

DOI:10.16356/j.1005-2615.2025.01.012

基于 iBeam3 单元的 U 形结构变形场重构算法

李龙飞, 陶翀, 张超, 季宏丽

(南京航空航天大学航空航天结构力学及控制全国重点实验室, 南京 210016)

摘要: 结构变形作为结构健康监测的重要指标之一, 对结构强度的性能评估至关重要, 在实际工程中, 由于工程用途等原因, 应变传感器的安装数量和位置受限, 导致结构变形重构精度降低。为解决上述问题, 本文提出一种基于二节点逆梁单元的应变场重构算法。首先采用二节点梁单元对结构进行离散, 基于 Timoshenko 梁理论以及最小二乘误差理论构建单元内理论应变与实测应变的误差函数, 通过离散应变测点重构结构应变场分布, 并以此为基础重构结构变形。分别通过 ABAQUS 仿真分析与实验验证算法的有效性, 结果表明, 此算法在应变测点数量较少时, 可以有效地重构结构变形, 与直接使用测点应变数据相比, 相对误差减小了 5%, 对结构健康监测具有重要意义。

关键词: 逆有限元法; 逆梁单元; 应变场重构; 实测结构应变; 变形重构

中图分类号: TP391 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-2615(2025)01-0120-10

Deformation Field Reconstruction Algorithm of Frame Structure Based on iBeam3 Element

LI Longfei, TAO Chongcong, ZHANG Chao, JI Hongli

(State Key Laboratory of Mechanics and Control for Aerospace Structures, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: Structural deformation, as one of the important indicators of structural health monitoring, is crucial for evaluating structural strength performance. In practical engineering, due to engineering use and other factors, the number and placement of strain sensors are limited, resulting in reduced accuracy of structural deformation reconstruction. To address the above problem, this paper proposes a strain field reconstruction algorithm based on two-node inverse beam elements. First, the structure is discretized using two-node beam elements. An error function is constructed based on the principles of Timoshenko beam theory and least squares error theory, which evaluates the discrepancy between the theoretical strains within the element and the measured strains. The strain field distribution of the structure is reconstructed using discrete strain measurement points, and this serves as the foundation for reconstructing the structural deformations. The effectiveness of the algorithm is validated through simulations in ABAQUS and experimental tests. The results indicate that the algorithm can effectively reconstruct structural deformations even with a limited number of strain measurement points, reducing the relative error by 5% compared with directly using the strain data from measurement points. It has significant implications for structural health monitoring.

Key words: inverse finite element method; inverse beam element; strain field reconstruction; measured structural strain; deformation reconstruction

收稿日期: 2024-11-05; 修订日期: 2025-01-13

通信作者: 季宏丽, 女, 博士, 教授, E-mail: jihongli@nuaa.edu.cn。

引用格式: 李龙飞, 陶翀, 张超, 等. 基于 iBeam3 单元的 U 形结构变形场重构算法[J]. 南京航空航天大学学报(自然科学版), 2025, 57(1): 120-129. LI Longfei, TAO Chongcong, ZHANG Chao, et al. Deformation field reconstruction algorithm of frame structure based on iBeam3 element[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics (Natural Science Edition), 2025, 57(1): 120-129.

结构变形监测是指对结构变形进行实时测量并对整体结构变形分布进行预测和评估,以判断结构的健康状况,进而对结构进行调整,保证其安全性与可靠性^[1-2]。目前结构变形监测方法主要可分为接触式测量与非接触式测量两类。接触式测量常采用测微计、卡尺等工具,但其存在使用不便、易受人为误差影响且无法实现实时监测等局限性。非接触式测量方法包括激光位移传感器、加速度计和摄像测量等,其中激光位移传感器成本较大,对环境条件要求较严苛且部分激光位移传感器不适用于大范围的位移测量;加速度计在计算位移时需进行积分处理且需考虑其积分初值及误差的影响;摄像测量的准确性易受环境因素影响^[3-6]。因此,测算融合的发展对结构变形监测具有重大影响,通过结合少量离散测点处的结构响应数据与变形重构算法可以准确计算出整体结构的变形分布,这一方法已成为结构健康监测中的重要评估方式^[7]。

目前,根据结构应变响应重构结构变形的的方法主要有 3 种。第一种是由波音公司结构及环境监测实验室 Foss 和 Haugse 提出的模态叠加法^[8-9],该方法通过有限元分析建立关于结构的应变——位移转换矩阵,再将离散点的应变数据代入转换矩阵,完成结构变形重构,但当结构形式和材料参数较复杂时,所需振型阶数增多,将导致计算繁琐^[10]。第二种是 NASA 德莱顿飞行研究中心 Ko 等^[11-12]基于分段线性化方法提出的 Ko 位移理论,该理论基于欧拉-伯努利梁变形理论,首先将结构分段划分,根据划分方案获取结构应变数据,最后结合结构划分方案对应变数据进行积分、求和处理得到结构变形,但当部分应变测点缺失时,其重构精度将大幅度降低。第三种是美国航空航天局兰利研究中心 Tessler 等^[13-14]基于最小二乘变分原理提出的逆向有限元法(Inverse finite element method, iFEM),该方法通过构建逆单元将结构进行离散处理,并构建实测应变与理论应变的误差泛函,当误差泛函为极小时获得应变与位移的传递函数,并结合结构的实测应变求得结构的变形。该方法在推导过程中只涉及单元的划分及应变与位移函数的求解,不涉及结构的材料属性、载荷等信息,具有很好的适用性^[15]。针对应变场重构问题,曾捷等^[16]构建基于四节点逆元法对板壳结构的应变场进行反演。综上所述,在现有的结构变形重构方法中,逆有限元法已验证其在任意载荷下的适用性和较高的重构精度。然而,当应变测点数量较少时,不同结构的变形重构效果仍然存在较大的误差。

为解决上述问题,本文提出了一种基于二节点逆梁单元(Inverse beam 3, iBeam3)的应变场重构算法。以简支梁和门形结构模型为研究对象,在减少应变测点数量的前提下,结合有限元仿真与实验分

析两种方法,验证了该应变场重构算法的有效性,与直接使用测点应变数据相比,该算法显著降低了变形重构误差,具有重要的结构健康监测应用价值。

1 基于 iBeam3 单元的应变场重构算法

逆有限元法在梁结构变形重构中应用广泛,但当应变测点数量减少时,变形重构的精度会有所下降。本节提出了一种应变场重构算法,通过该算法重构结构应变场分布,并以重构应变作为输入重构结构变形,并根据应变场重构结果优化结构单元划分方案,从而提高变形重构算法的精度。

