DOI:10.16356/j.1005-2615.2016.04.007

基于切割单元直角坐标网格的 DSMC 方法及优化技术

周士杰1夏健1陈晓霞2徐兆可1高宜胜1

(1. 南京航空航天大学航空宇航学院,南京,210016;2. 上海冯卡门计算机科技有限公司,上海,201100)

摘要:对传统直角坐标网格进行改进,根据计算机图形学对与物面相交的正方形网格进行切割,使单元与物面贴体,并能根据流场的变化对网格区域进行局部加密。结合直角坐标网格与非结构网格的特点,编写了自适应直 角坐标网格的生成程序,并发展了基于切割单元直角坐标网格的直接模拟蒙特卡洛(Direct simulation Monte Carlo,DSMC)方法。同时通过当地模拟分子数、动态时间步长技术优化 DSMC 方法,提升计算效率。数值结果 表明,本方法在计算过程中使搜索效率得到大大提升,同时也保证了物面网格单元的贴体性,提高了物面附近流 场的计算精度,还易于实现网格自适应。

关键词:DSMC 方法;直角坐标网格;切割单元;网格自适应 中图分类号:V211.3 文献标志码:A 文章编号:1005-2615(2016)04-0486-09

DSMC Method and Optimization Techniques for Cut-Cell Cartesian Mesh

Zhou Shijie¹, Xia Jian¹, Chen Xiaoxia², Xu Zhaoke¹, Gao Yisheng¹

(1. College of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China;2. Shanghai Karmon Terchnology Co. Ltd, Shanghai, 201100, China)

Abstract: This paper deals with the traditional cartesian mesh to make them body-fitted based on computer graphics and local mesh refinement according to the variation of flow. Combining with the characteristics of rectangular grids and unstructured grid, the adaptive body-fitted Cartesian mesh generation program is writen and the cut-cell DSMC method is developed based on it. In order to improve the computational efficiency, some methods like local simulated molecules and dynamic time steps are used too. Numerical tests indicate that the proposed method greatly improves the search efficiency in the progress of calculation, at the same time, it also ensures body-fitted grids, high calculation accuracy and easy implementation for adaptive grids.

Key words: DSMC method; Cartesian mesh; cut-cell; adaptive grids

在载人航天大力发展、临近空间备受瞩目的今 天,稀薄气体动力学的地位日益彰显,而直接模拟 蒙特卡洛(Direct simulation Monte Carlo,DSMC) 作为解决过渡领域问题^[1-2]最有效的方法更是必不 可少的。稀薄气体流动的 DSMC 方法是一种以分 子为研究对象的统计方法。这种方法的一般过程 可简化为:通过计算机中大量的模拟分子代替真实 气体分子^[3],这些模拟分子的位置坐标、速度分量 等变量会随着分子的运动及碰撞而发生变化。相 应地存储模拟分子的位置、速度以及内能后,通过 统计网格单元中模拟分子的数量和状态来得到整 个流场的计算结果,进而得以模拟真实气体的

收稿日期:2015-05-13;修订日期:2016-01-14

通信作者:夏健,男,教授,博士生导师,E-mail:jxia@nuaa.edu.cn。

引用格式:周士杰,夏健,陈晓霞,等. 基于切割单元直角坐标网格的 DSMC 方法及优化技术[J]. 南京航空航天大学学报,2016,48(4):486-494. Zhou Shijie,Xia Jian,Chen Xiaoxia, et al. DSMC method and optimization techniques for cutcell cartesian mesh[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics,2016,48(4):486-494.

