DOI:10.16356/j.1005-2615.2016.06.005

# 时变支承刚度对分流传动系统振动特性的影响

任 薇 靳广虎 朱如鹏 陆凤霞

(南京航空航天大学机电学院,南京,210016)

摘要:基于集中质量法,考虑时变啮合刚度、综合传递误差和齿侧间隙等因素的影响,建立了圆柱齿轮分流传动 系统的弯扭耦合动力学模型和方程。采用变步长 Runge-Kutta 法,对动力学方程进行了数值求解;通过引入滚 动轴承的支承刚度计算模型,分析了时变支承刚度和非时变支承刚度对系统振动特性的影响。仿真结果表明: 当按照时变支承刚度模型计算时,轴承的支承刚度会产生4%左右的波动,输出轴上的横向振动位移幅值增大 了约5%;支承刚度的时变性使得系统的非线性增强,稳定性变差;支承刚度的时变特性对分扭级动载系数影响 较大,对并车级动载系数影响较小。

关键词:齿轮;动力学;滚动轴承;支承刚度;分流 中图分类号:TH132.4 文献标志码:A 文章编号:1005-2615(2016)06-0808-07

# Influence of Time-Variant Supporting Stiffness on Vibration Characteristics of Split-Torque Transmission System

Ren Wei, Jin Guanghu, Zhu Rupeng, Lu Fengxia

(College of Mechanical and Electrical Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China)

**Abstract:** A bending-torsional coupled dynamics model of the split-torque transmission system is developed based on the theory of the lumped parameter method. The time-varying meshing stiffness, general transmission errors and the backlash are introduced in dynamics model and dynamics equations. Using the Runge-Kutta numerical integral method with varied steps, the dynamical equations are solved. In order to analyze the influence of time-variant and time-invariant supporting stiffness on the vibration characteristics of the system, the model of supporting stiffness of rolling element bearing is introduced. The results show that the stiffness of the bearing fluctuates at about 4% and the transverse vibration displacement amplitude of the output shaft increases about 5% according to time-variant models. The time-variant characteristic of supporting stiffness has the larger influence on the dynamic load coefficient of the split torque stages than that of the synthesized torque stages.

Key words: gear; dynamics; rolling element bearing; supporting stiffness; split-torque

齿轮分流传动系统,又称为功率分流传动系统。为进一步提高直升机传动系统的性能,在直升

机主减速器传动系统中提出了具有齿轮动力分流的传动构型。与传统的行星齿轮传动构型相比,分

基金项目:国家自然科学基金(51475226,51375226)资助项目。

收稿日期:2016-04-15;修订日期:2016-05-27

通信作者:靳广虎,男,副教授,E-mail:meeghjin@nuaa.edu.cn。

**引用格式:**任薇,靳广虎,朱如鹏,等. 时变支承刚度对分流传动系统振动特性的影响[J]. 南京航空航天大学学报, 2016,48(6):808-814. Ren Wei, Jin Guanghu, Zhu Rupeng, et al. Influence of time-variant supporting stiffness on vibration characteristics of split-torque transmission system[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2016, 48(6): 808-814.

流传动构型具有以下优点<sup>[1-2]</sup>:(1)分流传动的最后 一级减速比可达 14:1,这对降低传动系统的重量 极其有利;(2)减速级数减少,最后一级传动比很 大,因此整个传动系统的传动级数会减少;(3)传动 系统可靠性高。行星齿轮传动机构中行星轮较多 且支承结构复杂,易出故障。采用分流传动构型 时,齿轮和轴承数量减少,且分流构型轮系为定轴 轮系传动,技术上比较成熟,因此传动系统的可靠 性提高;(4)噪声低。开展分流传动系统的构型及 技术研究,对提高直升机传动系统的功重比、可靠 性和降低噪声污染,提升我国直升机传动系统的自 主创新发展等具有重要的意义,能带来巨大的经济 效益和社会效益。