1.1 逆有限元法

1.1.1 逆有限元法介绍

逆有限元法的核心在于构建逆向单元理论应变与真实应变的误差泛函,并对该泛函求极小值来实现结构变形重构。本节首先介绍基于 iBeam3 单元的逆有限元法,并以简支梁结构为研究对象验证算法的有效性。在 iBeam3 单元模型中,单元长度为 L 、厚度为 $2h$,节点 1 和 2 分别为单元的两个端点,都位于中性面上, xyz 为建立在单元内部的局部坐标系,且坐标原点在单元形心处,其中 u 和 ω 为在局部坐标系下节点沿 x 和 z 两个方向的线位移, θ_y 为绕 y 轴的转动角位移^[17],如图 1 所示。

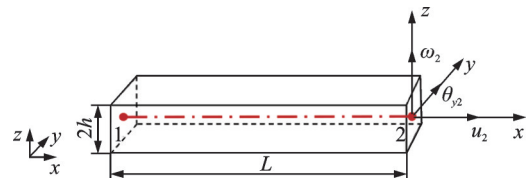


图 1 二节点逆梁单元模型

Fig.1 Two-node inverse beam element model

由经典梁理论与有限元理论可得^[18],单元内部任意一点的位移可以通过两个节点的自由度结合单元形函数来表示,其表达式如下

$$\begin{cases} u(x) = N_1 u_1 + N_2 u_2 \\ \omega(x) = M_1 \omega_1 + Q_1 \theta_{y1} + M_2 \omega_2 + Q_2 \theta_{y2} \\ \theta_y(x) = \frac{\alpha \omega}{\alpha x} = M_{1,x} \omega_1 + Q_{1,x} \theta_{y1} + M_{2,x} \omega_2 + Q_{2,x} \theta_{y2} \end{cases} \quad (1)$$

式中 $N_1, N_2, M_1, M_2, Q_1, Q_2$ 为形函数,表达式分别为

$$\begin{cases} N_1 = 1 - \xi \\ N_2 = \xi \\ M_1 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ M_2 = 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ Q_1 = (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)L \\ Q_2 = (\xi^3 - \xi^2)L \end{cases} \quad (2)$$

式中 $\xi = x/L$, 且 $0 \leq \xi \leq 1$ 。

根据线弹性理论,结构表面应变 ϵ_x 可以表示为轴向应变 $\epsilon(\mathbf{u}_e)$ 与弯曲应变 $\mathbf{k}(\mathbf{u}_e)$ 的线性组合

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} - y \frac{\partial \theta_z}{\partial x} = \epsilon(\mathbf{u}_e) - y \mathbf{k}(\mathbf{u}_e) = \mathbf{B}_b \mathbf{u}_e - y \mathbf{B}_m \mathbf{u}_e \quad (3)$$

式中: \mathbf{B}_b 表示拉压应变矩阵, \mathbf{B}_m 表示弯曲应变矩阵, 其具体表达式如下所示

$$\mathbf{B}_b = [N_{1,x} \quad 0 \quad 0 \quad N_{2,x} \quad 0 \quad 0] \quad (4)$$

$$\mathbf{B}_m = [0 \quad Q_{1,xx} \quad M_{1,xx} \quad 0 \quad Q_{2,xx} \quad M_{2,xx}] \quad (5)$$

基于 iBeam3 单元的逆有限元变形重构算法以结构上下表面的应变数据作为输入, 其应变测量示意图如图 2 所示。

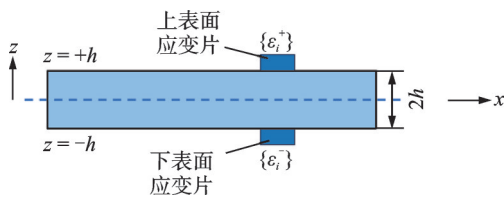


图 2 应变测量示意图

Fig.2 Schematic diagram of strain measurement

分别测得结构上、下表面的应变 ϵ_i^+ 、 ϵ_i^- , 下标 i 表示单元内部传感器的编号, 再根据式(6)计算得到实测轴向应变 e_i^ϵ 和实测弯曲应变 k_i^ϵ 。

$$\begin{cases} e_i^\epsilon = \frac{\epsilon_i^+ + \epsilon_i^-}{2} \\ k_i^\epsilon = \frac{\epsilon_i^+ - \epsilon_i^-}{2h} \end{cases} \quad (6)$$

基于二节点逆梁单元的单元内实测应变与理论应变的误差函数

$$\Phi_e(\mathbf{u}_e) = \omega_b \|\epsilon(\mathbf{u}_e) - e^\epsilon\|^2 + \omega_m \|\mathbf{k}(\mathbf{u}_e) - k^\epsilon\|^2 \quad (7)$$

式中: ω_b 、 ω_m 为罚参数, 其值与测量数据和理论分析数据的相关程度有关, 当应变数据是通过应变传感器测量所得时, $\omega_b = \omega_m = 1$; 当应变数据缺失时, 为了确保重构的准确性, $\omega_b = \omega_m = 10^{-6}$ 。

误差函数(7)范数计算表达式如式(8~9)所示。

$$\omega_b \|\epsilon(\mathbf{u}_e) - e^\epsilon\|^2 = \frac{1}{L_e} \sum_{i=1}^n \int_{\frac{(i-1)L_e}{n}}^{\frac{iL_e}{n}} \omega_{bi} (\epsilon(\mathbf{u}_e)_i - e_i^\epsilon)^2 dx \quad (8)$$

$$\omega_m \|\mathbf{k}(\mathbf{u}_e) - k^\epsilon\|^2 = \frac{(2h)^2}{L_e} \sum_{i=1}^n \int_{\frac{(i-1)L_e}{n}}^{\frac{iL_e}{n}} (k(\mathbf{u}_e)_i - k_i^\epsilon)^2 dx \quad (9)$$

将式(8~9)代入式(7)中, 并利用变分法求解泛函 $\Phi_e(\mathbf{u}_e)$ 的极值, 可得

$$\frac{\partial \Phi_e(\mathbf{u}_e)}{\partial \mathbf{u}_e} = \mathbf{k}_e \mathbf{u}_e - \mathbf{f}_e = 0 \quad (10)$$