流动。

在过去的数十年中,为了满足研究需求各异、 适应场合不同的飞行器模型的多种要求,发展研究 了基于3类不同网格框架的DSMC方法,分别为: 结构网格、非结体网格以及直角坐标网格。其中, 结构网格^[4]有明显的拓扑结构,能够准确地处理边 界条件。但其生成过程复杂,尤其是生成复杂几何 外形结构网格时,耗费大量的时间和精力;非结构 网格^[4]的生成适用于任意复杂的几何外形,并且生 成速度快。但其单元间关系随机,在处理分子运 动、碰撞等位置追踪问题时繁琐、费时。在DSMC 方法的发展初期,基于结构、非结构网格的DSMC 方法得到了广泛的运用和发展。

直角坐标网格^[5-6]生成方法非常简单,生成速 度非常快,并且在分子追踪方面也十分高效。但其 采用的是正方体网格,网格单元不贴体的致命缺点 大大降低了物面的计算精度。本文对传统直角坐 标网格进行改进,通过对与物面相交的正方体网格 进行切割使单元贴体,并能根据流场的变化对网格 区域进行局部加密。这样既保证了直角坐标网格 的特点,使 DSMC 计算过程中搜索效率得到大大 提升;同时也保证了物面网格单元的贴体性,提高 了物面附近流场的计算精度;还易于实现网格自 适应。

1 计算方法

在使用数值分析方法进行气体流动分析前,首 先要做的工作就是流场网格划分,其质量的好坏直 接决定着计算结果的正确性。所以,本文针对改进 的直角坐标网格进行介绍。与此同时,也分别对直 角坐标网格生成过程中所必不可少的"Bounding Box"方法以及为了提升计算效率而采用的不同于 常见的结构、非结构的分子搜索方法进行了阐述。 而像稀薄气体动力学基本假设、分子碰撞模型、分 子反射模型以及分子能量交换等内容这里就不再 赘述。

1.1 计算网格

非结构网格贴体的特性大大提高了物面附近 计算精度。结合直角坐标网格的特性,本文采用一 种新型直角坐标网格处理方法——切割法^[7-8],使 与物面相交的网格单元贴体。即:采用传统的四叉 树方法生成直角坐标网格,再通过切割法对与物面 相交的网格单元进行切割使单元贴体。

切割法需要用到计算机图形学的相关裁剪原 理,其过程如下: (1)找到与物面相交的单元,同时记录该单元 被哪些物面线段所切割,进而用这些线段对该单元 进行裁剪。

(2)对裁剪后得到的新线段进行排序,使它们 首尾相连。

(3)通过步骤(1~2)处理得到的有序线段组, 构成了每个与物面相交的"切割网格单元"。为了 方便计算,每个"切割网格单元"中的线段都按照逆 时针方向进行存储,同时记录每条线段的左右单 元。

通过上述方法,本文对 NACA23012 翼型进行 网格生成,得到的网格如图 1 所示。此外,本文基 于"Bounding Box"方法(1.2 节中进行介绍)和曲 率加密方法,编写了网格加密程序,对 NA-CA23012 翼型物面附近进行 3 次加密,得到网格 如图 2 所示。





图 2 NACA23012 物面加密网格 Fig. 2 Surface mesh refinement around NACA23012

通过本文所采用方法生成的网格,在弥补传统 直角坐标网格缺点的同时也保留了直角坐标网格 的优势。从图3翼型前缘附近的网格可以看出,物

面相交单元网格的任意性保证了网格的贴体性。

1.2 Bounding Box 方法

在研究直角坐标网格的生成和加密、判断分子 是否与物面相撞等过程中,均需要判断网格、分子 的运动轨迹等是否与物面相交,这些判断繁琐、耗 时,因此如何有效地减少判断次数、提升计算效率 显得尤为重要。本文采用"Bounding Box"技术来



Fig. 3 Mesh around NACA23012 leading edge

解决这一问题。

"Bounding Box"技术即"限制盒"方法,其基本 思路:为所需判断的物体外形或离散线段选择合适 的"限制盒"。先判断网格单元是否与"限制盒"相 交,若与"限制盒"相交,再判断是否与物体外形或 离散线段相交;若不与"限制盒"相交,则必然不与 物体外形或离散线段相交,无需再进行判断。

具体步骤如下:

(1)为需要判断的外形选择合适的"限制盒", 其形状为长方形。"限制盒"的范围通常情况下取 X和Y方向上的2个极限值。图4所示为圆的限 制盒,其坐标范围为[X_{min},X_{max}],[Y_{min},Y_{max}]。