鉴于齿轮分流传动系统的诸多优点及其在特殊传动系统中的独特作用,国内外学者<sup>[3-11]</sup>已经对 齿轮分流传动系统的动力学特性,包括系统的固有 频率和动载系数等开展了广泛的研究。文献资料 表明,在上述的相关研究中,通常将支承刚度这一 参数按照常数进行处理,忽略了滚动轴承自身结构 的复杂性所导致的支承刚度的波动<sup>[12]</sup>。本文以圆 柱齿轮分流传动系统为研究对象,考虑时变啮合刚 度、综合传递误差、齿侧间隙等因素,建立了含时变 支承刚度的弯扭耦合动力学模型,并重点分析了时 变支承刚度对系统振动特性的影响,这为齿轮分流 传动系统的设计与研究提供了一定的理论支撑。

# 1 齿轮分流传动系统的动力学模型

图 1 为圆柱齿轮分流传动系统示意图,其工作 原理为:功率经输入齿轮 Z<sub>p</sub> 传递给分流级大齿轮 Z<sub>Ls</sub>和 Z<sub>Rs</sub>,再由双联轴经并车级小齿轮 Z<sub>Lh</sub>和 Z<sub>Rh</sub>汇 流至输出齿轮 Z<sub>B</sub>,从而实现功率的分流与并车。



图 1 圆柱齿轮分流传动系统示意图 Fig. 1 Sketch of split torque transmission system

为便于建立动力学方程,将齿轮副之间啮合变 形、轴的扭转变形和支承变形等效为弹簧连接,应 用集中质量法建立如图 2 所示的弯扭耦合动力学 模型。图中:K<sub>mLps</sub>和 K<sub>mLBh</sub>、K<sub>mRps</sub>和 K<sub>mRBh</sub>分别表 示左、右分支的分扭级和并车级齿轮副间的时变啮 合刚度;c、e 和 b 分别表示啮合阻尼、啮合误差和齿 侧间隙,下标与时变啮合刚度相同;K<sub>m</sub>和 c<sub>m</sub>(n= Dp、Rsh、Lsh、Bo)分别表示输入轴、右分支双联 轴、左分支双联轴、输出轴的扭转刚度和扭转阻尼; K<sub>m</sub>、K<sub>m</sub>和 c<sub>m</sub>、c<sub>m</sub>分别表示相应轴的 x、y 方向的 支承刚度和支承阻尼。

则该系统共有 16 个自由度,可用向量 Y 表示为

 $m{Y}=(\,arphi_{
m D}\,,arphi_{
m p}\,,arphi_{
m Rs}\,,arphi_{
m Rh}\,,arphi_{
m Ls}\,,arphi_{
m Lh}\,,arphi_{
m B}\,,arphi_{
m o}\,,$ 

 $X_{p}, Y_{p}, X_{R}, Y_{R}, X_{L}, Y_{L}, X_{B}, Y_{B}$ ) (1) 式中: $\varphi_{D}, \varphi_{o}$ 分别表示输入端、输出端的扭转微位 移: $\varphi_{p}, \varphi_{Rs}, \varphi_{Rh}, \varphi_{Ls}, \varphi_{Lh}, \varphi_{B}$ 则分别表示相应齿轮的 扭转微位移: $X_{p}$ 和 $Y_{p}, X_{R}$ 和 $Y_{R}, X_{L}$ 和 $Y_{L}, X_{B}$ 和  $Y_{B}$ 分别表示输入轴、右双联轴、左双联轴、输出轴

# 2 齿轮分流传动系统振动微分方程

沿广义坐标系 x 和 y 方向的振动微位移。

为便于动力学方程的分析,引入广义坐标和局 部坐标来描述齿轮副之间的啮合关系,如图 3 所 示。图中:带有"\*"的为局部坐标系,Y 和 Y\*的方 向与齿轮啮合线方向相同; $\theta_{P}$ 、 $\theta_{R}$ 、 $\theta_{L}$ 、 $\theta_{B}$  分别表示 各齿轮中心连线的夹角; $\theta_{P}$ \*、 $\theta_{R}$ \*、 $\theta_{L}$ \*、 $\theta_{B}$ \*则分别 表示 Y<sub>P</sub>和 Y<sub>P</sub>\*、Y<sub>R</sub>和 Y<sub>R</sub>\*、Y<sub>L</sub>和 Y<sub>L</sub>\*、Y<sub>B</sub>和 Y<sub>B</sub>\* 之间的夹角。根据图 3 中的几何关系,广义坐标和 局部坐标之间的转换关系为

$$\begin{cases} X_k^* = X_k \cos\theta_k^* + Y_k \sin\theta_k^* \\ Y_k^* = -X_k \sin\theta_k^* + Y_k \cos\theta_k^* \end{cases}$$
(2)