式中: \mathbf{k}_e 为单元等效刚度矩阵; \mathbf{u}_e 为单元位移矩阵;

\mathbf{f}_e 为单元等效载荷矩阵, 表达式如下所示

$$\mathbf{k}_e = \sum_{i=1}^n \int_{\frac{(i-1)L_e}{n}}^{\frac{iL_e}{n}} (\omega_{bi} (\mathbf{B}_b)^T \mathbf{B}_b + \omega_{mi} (2h)^2 (\mathbf{B}_m)^T \mathbf{B}_m) dx \quad (11)$$

$$\mathbf{f}_e = \sum_{i=1}^n \int_{\frac{(i-1)L_e}{n}}^{\frac{iL_e}{n}} (\omega_{bi} (\mathbf{B}_b)^T \mathbf{e}_i^\epsilon + \omega_{mi} (2h)^2 (\mathbf{B}_m)^T \mathbf{k}_i^\epsilon) dx \quad (12)$$

式中: \mathbf{k}_e 只与应变测点所在逆向单元的单元节点位置及应变测点位置有关, 不随应变测量值的变化而变化; \mathbf{f}_e 与结构表面的实测应变测量值有关, 需根据单元划分方案分别将二者组装, 得到结构的整体刚度矩阵 \mathbf{K}_e 与整体载荷向量 \mathbf{F}_e 。且刚度矩阵 \mathbf{K}_e 为奇异矩阵, 需结合单元边界条件消除结构刚体位移, 将 \mathbf{K}_e 化为正定矩阵; 根据式(10)对刚度矩阵 \mathbf{K}_e 求逆后可得单元所有节点位移 \mathbf{U}_e , 再根据式(1)可得结构表面变形, 完成结构变形重构。

1.1.2 逆有限元法仿真验证

利用 ABAQUS 对简支梁结构进行建模, 铝型材材料参数如表 1 所示。对梁结构左右两端施加简支约束边界条件, 分别在 $X=250$ mm 处施加 $F_1=20$ kN 以及 $X=875$ mm 处施加 $F_1=-30$ kN 的 z 方向载荷, 其模型及载荷示意图如图 3 所示。

表 1 材料参数

Table 1 Material parameters

材料参数	数值
弹性模量/Pa	7×10^{10}
密度/($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	2 710
泊松比	0.346

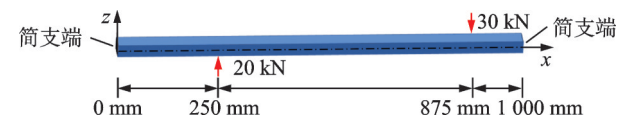


图 3 简支梁模型示意图

Fig.3 Schematic diagram of the Charpy model

由于简支梁结构具有中性面对称性, 当结构只发生弯曲变形时, 结构下表面应变数据可由上表面应变数据计算求得, 因此只需测得结构单侧应变数据。根据图 4 所示, 将梁结构划分为 10 个二节点单元, 提取测点应变数据并将其代入重构算法中得到结构重构位移, 并将其与仿真位移做对比, 验证逆有限元法在简支梁结构变形重构的有效性, 重构位移曲线对比如图 5 所示, 位移云图对比如图 6 所示。其中 U3 表示沿 z 轴方向的位移。

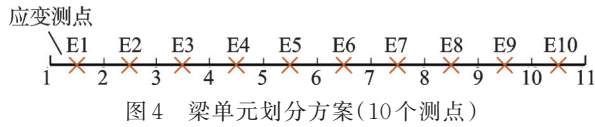


图4 梁单元划分方案(10个测点)

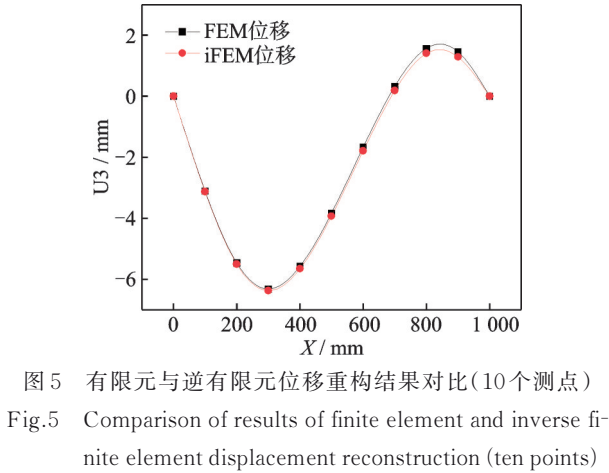


图5 有限元与逆有限元位移重构结果对比(10个测点)
Fig.5 Comparison of results of finite element and inverse finite element displacement reconstruction (ten points)

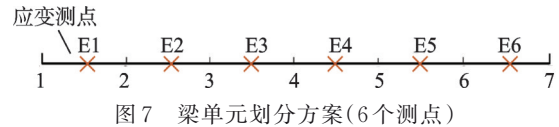


图7 梁单元划分方案(6个测点)

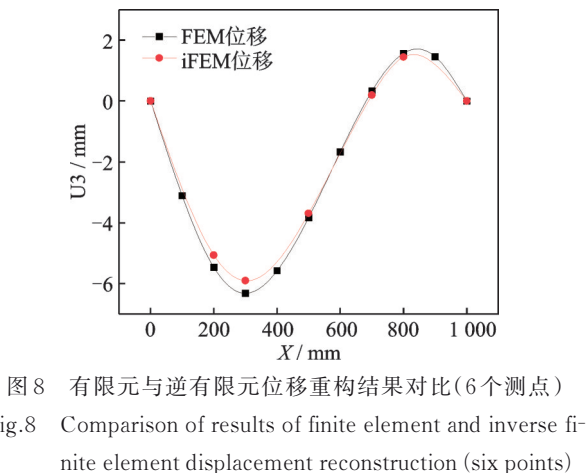


图8 有限元与逆有限元位移重构结果对比(6个测点)
Fig.8 Comparison of results of finite element and inverse finite element displacement reconstruction (six points)