Fig. 4 Bounding box

(2)判断网格单元或分子运动轨迹与"限制盒"的关系。只需用网格单元或分子运动轨迹的极限坐标与"限制盒"的极限坐标进行简单的比较即可, 其判断关系为

$$\begin{cases} X_{1,\min} \leqslant X_{2,\max}, Y_{1,\min} \leqslant Y_{2,\max} \\ X_{2,\min} \leqslant X_{1,\max}, Y_{2,\min} \leqslant Y_{1,\max} \end{cases}$$
(1)

限制盒相交关系如图 5 所示,若长方形 1 与长 方形 2 相交或者长方形 2 包含长方形 1,则必然满 足式(1)。若不满足式(1),则能确定网格单元或分



图 5 限制盒相交关系



子运动轨迹不与物面相交,能快速地将位于"限制 盒"外的情况排除掉。

(3)在步骤(2)中若判定为与"限制盒"相交,则 再将物面分为多条离散线段,并对这些线段选择合 适的"限制盒",重复步骤(1~2)确定可能与哪些具 体的线段相交。

通过这种方法能大大提高物面相交判断的速度,与逐一判断是否与物体的所有离散线段相交相 比要快很多,大幅减少了计算时间。

1.3 分子搜索方法

DSMC方法是通过大量模拟分子代替真实分子从而模拟真实流动的,这些模拟分子的位置坐标、速度分量等变量会随着分子自身运动及分子间相互碰撞而发生变化。所以,在整个 DSMC 方法计算过程中要耗费大量的计算机资源来记录这些数据。

如何快速地判断出分子所在的单元即分子搜 索问题是迫切需要解决的问题。对于非结构网格 或结构网格,通常采用相邻单元搜索方法^[9]:判断 分子运动轨迹与各边关系,若相交则找到对应边相 邻单元继续判断,若不相交则表示已经找到分子所 处的单元。这种方法缺点在于不仅要循环单元的 所有边,还要在每次判断分子运动轨迹与单元边是 否相交时进行4次三角形面积的计算,循环次数多 且计算量大。

为了提升分子搜索的计算速度,结合传统直角 坐标网格的特点,采用位置坐标判断法:将初始流 场划分为 N₁×N₂ 个长方形区域,通过分子坐标判 断来确定分子所处的单元

$$\begin{cases} N_{x} = (x - x_{\min}) / dx + 1 \\ N_{y} = (y - y_{\min}) / dy + 1 \\ N_{\text{cell}} = N_{x} + N_{y} \times N_{1} \end{cases}$$
(2)

式中: x_{min}, y_{min} 分别为流场边界在 x, y 方向上的

489

最小值;dx,dy为初始流场每个长方形单元的宽度 和高度;N_x,N_y为分子所处列数、行数,在计算过 程中只保留小数点之前的整数部分;N_{cell}为单元所 处的单元号。

分子搜索示意图如图 6 所示,根据式(2)可以 快速地判断出单元所在的位置。



图 6 分子搜索示意图 Fig. 6 Searching sketch of molecular

网格进行加密处理后,可以先计算出分子所在 父单元编号,再通过类似的方法判断分子所处子单 元编号直至找到最后所处位置。

2 优化方法

DSMC 方法的原理是通过大量模拟分子的运 动近似真实分子流动,从而模拟真实流动。为了满 足计算精度,在网格单元中投入的模拟分子所代表 的真实分子数不能太大,若单个模拟分子所代替的 真实分子数太小又将影响程序的计算效率,因此, 模拟分子的选取至关重要。同样,网格的疏密也影 响程序的计算效率。本文采用网格自适应、当地模 拟分子与真实分子比和动态时间步长^[10-11]等优化 方法来加快计算速度。

2.1 当地模拟分子与真实分子比

DSMC方法中通过模拟分子代替真实分子, 再利用模拟分子的运动状态得到流场的状态。所 以,模拟分子的数量直接决定计算速度。为了保证 流场的计算精度,在流场变化较大的区域都会进行 网格加密。以往的全局模拟分子与真实分子比,会 导致面积小的网格单元(即物面附近的单元,流场 变化大)中模拟分子数少且计算不够精确,而面积 大的网格单元(即远离物面的单元,流场变化小)中 模拟分子数多计算耗时,浪费不必要的资源。