式中: $k = P, R, L, B, 其中, \theta_{P}^{*} = \theta_{P}, \theta_{B}^{*} = \theta_{B}, \theta_{R}^{*}$ 和  $\theta_{L}^{*}$ 分别为 $(\theta_{R} + \alpha_{1} + \alpha_{2} - \pi)$ 和 $(\theta_{L} - \alpha_{1} - \alpha_{2} + \pi);$  $\alpha_{1}, \alpha_{2}$ 为分流级和并车级齿轮的压力角。

齿轮副间的等效啮合位移可表示为

为消除刚体位移,统一结构单位,将式(1)中的 角位移转换为线位移,则有

$$\begin{cases} Y_{\rm Dp} = r_{\rm Dp} (\varphi_{\rm D} - \varphi_{\rm p}) \\ Y_{\rm Rsh} = r_{\rm Rsh} (\varphi_{\rm Rs} - \varphi_{\rm Rh}) \\ Y_{\rm Lsh} = r_{\rm Lsh} (\varphi_{\rm Ls} - \varphi_{\rm Lh}) \\ Y_{\rm Bo} = r_{\rm Bo} (\varphi_{\rm B} - \varphi_{\rm o}) \end{cases}$$

$$(4)$$



图 2 圆柱齿轮分流传动系统的弯扭耦合动力学模型 Fig. 2 Bending-torsional coupled dynamic model of split torque transmission system



图 3 局部坐标与广义坐标关系图

Fig. 3 Relationship of partial and generalized coordinates of system

式中:r<sub>Dp</sub>、r<sub>Rsh</sub>、r<sub>Lsh</sub>和 r<sub>Bo</sub>分别表示输入轴、右分支双 联轴、左分支双联轴和输出轴的半径。结合式(2~ 4),可消除一个刚体位移,则 Y<sub>mLBh</sub>可由其他线位移 表示为

$$\begin{split} Y_{\rm mLBh} = & Y_{\rm mRBh} - (Y_{\rm L}^* + Y_{\rm B}) + (e_{\rm mRBh} - e_{\rm mLBh}) + \\ & (Y_{\rm R} + Y_{\rm B}^*) - \frac{r_{\rm bLh}}{r_{\rm Lsh}} Y_{\rm Lsh} + \frac{r_{\rm bRh}}{r_{\rm Rsh}} Y_{\rm Rsh} + \\ & \frac{r_{\rm bRh}}{r_{\rm bRs}} (Y_{\rm mRps} + Y_{\rm p} + Y_{\rm R}^* + e_{\rm mRps}) - \end{split}$$

$$\frac{r_{\rm bLh}}{r_{\rm bLs}} (Y_{\rm mLps} + Y_{\rm p}^* + Y_{\rm L} + e_{\rm mLps})$$