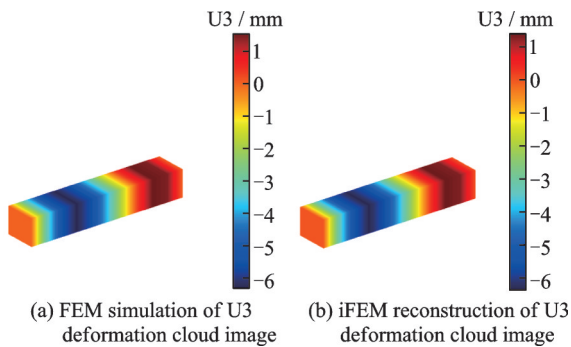


图6 有限元与逆有限元重构变形云图对比
Fig.6 Comparison of finite element and inverse finite element reconstruction deformation contours

分析图 5、6 可得,基于 iBeam3 单元的逆有限元法可以有效重构简支梁变形。为了更为精确地评估有限元仿真变形与逆有限元重构变形之间的误差,采用相对百分比误差数据对算法有效性进行量化评估,具体计算公式如式(13)所示。

$$\delta = \left| \frac{U_{iFEM} - U_{FEM}}{U_{FEM}} \right| \times 100\% \quad (13)$$

经过计算得到,其中变形最大节点的重构误差为 0.875%,平均相对误差为 4.367%,其中部分节点的变形较小导致相对误差偏大而不计入其中。在实际工程中,由于工程用途等因素,应变传感器的安装数量及位置受限,从而导致结构变形重构效果降低。以上述简支梁为例,将应变测点如图 7 所示减少为 6 个时,其重构效果如图 8 所示。

由图 8 可得,当应变测点数量减少时,变形重构效果有所下降,变形最大节点的相对误差达到了 6.554%,误差较大。为了提高变形重构精度,提出了

基于 iBeam3 应变单元的应变场重构算法,当应变测点数量较少时,通过此算法仍能有效地重构结构变形。

1.2 应变场重构算法

1.2.1 应变场重构算法介绍

本节主要介绍基于二节点逆梁应变单元的应变场重构算法,其单元示意图如图 9 所示,其中 L_e 为单元长度,每个节点分别包含轴向应变 ϵ 与弯曲应变 k 两个应变参数。

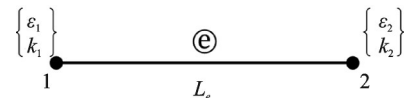


图9 二节点逆梁应变单元示意图
Fig.9 Schematic diagram of the strain element of the two-node reverse beam

应变场重构算法基于最小二乘法误差函数原理,构建简支梁结构的理论应变与真实应变之间的误差函数^[16],如式(14)所示。

$$\Phi_e(\epsilon) = \|e(\epsilon_e) - e^e\|^2 + \|k(\epsilon_e) - k^e\|^2 \quad (14)$$

将应变误差函数对单元节点应变 ϵ 求偏导,当误差函数取最小值时,即可根据真实应变求得理论应变,如式(15)所示。

$$\frac{\partial \Phi_e(\epsilon)}{\partial \epsilon} = k_e^e \epsilon_e - f_e^e = 0 \quad (15)$$

式中: k_e^e 为单元应变刚度矩阵, f_e^e 为单元应变载荷矩阵,其表达式如下所示

$$k_e^e = \sum_{i=1}^n \int_{(i-1)L_e}^{iL_e} ((C_b)^T C_b + (2h)^2 (C_m)^T C_m) dx \quad (16)$$

$$f_e^\epsilon = \sum_{i=1}^n \int_{\frac{(i-1)L_e}{n}}^{\frac{iL_e}{n}} ((C_b)^T \epsilon_i + (2h)^2 (C_m)^T k_i) dx \quad (17)$$

式中： C_b 为单元节点拉压应变函数矩阵， C_m 为单元节点弯曲应变函数矩阵，二者表达式如下所示

$$C_b = [N_1 \quad 0 \quad N_2 \quad 0] \quad (18)$$

$$C_m = [0 \quad N_1 \quad 0 \quad N_2] \quad (19)$$

根据结构的单元划分方案将所有单元组装，得到整体结构应变刚度矩阵 K_e^ϵ 和整体结构应变载荷矩阵 F_e^ϵ ，对应变刚度矩阵求逆后，即可得到每个单元所有节点上的应变，如式(20)所示。

$$\epsilon_i^\epsilon = [\epsilon_i^\epsilon \quad k_i^\epsilon]^T \quad i = 1, 2 \quad (20)$$

根据有限元分析理论可得，单元内任意一点的应变可以通过单元形函数及 2 个节点的应变线性插值表示，其表达式如(21)所示。

$$\epsilon^\epsilon = N \epsilon_i^\epsilon \quad \epsilon_i^\epsilon = [\epsilon_1^\epsilon \quad \epsilon_2^\epsilon]^T \quad (21)$$

通过上述应变场重构算法可以根据结构表面少数应变数据重构整个结构的应变分布，进一步以重构应变作为变形重构算法的输入，完成结构的变形重构。

1.2.2 应变场重构算法仿真验证

为验证应变场重构算法的有效性，首先根据上述应变测点数据重构结构应变分布，将其与仿真应变分布对比，对比曲线如图 10 所示。之后将梁结构均匀划分为 10 个二节点单元，以重构应变作为算法输入重构结构变形，并与仿真变形以及以实测应变为输入的重构变形做对比，结果如图 11 所示。

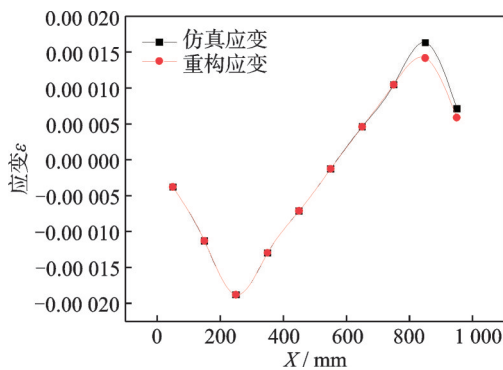


图 10 应变重构对比曲线图

Fig.10 Strain reconstruction comparison curves

为了验证应变场重构算法对变形重构精度的影响，设计了 2 种单元划分方案。

方案 1: 将梁结构均匀划分为 10 个二节点单元，如图 11(a) 所示；

方案 2: 根据应变分布情况将梁结构自适应划分为 10 个二节点单元，如图 11(b) 所示。

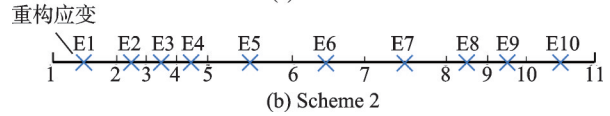
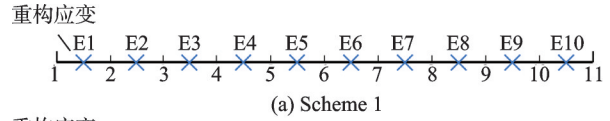