为了优化这一问题,本文采用当地模拟分子与 真实分子比,即改变各单元中模拟分子所表示的真 实分子数(后文称 FNUM 数)^[12-14]的方法。基本 思路是:每个网格单元根据其面积的大小采用不同 的 FNUM 数(对于单元 *i*,用 CFNUM(*i*)表示)。 通过得到的 CFNUM(*i*)值确保每个网格单元中有 相同的模拟分子数,从而保证了每个网格单元中有 合适的模拟分子数。在计算过程中,分子进入不同 的 CFNUM(*i*)值的网格单元时,因其所代表的真 实分子数不同采用删除或复制模拟分子的手段来 实现流场量的平衡。

当地模拟分子与真实分子比方法的程序可以 实现以下过程:

给定流场中最大面积网格单元的 FNUM 数,则各单元的 CFNUM(i)值可以通过式(3)得到

CFNUM(i) = FNUM/ $S_{max} \times S_i$ (3) 式中 S_{max} , S_i 分别为最大网格单元的面积和单元 i 的面积。

那么,各单元中所需投入的模拟分子数的求解 公式为

 $NM = FND \times S_i / CFNUM(i)$ (4)

式中 NM,FND 分别为模拟分子数和分子数密度。 由式(3,4)可以得到

 $NM = FND \times S_{max}/FNUM$ (5)

从式(5)可以看到,各单元的模拟分子数与体积无关,仅由分子数密度决定。

2.2 动态时间步长技术

分子的碰撞频率是:在单位时间内,分子的碰 撞截面扫过的体积与流场的分子数密度的乘积,即 $\nu = \bar{c}_r \pi d^2 n$,其中 \bar{c}_r 为分子的平均相对速度,从而可 以得到分子的平均碰撞时间为 $t = 1/\nu = \frac{1}{\bar{c}_r \pi d^2 n}$ 。 为了保证计算结果的准确性,DSMC 方法要求模 拟分子在单元里的运动时间小于分子的平均碰撞 时间。

不同密度区域的模拟分子平均碰撞时间不同, 统一的时间步长降低了流场的计算速度。为了加 快流场的时间发展历程,提高计算效率,对不同区 域采用动态时间步长技术。

假设单元 i 的最大碰撞概率为 P_{i,max},最大运动速度为 V_{i,max}。动态时间步长求解方法如下:

(1)设定统一时间步长 dt;

(2)在 N 时间步长内(N 为达到稳定时的指定 时间步数),记录每个单元的最大碰撞概率 P_{i,max} 和最大运动速度 V_{i,max},并统计相应的平均值;

(3)当达到稳定时间步数时,判断各单元的新时间步因子 T_i,方法为:

①记录原单元时间步长因子: T_{i,old};

②若 $P_{i,\max} > P_{\max}$,则新的时间步长因子为 $T_{i,\max} = \max(T_{i,\text{old}} - 1, 1)$;

③若 $P_{i,\max} \leq P_{\max}$,则理想时间步长因子为 $T_{i,\text{new}}^* = H_i/(V_{i,\max} \times dt)$,其中 $H_i = \sqrt{S_i}$, S_i 为单元 i的面积。若 $T_{i,\text{new}}^* > T_{i,\text{old}}$,则 $T_{i,\text{new}} = \min(T_{i,\text{old}} + 1, T_{\max})$ 。否则, $T_{i,\text{new}} = \max(T_{i,\text{old}} - 1, 1)$ 。

(4)经过步骤(1~3)的计算,在*T_i*×dt的时间间隔内,网格单元只需处理1次。

通过时间步长随时间的逐步变化,不仅加快了 流场发展,更提高了计算效率。而非定常流动的计 算要求单元物理时间步长一致,所以在求解非定常 流动问题时,动态时间步长技术则不再适用。