$$\tag{5}$$

根据齿轮分流传动系统的动力学模型,则该传 动系统的动力学方程为  $(I_{\mathrm{D}}\ddot{\varphi}_{\mathrm{D}} + K_{\mathrm{tDp}}(\varphi_{\mathrm{D}} - \varphi_{\mathrm{p}}) + c_{\mathrm{tDp}}(\dot{\varphi}_{\mathrm{D}} - \dot{\varphi}_{\mathrm{p}}) = T_{\mathrm{D}}$  $I_{\rm p}\ddot{\varphi}_{\rm p} + K_{\rm tDp}(\varphi_{\rm p} - \varphi_{\rm D}) + c_{\rm tDp}(\dot{\varphi}_{\rm p} - \dot{\varphi}_{\rm D}) =$  $(-F_{\mathrm{mRps}} - F_{\mathrm{mLps}})r_{\mathrm{bp}}$  $(m_{\rm D} + m_{\rm p}) \ddot{X}_{\rm p} + K_{x {\rm D} {\rm p}} X_{\rm p} + c_{x {\rm D} {\rm p}} \dot{X}_{\rm p} = F_{x {\rm p}}$  $(m_{\rm D} + m_{\rm p})\ddot{Y}_{\rm p} + K_{\rm yDp}Y_{\rm p} + c_{\rm yDp}\dot{Y}_{\rm p} = F_{\rm yp}$  $I_{\rm Rs} \ddot{\varphi}_{\rm Rs} + K_{\rm tRsh} (\varphi_{\rm Rs} - \varphi_{\rm Rh}) + c_{\rm tRsh} (\dot{\varphi}_{\rm Rs} - \dot{\varphi}_{\rm Rh}) = F_{\rm mRps} r_{\rm bRs}$  $I_{\rm Rh} \overset{\cdots}{\varphi}_{\rm Rh} + K_{\rm tRsh} (\varphi_{\rm Rh} - \varphi_{\rm Rs}) + c_{\rm tRsh} (\dot{\varphi}_{\rm Rh} - \dot{\varphi}_{\rm Rs}) =$  $-F_{mRBh}r_{hRh}$  $(m_{\text{Rs}} + m_{\text{Rh}})\ddot{X}_{\text{R}} + K_{x\text{Rsh}}X_{\text{R}} + c_{x\text{Rsh}}\dot{X}_{\text{R}} = F_{x\text{R}}$  $(m_{\rm Rs} + m_{\rm Rh}) \ddot{Y}_{\rm R} + K_{\rm vRsh} Y_{\rm R} + c_{\rm vRsh} \dot{Y}_{\rm R} = F_{\rm vR}$  $I_{\rm Ls}\ddot{\varphi}_{\rm Ls} + K_{\rm tLsh}(\varphi_{\rm Ls} - \varphi_{\rm Lh}) + c_{\rm tLsh}(\dot{\varphi}_{\rm Ls} - \dot{\varphi}_{\rm Lh}) = F_{\rm mLps}r_{\rm bLs}$  $I_{\rm Lh} \ddot{\varphi}_{\rm Lh} + K_{\rm tLsh} (\varphi_{\rm Lh} - \varphi_{\rm Ls}) + c_{\rm tLsh} (\dot{\varphi}_{\rm Lh} - \dot{\varphi}_{\rm Ls}) =$  $-F_{\rm mIBh}r_{\rm bIh}$  $(m_{\text{Ls}} + m_{\text{Lh}})\ddot{X}_{\text{L}} + K_{x\text{Lsh}}X_{\text{L}} + c_{x\text{Lsh}}\dot{X}_{\text{L}} = F_{x\text{L}}$  $(m_{\text{Ls}} + m_{\text{Lh}})\ddot{Y}_{\text{L}} + K_{\text{vLsh}}Y_{\text{L}} + c_{\text{vLsh}}\dot{Y}_{\text{L}} = F_{\text{vL}}$  $I_{\rm B}\ddot{\varphi}_{\rm B} + K_{\rm tBo}(\varphi_{\rm B} - \varphi_{\rm o}) + c_{\rm tBo}(\dot{\varphi}_{\rm B} - \dot{\varphi}_{\rm o}) =$  $(F_{\rm mRBh} + F_{\rm mLBh})r_{\rm bB}$  $I_{0}\ddot{\varphi}_{0} + K_{1B0}(\varphi_{0} - \varphi_{B}) + c_{1B0}(\dot{\varphi}_{0} - \dot{\varphi}_{B}) = -T_{0}$  $(m_{\rm B} + m_{\rm o})\ddot{X}_{\rm B} + K_{x{\rm Bo}}X_{\rm B} + c_{x{\rm Bo}}\dot{X}_{\rm B} = F_{r{\rm B}}$  $(m_{\rm B} + m_{\rm o}) \ddot{Y}_{\rm B} + K_{\rm vBo} Y_{\rm B} + c_{\rm vBo} \dot{Y}_{\rm B} = F_{\rm vB}$ 