图 11 梁结构不同单元划分方案

Fig.11 Division schemes for different elements of beam structure

根据重构应变获取单元划分方案 1 与单元划分方案 2 的应变数据，再结合基于 iBeam3 单元的逆有限元法，对比不同单元划分方案的变形重构效果，其对比结果如图 12 所示。

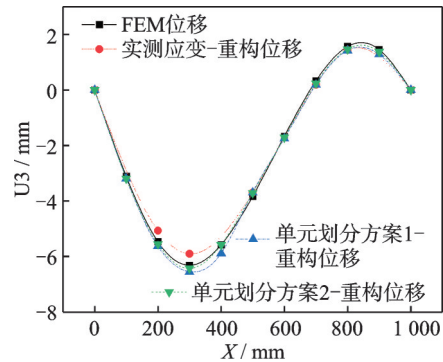


图 12 不同单元划分方案变形重构效果对比图

Fig.12 Comparison of deformation and reconstruction effect of different unit division schemes

由图 12 可得，应变场重构算法可以有效提升变形重构效果。均匀划分单元方案虽然对变形重构精度有所提升，但是误差仍然较大。当根据应变分布对结构进行自适应单元划分，即在 $X=300\text{ mm}$ 以及 $X=850\text{ mm}$ 附近细化单元划分，重构精度再一次得到提升。

为了进一步说明应变场重构对结构变形重构算法的优化效果，选择变形最大节点重构误差与节点平均绝对百分比误差 (Mean absolute percentae error, MAPE) 对重构效果进行评估，其表达式如式 (22) 所示，变形重构对比数据如表 2 所示。

表 2 不同应变输入的变形重构对比

Table 2 Comparison of deformation and reconstruction effects of different strain data

应变输入	FEM 最大位移/mm	iFEM 最大位移/mm	变形最大节点误差/%	MAPE/%
实测应变	-6.317	-5.903	6.554	13.294
单元划分方案 1 应变	-6.317	-6.549	3.673	9.443
单元划分方案 2 应变	-6.317	-6.429	1.773	5.465

$$MAPE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{U_{FEM}^i - U_{iFEM}^i}{U_{FEM}^i} \right| \times 100\% \quad (22)$$

由表 2 可得,应变场重构算法对结构变形重构具有一定的优化效果,可以在工程中使用此方法减少应变传感器的安装数量。对比均匀划分单元与自适应划分单元的重构误差可得,自适应单元划分方案可以进一步提高变形重构精度,对变形最大节点的重构误差更小,更有利于满足结构健康监测需求。

2 门形结构仿真验证

2.1 有限元建模

为了验证应变场重构算法在不同结构的适用性,利用 ABAQUS 对门形结构进行有限元建模。对此结构施加底部固支边界条件,在顶梁的 $X=250\text{ mm}$ 处施加大小 1.5 kN 、方向向下的集中力载荷,如图 13 所示。结构材料同样采用铝型材,单根梁长均为 $1\ 000\text{ mm} \times 1\ 000\text{ mm} \times 1\ 000\text{ mm}$,梁截面为 $40\text{ mm} \times 40\text{ mm}$ 的矩形截面。

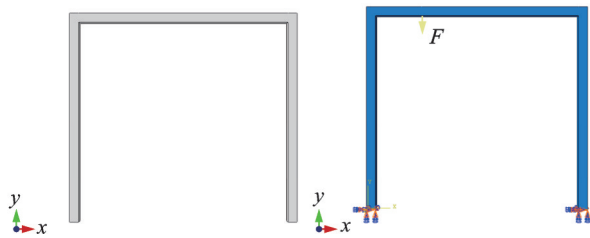


图 13 门形结构模型及边界条件示意图

Fig.13 Schematic diagrams of structure model and boundary conditions

2.2 算法验证

根据 ABAQUS 对结构进行仿真分析,在侧梁布置 5 个应变测点,顶梁布置 6 个应变测点,提取应变测点数据作为重构算法输入,并以顶梁整体位移场作为重构算法对比,验证基于 iBeam3 单元的应变场重构算法在门形结构的适用性。基于不同应变输入的变形重构效果对比如图 14 所示。图 15 为结构的位移与转角的有限元计算云图与重构云

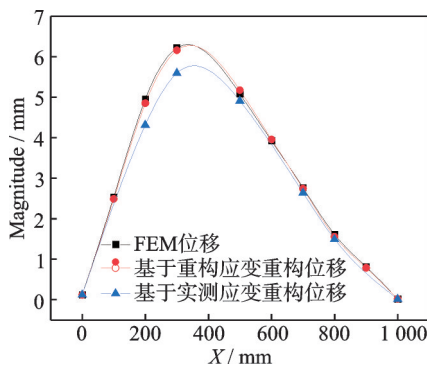
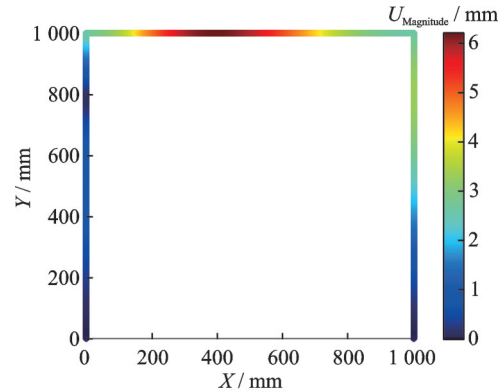


图 14 不同应变输入的变形重构效果对比

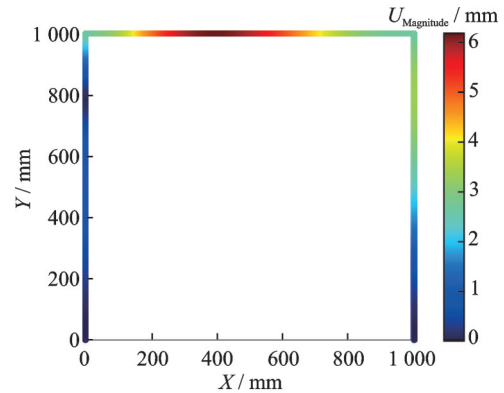
Fig.14 Comparison of deformation reconstruction effects with different strain inputs