3 算例与分析

为了验证上述方法的正确性以及优化算法的 计算效率,本文分别对高超声速圆柱绕流、二维扩 张管道绕流进行数值模拟,并对数值结果进行了简 单的分析比较。

3.1 高超声速圆球绕流

通过程序对圆球进行基于切割单元的直角坐标网格生成,计算区域为(-0.03 m,0.03 m)×(-0.03 m,0.03 m),圆球的半径为0.01 m。为了方便比较,先后用不采用自适应网格与采用自适应网格的方法对算例进行计算。其中,初始网格单元数为2 312,网格节点数为2 546,如图7 所示。自适应加密后网格单元数为5 168,网格节点数为5 522,如图8 所示。上下左右4 个边界均取为来流边界条件:来流为氮气,速度为2 000 m/s,气体温度297 K,物面温度300 K,来流分子数密度为 1.0×10^{21} 。特征长度取圆球直径 L=0.02 m,分子平均自由程 $\lambda = 1.276$ mm,计算得到努森数 $Kn = \lambda/L = 0.063$ 8。计算中,采用 VHS 分子碰撞



图 7 未加密网格 Fig. 7 Mesh without refinement



图 8 自适应加密网格 Fig. 8 Adaptive mesh refinement

模型,平动能、转动能和振动能间的能量交换采用 Larsen-Borgnakke统计模型^[2,15,16],壁面反射采用 完全漫反射模型。

计算结果如图 9~11 所示,分别为流场密度、 温度和压力分布图。从图 9 可以看出圆球头部出 现明显的弓形脱体激波,在激波后气体的密度逐渐 增加并在头部壁面处达到最大值。对比图 9(a,b)



(a) Mesh without refinement



(b) Adaptive mesh refinement



(a) Mesh without refinement



(b) Adaptive mesh refinement



Fig. 10 Temperature distribution nephogram around sphere

可以发现,经过自适应加密的网格计算所得到的结 果能更好地捕捉圆球头部高密度区域。由图 10 可 知激波后气体的温度逐渐上升并达到最大值。值 得注意的是,最大值并不在头部壁面处,原因在于 壁面处的温度受到等温壁面条件的影响,其温度等 于物面的温度。从图 11 可以看出,激波后气体压 力逐渐增大,在壁面处达到最大值,而沿着圆的表 面朝向尾部逐渐减小。

通过是否采用自适应网格的计算结果对比可 以发现,经过自适应加密后的网格计算出的数值结 果,不仅能够更加准确地捕捉到激波的位置,对高 密度、温度和压强区域的捕捉也相当准确,同时流 场变化也更加光顺。

3.2 二维扩张管道绕流

为了验证自适应直角坐标网格能生成适用于 任意外形的直角坐标网格以及基于切割单元直角 坐标网格的 DSMC 算法的正确性,本文对二维扩 张管道模型^[17-22]进行了数值模拟,管道的模型来自



(a) Mesh without refinement



(b) Adaptive mesh refinement

图 11 圆球绕流计算的压力分布云图

Fig. 11 Pressure distribution nephogram around sphere

文献[17],如图 12 所示。模型 x 方向上的长度为 0.17 m, y 方向上的宽度为 0.035 m,前缘为 15°倾 斜角的尖前缘,管道内表面的扩张角度为 20°,外 表面的扩张角度为 30°。因其外形是轴对称的,只 需计 算 一 半 的 流 场。所 以,计 算 区 域 取 为 $(-0.05 m, 0.20 m) \times (0.00 m, 0.10 m),其直角$ 坐标网格如图 13 所示,其中网格单元数 77 861,网 格节点数 83 397,上边界以及左右边界取远场边 界,下边界取为对称边界。通过数值结果,研究该





图 13 二维扩张管道直角坐标网格 Fig. 13 Cartesian mesh around expanding pipe

模型表面的粘性干扰,尤其是在模型的前缘以及 30°外倾斜坡附近的分离区域。

来流气体为氮气、氧气组成的混合气体,其所 占百分比为: 0.763 : 0.237。来流速度为 1 430 m/s,马赫数为 9.9*Ma*,密度 4.226 × 10^{-4} kg/m³,气体温度51.9 K,物面温度295 K,来 流分子数密度为 0.895 × 10^{22} 。特征长度取 *L*= 101.7 mm,分子平均自由程 $\lambda = 0.1$ mm,计算得 到努森数 *Kn* = $\lambda/L = 0.001$ 。计算中,采用 VHS 分子碰撞模型,平动能、转动能和振动能间的能量 交换采用 Larsen-Borgnakke 统计模型,壁面反射 采用完全漫反射模型。