811

式中: $m_{\rm D}$ 和 $m_{\rm o}$ 分别为输入端和输出端的质量;  $m_{\rm p}$ 、 $m_{\rm Rs}$ 、 $m_{\rm Ls}$ 、 $m_{\rm Lh}$ 和 $m_{\rm B}$ 则分别表示输入齿轮  $Z_{\rm p}$ 、右分支分扭级大齿轮  $Z_{\rm Rs}$ 、右分支并车级小齿轮  $Z_{\rm Rh}$ 、左分支分扭级大齿轮  $Z_{\rm Ls}$ 、左分支并车级小齿轮 轮  $Z_{\rm Lh}$ 和输出齿轮  $Z_{\rm B}$ 的质量; $r_{\rm bp}$ 、 $r_{\rm bRs}$ 、 $r_{\rm bLs}$ 、  $r_{\rm bLh}$ 、和 $r_{\rm bB}$ 分别表示相应齿轮的基圆半径; $F_{\rm mLps}$ 和  $F_{\rm mLBh}$ 、 $F_{\rm mRps}$ 和 $F_{\rm mRBh}$ 分别为左、右分支分扭级和并车 级齿副间啮合力; $F_{xp}$ 和 $F_{yp}$ 、 $F_{xL}$ 和 $F_{yL}$ 、 $F_{xR}$ 和 $F_{yR}$ 、  $F_{xB}$ 和 $F_{yB}$ 分别为齿副间啮合力沿传动轴的广义坐标 x和y方向分解后的合力。各轴x、y方向的合力和 齿轮副间啮合力分别如式(7,8)所示。

 $\begin{cases} F_{xp} = -\sin(\theta_{p})F_{mLps}, F_{yp} = \cos(\theta_{p})F_{mLps} + F_{mRps} \\ F_{xR} = -\sin(\theta_{R})F_{mRps}, F_{yR} = \cos(\theta_{R})F_{mRps} + F_{mRBh} \\ F_{xL} = -\sin(\theta_{L})F_{mLBh}, F_{yL} = \cos(\theta_{L})F_{mLBh} + F_{mLps} \\ F_{xB} = -\sin(\theta_{B})F_{mRBh}, F_{yB} = \cos(\theta_{B})F_{mRBh} + F_{mLBh} \end{cases}$ (7)

$$F_{\rm m\,i} = K_{\rm m\,i} f_{\rm m\,i} (Y_{\rm m\,i}) + c_{\rm m\,i} \dot{Y}_{\rm m\,i} \tag{8}$$

式中:K<sub>mi</sub>、f<sub>mi</sub>和c<sub>mi</sub>分别表示齿轮啮合刚度均值、 齿侧间隙函数和啮合阻尼,下标 *i*分别表示 Rps、 RBh、Lps 和 LBh。齿侧间隙函数 f<sub>mi</sub>(Y<sub>mi</sub>)可表 示为

$$f_{mi}(Y_{mi}) = \begin{cases} Y_{mi} - b_{mi} & Y_{mi} > b_{mi} \\ 0 & -b_{mi} < Y_{mi} < b_{mi} \\ Y_{mi} + b_{mi} & Y_{mi} < -b_{mi} \end{cases}$$
(9)

联立式(2~9),可获得消除刚体位移后的动力 学方程。为提高计算精度,还需要对微分方程进行 量纲化处理。本文采用 4~5 阶变步长 Runge-Kutta 法对系统的非线性振动微分方程进行求解, 从而获得系统的位移响应。

## 3 支承刚度与动载系数

## 3.1 轴承非时变支承刚度

在滚动轴承内外圈的承载方向上,将产生单位 相对位移时的载荷大小定义为轴承的等效支承刚 度 K<sup>[13]</sup>,即

$$K = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\delta} \tag{10}$$

式中:F 为滚动轴承承受的载荷;δ 为轴承承载方 向上内外圈之间的相对变形量。为简化计算,通常 在静力学条件下进行处理。因此,F 为齿轮副间平 均啮合力作用下轴承承受的载荷;δ 为该静载荷下 的轴承径向变形量。