图。其中 UR3 表示角位移。

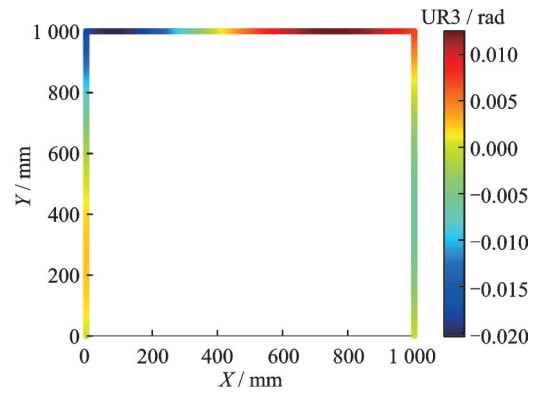
由于结构侧梁的位移及转角较小,因此选取顶梁变形重构效果作为参考,对比结果如表 3、4 所示。



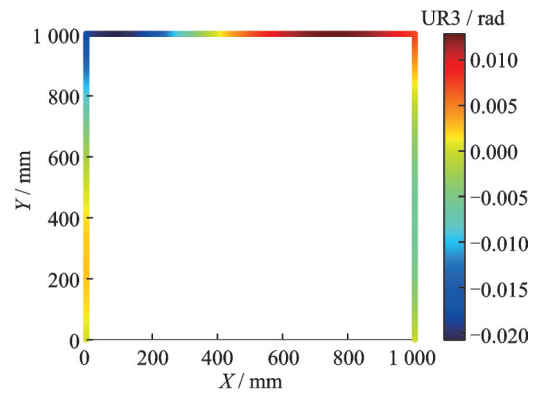
(a) Finite element line displacement



(b) Inverse finite element line displacement



(c) Finite element angular displacement



(d) Inverse finite element angular displacement

图 15 有限元与逆有限元变形云图对比

Fig.15 Comparison of finite element and inverse finite element deformation contours

表 3 结构仿真位移与重构位移对比

Table 3 Comparison of structural simulation and reconstruction displacements

重构输入	FEM最大位移/mm	iFEM最大位移/mm	变形最大节点误差/%	MAPE/%
仿真应变	6.216	5.596	9.974	5.479
重构应变	6.216	6.159	0.917	1.303

表 4 结构仿真转角与重构转角对比

Table 4 Comparison of structural simulation and reconstruction corners

重构输入	FEM最大转角	iFEM最大转角	转角最大节点误差/%	MAPE/%
仿真应变	0.0124	0.0131	5.645	7.469
重构应变	0.0124	0.0127	2.419	4.284

通过上述结果分析可得,位移最大节点重构误差减小了 9.057%,转角最大节点重构误差减小了 3.226%;整体结构的位移重构误差减小了 4.176%,转角重构平均误差减小了 3.185%。结果表明:针对门形结构应变测点数量较少的情况下,基于 iBeam3 单元的应变场重构算法可以有效提高变形重构效果,在工程上可使用此方法减少应变传感器的布置数量,使应变传感器得到高效使用。

3 实验验证

3.1 实验方案

加工门形结构,本次实验所采用的结构与仿真中的相同,材料为铝型材,梁截面为 40 mm×40 mm,单根梁结构长均为 1 000 mm。由于实验场地条件受限,在其底部向外组装附加梁并施加重物以达到固支边界条件,防止其在加载过程中产生偏移导致误差。且由于逆有限元法重构结构变形与结构所加载荷大小、形式无关,因此通过拉伸机直接在其结构顶部施加载荷即可。当顶梁受载时,由于侧梁变形较小,选取顶梁作为变形重构算法验证对象。

变形重构实验系统的搭建如图 16 所示,主要包括两大部分:首先是载荷加载系统,通过拉伸机对结构进行压力加载,使结构产生变形;其次是数据采集部分,应变数据通过东华测试公司的应变采集设备进行采集,位移数据通过松下激光位移测距传感器进行采集,分别记录加载前后传感器示数及电压信号作为位移验证;最后通过计算机计算验证算法的有效性。

3.2 实验结果验证

本次实验中,在顶梁布置 6 个应变测点,侧梁分别布置 4 个应变测点,并布置 5 个激光位移测距传感器测点,通过对比相同载荷下不同测点的变形重构效果来验证算法的有效性。为了验证算法的

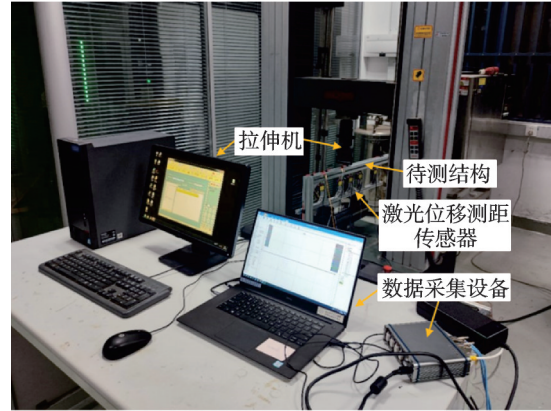


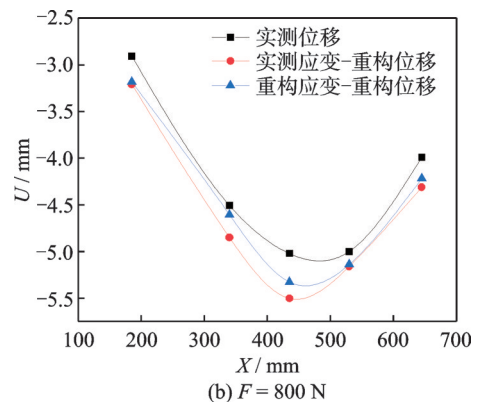
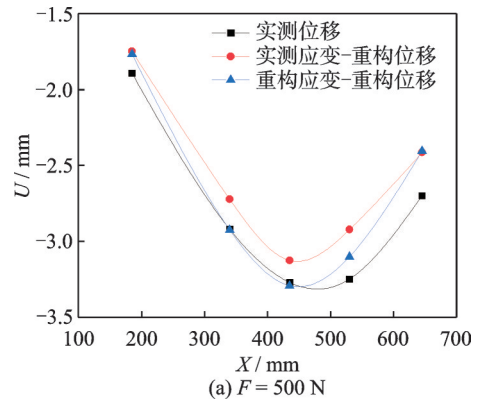
图 16 变形重构实验系统