计算结果如图 14~16 所示,分别为流场密度、 温度和压力分布图。图 14 中的密度分布可以看出 由于模型前部为 15°倾角尖前缘,产生了两道明显 的斜激波。管道内部,斜激波碰到对称面后反射形 成反射激波。此外,管道外压缩面也形成了一道斜 激波。从图中可以看到斜激波与反射波的交界处 以及管道外部两道斜激波的交界处都出现了高密 度区。图 15~16 中的温度和压力分布可以看出管 道前缘 15°倾斜面以及外部 20°压缩面都为高温度 和高压区域,并在压缩面中达到最大值。这都符合 高超声速绕流的特点。

图 14~16 中流场分布、激波位置、激波反射以 及激波与激波的相交等流场特征均符合稀薄气体 二维管道绕流情况。从图 17 二维扩张管道上表面 外侧流线分布图中可以看出气流分离的程度。从 图 18~19 二维扩张管道上表面压强等值线及压缩 面附近局部放大等值线中可以看出激波的强度。



图 14 二维扩张管道高超声速绕流密度云图 Fig. 14 Hypersonic density distribution nephogram around expanding pipe



图 15 二维扩张管道高超声速绕流温度云图

Fig. 15 Hypersonic temperature distribution nephogram around expanding pipe



图 16 二维扩张管道高超声速绕流压力云图

Fig. 16 Hypersonic pressure distribution nephogram around expanding pipe



图 17 二维扩张管道上表面流线

Fig. 17 Streamline around upper surface of expanding pipe



图 18 二维扩张管道上表面压强等值线

Fig. 18 Pressure isolines around upper surface of expanding pipe



图 19 二维扩张管道压缩面附近压强等值线 Fig. 19 Pressure isolines around compression surface of expanding pipe

图 20 为计算所得到的二维扩张管道外表面的 压力系数 C_p 分布曲线,将数值结果与试验数据进 行了对比,可以看出通过基于切割单元直角坐标网 格的 DSMC 方法所得到的数值结果与文献[20]中 的试验结果大致趋势一致。虽然对比结果存在着 一定偏差,但是偏差都在合理范围内,也由此验证 了方法的正确性。



图 20 外表面压力系数分布曲线 Fig. 20 Pressure coefficient distribution curve around

outside surface

4 结束语

结合直角坐标网格与非结构网格各自的特点, 本文提出了一种基于切割单元的直角坐标网格生 成方法。通过这种方法能够对任意复杂外形几何 结构进行快速的直角坐标网格生成,并对与物面相 交的单元进行切割使单元贴体,其物面单元可以是 任意形状,既保证了直角网格较高的计算效率,又 能精确得到模拟物面附近的流动状态。同时,发展 了基于切割单元直角坐标网格的 DSMC 方法,并 通过当地模拟分子数、动态时间步长等优化措施提 升计算效率。计算两组算例,先是通过高超声速圆 球绕流的计算以及对比验证了直角坐标网格的生 成方法和自适应加密方法的正确性,随后通过高超 声速二维扩张管道数值模拟,观察二维扩张管道的 激波位置以及流场特征验证 DSMC 方法的正确 性。本文研究为发展三维情况下的基于切割单元 直角坐标网格的 DSMC 方法打下了基础。

参考文献:

[1] BirdG A. Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flow [M]. Oxford: Clarendon Press, 1994. [2] 沈青.稀薄气体动力学[M].北京:国防工业出版社, 2003.

Shen Qing. Rarefied gas dynamics [M]. Beijing: National Defence of Industry Press, 2003.

[3] 樊菁.DSMC 位置元方法中的表面元的程序标识及分 子表面发射确定论判据[J].力学学报,1999,31(6): 671-675.

