analysis on structures[M]. Beijing: Science Press, 2018.
- [5] DIRLIK T. Application of computers in fatigue analysis[D]. Coventry, England: University of Warwick, 1985.
- [6] BENDAT J S, PIERSOL A G. Measurement and

- analysis of random data[M]. New York: John Wiley, 1966.
- [7] JIAO G, MOAN T. Probabilistic analysis of fatigue due to Gaussian load processes[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 1990, 5(2): 76-83.
- [8] FU T T, CEBON D. Predicting fatigue lives for bimodal stress spectral densities[J]. International Journal of Fatigue, 2000, 22(1): 11-21.
- [9] ZHAO W, BAKER M J. On the probability density function of rainflow stress range for stationary Gaussian processes[J]. International Journal of Fatigue, 1992, 14(2): 121-135.
- [10] 王明珠, 姚卫星. 限带白噪声过程雨流幅值分布[J]. 航空学报, 2009, 30(6): 1007-1011.
- WANG Mingzhu, YAO Weixing. Rainflow amplitude distribution of limited band white noise processes[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2009, 30(6): 1007-1011.
- [11] 王明珠. 结构振动疲劳寿命分析方法研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2009.
- WANG Mingzhu. Research on life analysis method for structure vibration fatigue[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2009.
- [12] 方同. 工程随机振动[M]. 北京: 国防工业出版社, 1995.
- FANG Tong. Random vibration in engineering[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1995.
- [13] 欧进萍, 王光远. 结构随机振动[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998.
- OU Jinping, WANG Guangyuan. Random vibration in structures[M]. Beijing: Higher Education Press, 1998.

(编辑:孙静)