Fig.16 Deformation reconstruction test system

适用性,选取两种加载方案,第一种为在结构相同位置施加不同大小的载荷;第二种为在结构不同位置施加不同大小的载荷。对比实测位移与重构位移,进一步验证算法的有效性。

3.2.1 相同位置不同载荷变形重构效果

对门形结构顶梁 $X=450$ mm 处分别施加 $F=500$ 、800 和 1 000 N 的力,并将位移测点布置在 $X=185$ 、340、435、530 和 645 mm 处,获取结构在加载过程中的应变数据及位移数据,将应变数据代入变形重构算法中得到重构变形,通过对比重构位移与实测位移验证变形重构算法的有效性。之后根据实测应变重构结构应变场分布,以重构应变作为算法输入重构结构变形,对比两次变形重构效果,验证应变重构算法的有效性。对比结果如图 17 所示,图中 U 均为顶梁结构位移测点的挠度值。



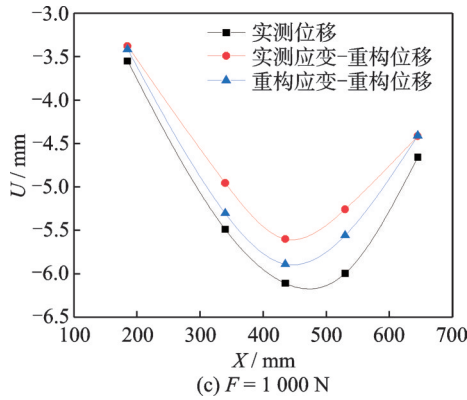


图 17 不同工况下变形重构对比图($X=450\text{ mm}$)

Fig.17 Comparison of deformation reconstruction under different working conditions ($X=450\text{ mm}$)

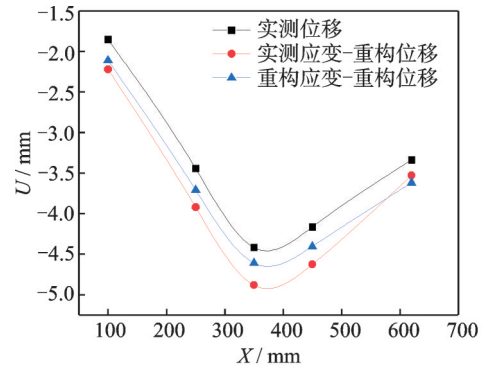
通过对比不同工况下变形重构对比图可得,当应变测点数量较少时,变形重构算法仅能重构出结构变形趋势,在 $F=500$ 、 800 及 $1\ 000\text{ N}$ 时变形最大节点的重构相对误差分别达到了 4.443% 、 9.608% 及 8.303% ,重构误差较大。将应变数据代入应变场重构算法重构结构应变分布,以重构应变为输入重构相对误差分别为 0.661% 、 6.082% 及 3.592% ,验证了应变重构算法的有效性。

3.2.2 不同位置不同载荷变形重构效果

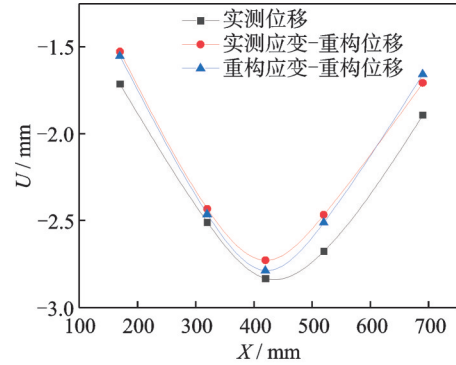
对门形结构不同位置施加不同大小的力,并改变位移测点位置。第一次在 $X=350\text{ mm}$ 处施加 $F=700\text{ N}$ 的力,第二次在 $X=420\text{ mm}$ 处施加 $F=300\text{ N}$ 的力,并将位移测点分别布置在 $X=100$ 、 250 、 350 、 450 和 620 mm 处,再次对比两次变形重构效果,验证应变重构算法的适用性,对比结果如图 18 所示。通过图 18 可得,当载荷发生变化时,应变重构算法仍能有效提高变形重构精度。在第一次加载实验中,与实测应变相比,以重构应变作为输入的变形重构平均误差减小了 4.215% ;在第二次加载实验中,平均误差减小了 1.082% 。

为了进一步验证该算法在不同载荷下的适用性,采集第一次加载过程中的应变以及位移数据,并以 3 号激光位移测点即 $X=350\text{ mm}$ 处的位移测点作为参考,对比加载、卸载过程中的变形重构效果,对比结果如图 19 所示。由图 19 可得,在加载/卸载过程中,应变重构算法可以有效提高结构变形重构精度,当载荷 $F=700\text{ N}$ 时,其相对误差减小了 5.029% 。在其余载荷下应变重构算法仍可以减小重构误差,进一步验证了该算法的适用性广的特点。

通过上述实验数据可得,基于 iBeam3 的应变场重构算法可以在应变测点数量较少时提高变形重构效果。



(a) Comparison of the first load deformation reconstruction



(b) Comparison of the second load deformation reconstruction

图 18 不同工况下变形重构对比图($X=350$ 和 420 mm)

Fig.18 Comparison of deformation reconstruction under different working conditions ($X=350$ and 420 mm)

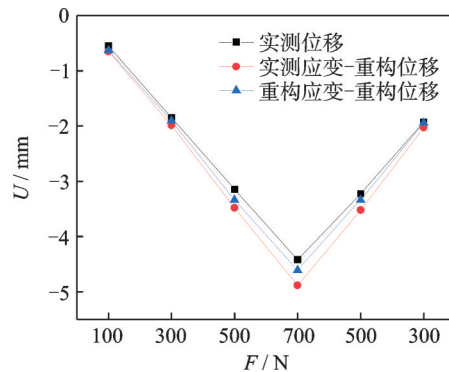


图 19 加载/卸载过程中变形重构对比图

Fig.19 Comparison of deformation reconstruction during loading/unloading

3.3 误差分析

(1) 结构两端变形重构相对误差较大,原因在于当顶部施加载荷时,两端变形较小,导致计算相对误差较大,其误差与结构最大变形相比,可以忽略不计;