Fan Jing. Program making of surface element and the determination of molecular surface reflection in position element algorithm of DSMC method [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 1999, 31(6): 671-675.

- [4] 朱自强.应用计算流体力学[M].北京:北京航空航 天大学出版社,1998:92-124.
 Zhu Ziqiang. Application of computational fluid mechanics [M]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics Press, 1998: 92-124.
- [5] Aftosmis M J, Berger M J, Melton J E. Robust and efficient cartesian mesh generation for componentbased geometry [R]. AIAA Paper 97-0196, 1997.
- [6] Aftosmis M J. Solution adaptive Cartesian grid methods for aerodynamic flow with complex geometries [C] // 28th Computational Fluid Dynamics. Belgium: Van Kareman Insitute, 1997.
- [7] Aftosmis M J, Berger M J, Melton J E. Adaptation and surface modeling for Cartesian mesh methods
 [J]. AIAA Paper 95-1725, 1995.
- [8] 罗运和,戴青. 计算机图形学基础[M]. 北京:中国计量出版社,2003:80-89.
 Luo Yunhe, Dai Qing. Foundations of computer graphics [M]. Beijing: China Metrology Press, 2003: 80-89.
- [9] 王学德,伍贻兆,夏健. 二维非结构网格 DSMC 方法 的实现及其应用[J]. 南京航空航天大学学报,2004, 36(6):704-707.
 Wang Xuede, Wu Yizhao, Xia Jian. Implementation of 2D unstructured DSMC method and its application [J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics &.

Astronautics, 2004, 36(6):704-707.

- [10] Laux M. Local time stepping with automatic adaptation for the DSMC method [R]. AIAA Paper 98-2670, 1998.
- [11] 杜永乐, 阎超. DSMC方法中得自适应当地时间步长 法[J]. 北京航空航天大学学报, 2006, 32(4): 387-390.

Du Yongle, Yan Chao. Adaptive local time step method for DSMC code [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2006, 32 (4):387-390.

- [12] 陈作斌. 计算流体力学及应用[M]. 北京:国防工业 出版社,2003:273-294.
 Chen Zuobin. Computational fluid dynamics and application [M]. Beijing: National Defence of Industry Press, 2003:273-294.
- [13] Wilmoth R G, Carlson A B, LeBeau G J. DSMC grid methodologies for computing low-density, hypersonic flows about reusable launch vehicles [R]. AIAA Paper 96-1812, 1996.
- [14] LeBeau G J. A parallel implementation of the direct simulation monte Carlo method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1999 (174): 319-337.
- [15] Bergnakke C, Larsen P S. Statistical collision model for Monte Carlo simulation of poly-atomic gas mixture [J]. Journal of Computational Physics, 1975, 18(4): 405-420.
- [16] Ivanov M S, Markelov G N, Gimelshein S F. Statistical simulation of reactive rarefied flows: Numerical approach and applications [R]. AIAA Paper 98-2669, 1998.

- [17] Moss J N, Dogra V K, Price J M. DSMC simulation of viscous interactions for a hollow Cylinder-Flare confirguration [R]. AIAA Paper 94-2015, 1994.
- [18] MossJ N, Price J M, Dogra V K, et al. Comparison of DSMC and experimental results for hypersonic external flows [R]. AIAA Paper 95-2028, 1995.
- [19] Moss J N, Olejniczak J. Shock-wave/boundary-layer interactions in hypersonic low density flows [R]. AIAA Paper 98-2668, 1998.
- [20] Chanetz B. Study of axi-symmetric shock wave boundary layer interaction in hypersonic laminar flow [R]. ONERA Technical Report RT 42/4362 AN, 1995.
- [21] Kim M G, Kim S H, Kwon O. J. A parallel cellbased DSMC method with dynamic load balancing using unstructured adaptive meshes [R]. AIAA Paper 2003-1033, 2003.
- [22] Markelov G N, Kudryavtsev A N. Continuum and kinetic simulation of laminar separated flow at hypersonic speed [J]. Journal of Spacecraft and Rockets, 2000, 37(4): 499-506.