### 3.2 轴承时变支承刚度

轴承结构非常复杂,即使滚动体在几何上处于

理想状态,滚动轴承本身也会因为滚动体在保持架 中位置的变化产生振动。根据赫兹接触理论,不同 滚动体之间载荷的转换以及轴承间隙的存在,会造 成滚动轴承刚度的波动,表现出时变性和非线性特 征。根据文献[14,15],忽略滚子本身的质量、惯 性,假设滚动体与滚道之间为纯滚动,可将轴承简 化为两自由度系统,如图 4 所示。图中: $\theta_i$  为第 j个滚子在t时刻的位置角; $\omega_c$  为轴承保持架转速; N 为滚子数目。位置角  $\theta_i$  在t 时刻的表达式为

$$\theta_j = \phi_0 + \omega_c t + \frac{2\pi}{N}(j-1) \tag{11}$$

式中  $\phi_0$  为第 j 个滚子的初始位置角。

将每个滚子所受的载荷分别投影至 x、y 方向,根据赫兹接触理论及受力平衡条件可得轴承 x、y 方向的分力 f<sub>x</sub>和 f<sub>y</sub> 为

$$\begin{cases} f_x = \sum_{j=1}^{N} Q_j \cos(\theta_j) \\ f_y = \sum_{j=1}^{N} Q_j \sin(\theta_j) \end{cases}$$
(12)

式中 Q<sub>i</sub> 为第 j 个滚子与套圈之间的接触载荷。其 中,Q<sub>i</sub> 可表示为

$$Q_{j} = k_{c} \left( \delta(\theta_{j}) \right)^{n} \gamma_{j}$$
(13)

$$\delta(\theta_i) = x_s \cos(\theta_i) + y_s \sin(\theta_i) - e \quad (14)$$

式中: $k_s$ 为接触变形因子,与材料和轴承类型有 关; $\delta(\theta_j)$ 为第j个滚子的总接触变形量,是位置角  $\theta_j$ 、轴承内圈相对外圈的位移量 $x_s$ 和 $y_s$ 、以及轴承 间隙e的函数; $\gamma_j$ 为接触状态函数,当变形量大于 零时取 1,变形量小于等于零时取 0;n为指数,球 轴承时取 1.5,滚子轴承时取 1.1。



图 4 滚动轴承模型示意图 Fig. 4 Sketch of models of rolling element bearing

则轴承的时变刚度可通过如下定义求出[12]

$$\begin{bmatrix} K_x \\ K_y \end{bmatrix} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\delta} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}f_x}{\mathrm{d}x} \\ \frac{\mathrm{d}f_y}{\mathrm{d}y} \end{bmatrix}$$
(15)

#### 3.3 动载系数

动载系数是衡量齿轮之间啮合力受振动影响 的程度,通常定义齿轮副间的动载系数为

$$G = \frac{kx(t) + cx(t)}{P} \tag{16}$$

式中:k为齿轮副平均啮合刚度;c为啮合阻尼; x(t)和x(t)分别表示啮合线上相对位移和相对速度;<math>P为齿轮副间的静载荷。

# 4 齿轮分流传动系统的动力学特性 仿真分析

该传动系统的基本参数如下:输入转速为 3 000 r/min,输入功率为 150 kW,综合传递误差 幅值为 10 μm,齿侧间隙为 100 μm,其余参数如表 1 所示。轴承的结构参数如表 2 所示。其中,b<sub>Dp</sub> 表示输入轴上的轴承;b<sub>Lsh</sub>、b<sub>Rsh</sub>分别表示左右分支 双联轴上的轴承;b<sub>Bo</sub>表示输出轴上的轴承。输入 轴、双联轴和输出轴的两端分别采用同样型号的轴 承,且左右分支双联轴上轴承完全相同。

Tab. 1 Essential parameters of system					
齿轮	$Z_{p}$	$Z_{\rm js}$	$Z_{\rm jh}$	Z <sub>B</sub>	
齿数	36	108	36	252	
模数/mm	2.5	2.5	2.5	2.5	
齿宽/mm	50	50	70	70	
压力角/(°)	20	20	20	20	
螺旋角/(°)	0	0	22	22	
啮合刚度均 值/(kN•μm <sup>-1</sup> )	$K_{\rm mRps} = 1.15$	$K_{\mathrm{mRBh}} =$ 1.39	$K_{\mathrm{mLps}} =$ 1.15	$K_{mLBh} =$ 1.39	
扭转刚度/ (N・m・rad <sup>-1</sup> )	$K_{ m tDp}\!=\!78100$	$K_{\mathrm{tRsh}} =$ 76 600	$K_{\mathrm{tLsh}} =$ 76 600	$K_{tBo} =$ 1 150 000	
非时变支 承刚度/ (kN・µm <sup>-1</sup> )	$K_{xRp} = 0.453$ $K_{xR2} = 0.058$	$K_{yRp} = 0.326$ $K_{yR1} = 0.072$	$K_{xRl} = 0.955$ $K_{xB} = 2.104$	$K_{yR1} =$ 1.043 $K_{yB} =$	