(2) 在实验准备过程中,应变片粘贴时并非绝对平行于梁轴向,当应变片粘贴无法完全符合要求时,会造成应变数据较小,从而导致重构误差,可以通过提高粘贴精度来减小误差;

(3) 在重构算法中,将底部视为固支边界条件,但是在实验加载过程中,其底部无法得到完全固

定,导致结构产生刚体位移,可以通过增大结构与地面的摩擦以减小刚体位移,从而减小误差。

4 结 论

针对当应变测点数量较少时,结构变形重构误差大的问题,本文提出了一种基于 iBeam3 单元的应变场重构算法,以简支梁结构与门形结构为对象通过仿真验证此算法对变形重构精度的提升;并搭建变形重构实验系统,对门形结构进行加载实验,采集加载过程中的应变数据与位移数据,以测点应变与重构应变为输入重构结构变形,并与测点位移做对比验证算法的有效性以及适用性。结果表明,基于 iBeam3 单元的应变场重构算法可在应变测点较少时有效地提高变形重构效果,与已有的应变场重构算法相比,其计算效率更高、更适用于梁结构变形重构,对由梁组成的复杂结构健康监测具有重要意义。

参考文献:

- [1] 汪雪良,朱全华,张涛,等.船舶结构监测技术研究进展[J].船舶力学,2022,26(8):1246-1253.
WANG Xueliang, ZHU Quanhua, ZHANG Tao, et al. Progress in studies on ship structure monitoring technique[J]. Journal of Ship Mechanics, 2022, 26(8): 1246-1253.
- [2] 熊海贝,李志强.结构健康监测的研究现状[J].结构工程师,2006,22(5):86-90.
XIONG Haibei, LI Zhiqiang. State of the art of structural health monitoring[J]. Structural Engineers, 2006, 22(5): 86-90.
- [3] 雷雨恒,任亮,李宏男,等.基于逆有限元法的形状还原传感阵列及桥梁挠度监测试验[J].工程力学,2022,39(11):89-96.
LEI Yuheng, REN Liang, LI Hongnan, et al. Shape-sensing array based on inverse finite element method and experiment of bridge deflection monitoring[J]. Engineering Mechanics, 2022, 39(11): 89-96.
- [4] 王浩琛,冯东明,吴刚,等.基于三维激光点云的公路曲线桥梁三维形貌与变形测量[J].东南大学学报(自然科学版),2023,53(5):756-764.
WANG Haochen, FENG Dongming, WU Gang, et al. Three dimensional morphology and deformation measurement of curved highway bridge based on 3D laser scanning[J]. Journal of Southeast University (Natural Science Edition), 2023, 53(5): 756-764.
- [5] 黄喆,程二静,齐鹏,等.基于线结构光的盾尾间隙测量方法研究[J].仪器仪表学报,2022,43(5):93-101.
HUANG Zhe, CHENG Erjing, QI Peng, et al. Research on the shield tail clearance measurement method based on line structured light[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2022, 43(5): 93-101.
- [6] 于起峰,关棒磊,胡彪,等.基于相机组网测量的大型结构变形监测技术与应用[J].强度与环境,2023,50(6):108-114.
YU Qifeng, GUAN Banglei, HU Biao, et al. Large-scale structural deformation monitoring technology based on camera networking measurement[J]. Structure & Environment Engineering, 2023, 50(6): 108-114.
- [7] 胡明月,吴邵庆,董萼良.基于实测应变的典型热防护结构位移场实时重构[J].东南大学学报(自然科学版),2021,51(4):664-671.
HU Mingyue, WU Shaoqing, DONG Eliang. Real-time displacement field reconstruction of typical thermal protection structures based on measured strain[J]. Journal of Southeast University (Natural Science Edition), 2021, 51(4): 664-671.
- [8] DERKEVORKIAN A, ALVARENGA J, MASRI S F, et al. Computational studies of a strain-based deformation shape prediction algorithm for control and monitoring applications[C]//Proceedings of Industrial and Commercial Applications of Smart Structures Technologies. San Diego, California: SPIE, 2012.
- [9] FOSS G, HAUGSE E. Using modal test results to develop strain to displacement transformations[C]//Proceedings of SPIE—The International Society for Optical Engineering. Bellingham, WA: Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers, 1995, 2460: 112-118.
- [10] 岳应萍,吴国庆,蒋镇涛,等.基于逆有限元法的结构位移与应变场反演方法[J].传感器与微系统,2024,43(7):114-117.
YUE Yingping, WU Guoqing, JIANG Zhentao, et al. Inversion method of structure displacement and strain field based on iFEM[J]. Transducer and Microsystem Technologies, 2024, 43(7): 114-117.
- [11] KO W, RICHARDS W, FLEISCHER V. Applications of KO displacement theory to the deformed shape predictions of the doubly-tapered ikhona wing NASA/TP—2009-214652[R]. [S.l.]: NASA, 2009.
- [12] KO W L, RICHARDS W L, FLEISCHER V T. Displacement theories for in-flight deformed shape predictions of aerospace structures: NASA/TP—2007-214612[R]. [S.l.]: NASA, 2007.
- [13] TESSLER A, SPANGLER J L. A least-squares variational method for full-field reconstruction of elastic deformations in shear-deformable plates and shells[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, 194(2/3/4/5): 327-339.
- [14] TESSLER A, SPANGLER J L. A variational principle

- ple for reconstruction of elastic deformations in shear deformable plates and shells: NASA/TM — 2003-212445[R]. [S.l.]: NASA, 2003.
- [15] 蔡鹏越. 用于结构位移场重构的逆有限元法研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2016.
- CAI Pengyue. Study on inverse finite element method for reconstruction of structural displacement field[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2016.
- [16] 曾捷, 赵博涵, 朱清峰, 等. 基于单元应变函数的结构逆元法应变场反演方法: CN118607371A[P]. 2024-09-06.
- [17] YOU R Z, REN L, YUAN C L, et al. Two-dimensional deformation estimation of beam-like structures using inverse finite-element method: Theoretical study and experimental validation[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2021, 147(5): 04021019.
- [18] KEFAL A, OTERKUS E, TESSLER A, et al. A quadrilateral inverse-shell element with drilling degrees of freedom for shape sensing and structural health monitoring[J]. Engineering Science and Technology, 2016, 19(3): 1299-1313.

(编辑: 胥橙庭)