表 1 系统基本参数

表 2 轴承的结构参数 Tab. 2 Structural parameters of bearings

轴承	$b_{\rm Dp}$	$b_{\mathrm{Rsh}}$ , $b_{\mathrm{Lsh}}$	$\mathbf{b}_{\mathrm{Bo}}$
轴承型号	6209	N219EC	32924JR
外径/mm	85	170	165
内径/mm	45	95	120
滚子直径/mm	13	20	10
滚子个数	9	19	40

## 4.1 滚动轴承支承刚度的时变性

根据上述理论分析,将滚动轴承的支承刚度按照时变模型处理,可获得支承刚度随时间的变化规律。输出轴横向上沿广义坐标 x、y 方向的时变支

承刚度如图 5 和图 6 所示。由图可知,输出轴的 x,y方向的支承刚度在  $3 \times 10^9$  N/m 附近波动,表 现出时变性和非线性的特点。



图 5 输出轴 x 方向支承刚度

Fig. 5 Supporting stiffness of output shaft in x direction



图 6 输出轴 y 方向支承刚度



#### 4.2 时变支承刚度对系统动态响应的影响

为分析支承刚度对传动系统动力学特性的影响,分别将非时变支承刚度、时变支承刚度代入齿轮分流传动系统动力学方程中。研究结果表明,当按照滚动轴承时变模型进行计算时,输出轴上的刚度波动较为明显,因此主要考察输出轴上的横向振动位移 X<sub>B</sub>、Y<sub>B</sub>的响应,结果如图 7~10 所示。

图 7 和图 8 所示为非时变支承刚度下输出轴 上的横向振动位移的动态响应。由图可知,其稳态 响应表现出近似周期变化的规律,相图是一系列近 似椭圆叠加的封闭曲线,Poincaré 映射图截面为 12 个离散点,FFT频谱离散地分布在各个频率上, 不难判断出此时系统为多周期次谐波响应状态。

图 9 和图 10 所示为时变支承刚度下输出轴的 动态响应。由图可知,其时间历程为非周期运动, 相图为相互缠绕和交叉的曲线,Poincaré 映射图截 面为有限区域内、随机分布的点,FFT频谱则是有





一定宽度的连续谱。因此可判断出,系统表现出强 烈的非周期特性和非线性,处于混沌运动状态。

从图 7,8 中的时间历程图可知,系统的响应十 分平稳,输出轴横向振动位移在固定范围内波动。 与图 9,10 的结果对比发现,将时变支承刚度计入 系统后,输出轴的位移响应幅值有一定幅度的增 加,上下波动十分明显;输出轴 y 方向振动位移随 时间的波动比 x 方向上的振动位移大,响应中出 现"拍振"现象。

## 4.3 时变支承刚度对系统动载系数的影响

图 11,12 分别为分扭级和并车级的动载系数 在一个波动周期内的时间历程图。从图 11,12 可



知,非时变支承刚度下,分扭级动载系数最大幅值 为 3.35,并车级动载系数最大幅值为1.998;时变





支承刚度下,分扭级动载系数最大值为 3.39,并车 级动载系数最大值为 2.003。相比非时变支承刚 度,时变刚度下动载系数较大,且时变支承刚度对 分扭级动载系数的影响较明显。

# 5 结 论

本文推导了含时变支承刚度的齿轮分流传动 系统的振动微分方程。通过将角位移转化为线位 移,得到消除刚体位移后的动力学方程组,并采用 龙格库塔法对动力学方程组进行求解,获得了该系 统的动力学响应,进而开展了时变支承刚度和非时 变支承刚度两种情况下系统动力学特性的对比分 析。分析结果表明:

(1)相对于非时变支承刚度而言,滚动轴承的 时变支承刚度产生了4%左右的波动;

(2)支承刚度的时变特性对该分扭传动系统的 动力学特性,尤其是输出轴的横向振动产生一定影 响。输出轴上的横向振动位移幅值增大了约5%; 系统的非周期性和非线性增强,系统的稳定性变差。

(3)在该圆柱齿轮分扭传动系统中,支承刚度的时变性会增大齿轮副间的动载系数,尤其是分扭级的动载系数;并且,与并车级相比,分扭级动载系数较大。

### 参考文献:

- [1] White G. A lightweight split-torque transmission for a 330 kW helicopter [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 1981, 196(1): 11-22.
- [2] White G. Design study of a 375 kW helicopter transmis-sion with split-torque epicyclic and bevel drive stages [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 1983, 197(4):213-224.
- [3] Krantz T L. Dynamics of a split torque helicopter transmission[R]. NASA TM-106410, 1994.
- [4] Krantz T L, Rashidi M. Vibration analysis of a split path gearbox [C]//31st AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit. San Diego: American Institute of Aeronautics and

Astronautics, 1995.

- [5] Zhao Xiahe, Le Haochang, Lan Liu. Free vibration characteristics on a split torque transmission [J]. Journal of Theoretical and Applied Information Technology, 2013, 47(2):660-665.
- [6] 杨振.转矩分流式齿轮传动系统动力学特性研究
   [D].西安:西北工业大学,2007:40-84.
   Yang Zhen. Dynamic characteristics of split-torque gear transmission system[D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2007:40-84.
- [7] 杨振,王三民,范叶森.转矩分流式齿轮传动系统的 非线性动力学特性[J]. 机械工程学报,2008,44 (7):52-57.
   Yang Zhen, Wang Sanmin, Fan Yesen. Nonlinear dynamic characteristics of split-torque gear

transmission system[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2008, 44(7):52-57.

- [8] 杜佳佳,王三民,王颖.功率双分支传动系统的动力学 特性研究[J].机械制造,2012,50(4):10-12.
   Du Jiajia, Wang Sanmin, Wang Ying. Research on dynamic characteristics of the dual power path gear transmission[J]. Machinery, 2012, 50(4):10-12.
- [9] 桂永方,朱如鹏,扶碧波,等. 扭转刚度对双输入齿轮 分流传动系统动力学均载系数的影响[J]. 航空动力 学报,2014,29(9):2265-2268.
  Gui Yongfang, Zhu Rupeng, Fu Bibo, et al. Impact of torsional stiffness on dynamic load sharing of cylindrical gear split-torque transmission system [J]. Journal of Aerospace Power, 2014, 29(9):2265-2268.
- [10] 董金城,王三民,林何,等. 参数对二分支斜齿轮传 动动载和均载特性影响[J]. 航空动力学报,2015,30 (5):1260-1266.
  Dong Jincheng, Wang Sanmin, Lin He, et al. Parameters effect on dual-path helical gear transmission dynamic load and load sharing characteristic [J]. Journal of Aerospace Power, 2015, 30(5): 1260-1266.
- [11] 董皓,马晨,方舟,等.考虑实际齿面的功率四分支 传动系统动态分析[J].南京航空航天大学学报, 2015,47(1):132-138.
  Dong Hao, Ma Chen, Fang Zhou, et al. Dynamic analysis of power four-branching transmission considering actual tooth surface features [J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2015, 47(1): 132-138.
- [12] Liew H V, Lim T C. Analysis of time-varying rolling element bearing characteristics [J]. Journal of sound and vibration, 2005, 283(3/4/5):1163-1179.
- [13] 邓四二, 贾群义. 滚动轴承设计原理[M]. 北京:中国标准出版社, 2008:111-116.
- [14] Sawalhi N, Randall R B. Simulating gear and bearing interactions in the presence of faults: part I. the combined gear bearing dynamic model and the simulation of localized bearing faults [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2008, 22(8):1924-1951.
- [15] Lioulios A N, Antoniadis I A. Effect of rotational speed fluctuations on the dynamic behavior of rolling element bearings with radial clearances [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2006, 48(8):809-829.