

DOI:10.16356/j.1005-2615.2025.01.008

## 基于最弱链模型的 TC11 钛合金轮盘疲劳分散性研究

胡浩楠<sup>1,2</sup>, 王彤<sup>1,2</sup>, 胡绪腾<sup>1,2</sup>, 郭秩维<sup>3</sup>, 余嘉伟<sup>4</sup>, 杨思远<sup>4</sup>,  
程昊<sup>4</sup>, 冯建文<sup>5</sup>

(1. 南京航空航天大学航空航天结构力学及控制全国重点实验室, 南京 210016; 2. 南京航空航天大学能源与动力学院, 南京 210016; 3. 中国航发沈阳发动机研究所, 沈阳 110015; 4. 中国航发湖南动力机械研究所, 株洲 412002; 5. 中国民用航空适航审定中心, 北京 100102)

**摘要:** 基于最弱链理论建立了综合考虑材料疲劳分散性和尺寸效应的结构概率疲劳寿命分析方法, 材料光滑疲劳寿命分布分别考虑了对数正态分布和威布尔分布。采用该方法基于 TC11 钛合金光滑疲劳寿命分布对 TC11 盘心模拟件和轮盘盘心部位的疲劳寿命及寿命散度系数进行了预测和分析。结果表明: 基于两种概率分布的最弱链模型均可较准确地预测 TC11 模拟件的中值疲劳寿命, 预测结果基本在试验结果的 2 倍分散带内; 基于对数正态分布的最弱链模型对模拟件疲劳寿命散度的预测结果与试验统计结果较为接近, 优于基于威布尔分布模型的预测结果; 对于轮盘盘心部位, 两种概率分布模型的寿命预测结果在失效概率较高时基本接近, 失效概率较低时基于对数正态分布的预测结果明显大于基于威布尔分布的预测结果; 基于对数正态分布的最弱链模型对盘心部位疲劳寿命散度的预测结果明显小于光滑试样和模拟件的散度系数, 较基于威布尔分布的模型能够更好地分析和预测尺寸效应对结构疲劳分散性的影响。

**关键词:** TC11 钛合金; 最弱链模型; 疲劳分散性; 对数正态分布; 威布尔分布

中图分类号: V231.95

文献标志码: A

文章编号: 1005-2615(2025)01-0080-12

### Study on Fatigue Scatter of TC11 Titanium Alloy Disk Based on the Weakest Link Model

HU Haonan<sup>1,2</sup>, WANG Tong<sup>1,2</sup>, HU Xuteng<sup>1,2</sup>, GUO Zhiwei<sup>3</sup>, YU Jiawei<sup>4</sup>, YANG Siyuan<sup>4</sup>,  
CHENG Hao<sup>4</sup>, FENG Jianwen<sup>5</sup>

(1. State Key Laboratory of Mechanics and Control for Aerospace Structures, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016, China; 2. College of Energy and Power Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016, China; 3. AECC Shenyang Engine Research Institute, Shenyang 110015, China; 4. Hunan Aviation Powerplant Research Institute, Aero Engine Corporation of China, Zhuzhou 412002, China; 5. Airworthiness Certification Center, Civil Aviation Administration of China, Beijing 100102, China)

**Abstract:** Considering both material fatigue scatter and size effects, a probabilistic fatigue life analysis method for structures is developed based on the weakest link theory. The fatigue life distribution of the smooth specimens is modeled using both log-normal and Weibull distributions. This method is applied to predict and analyze the fatigue life and fatigue life scatter coefficient of TC11 titanium alloy simulated specimens and disk hub based on the fatigue life distribution of the TC11 smooth specimens. The results show that both models based on the weakest link theory accurately predict the median fatigue life of TC11 specimens, with

**基金项目:** 国家重大科技专项项目(J2019-IV-0008-0076)。

**收稿日期:** 2024-10-13; **修订日期:** 2024-12-20

**通信作者:** 胡绪腾, 男, 副教授, 硕士生导师, E-mail: xthu@nuaa.edu.cn。

**引用格式:** 胡浩楠, 王彤, 胡绪腾, 等. 基于最弱链模型的 TC11 钛合金轮盘疲劳分散性研究[J]. 南京航空航天大学学报(自然科学版), 2025, 57(1): 80-91. HU Haonan, WANG Tong, HU Xuteng, et al. Study on fatigue scatter of TC11 titanium alloy disk based on the weakest link model[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics (Natural Science Edition), 2025, 57(1): 80-91.

predictions falling within twice the scatter range of experimental results. The log-normal model's prediction of fatigue life scatter is closer to experimental data than that of the Weibull model. For the disk hub region, the life predictions of both models are similar at higher failure probabilities, and the predictions by the log-normal model are significantly larger than those by the Weibull distribution model when the failure probabilities are low. Further, the predictions on the fatigue life scatter of this region by the weakest link model based on the lognormal distribution are significantly smaller than the scatter coefficients of the smooth specimens and the simulated ones. The proposed log-normal model can better analyze and predict the influence of size effects on structural fatigue scatter than the Weibull distribution model.

**Key words:** TC11 titanium alloy; the weakest link model; fatigue scatter; log-normal distribution; Weibull distribution

轮盘作为航空发动机的断裂关键件,若发生疲劳破坏,容易造成非包容事故,可能导致飞机失事的灾难性后果<sup>[1]</sup>。在航空发动机的设计阶段,工程上广泛采用局部应力应变法,该方法考虑了材料疲劳性能的分散性,然而轮盘危险部位疲劳寿命的分散性除受材料疲劳性能的分散性影响外,还受到冶金或制造缺陷、尺寸效应、表面状态等因素的影响<sup>[1]</sup>。在航空发动机设计验证阶段,工程上常采用轮盘构件级疲劳试验,结合轮盘危险部位的疲劳寿命分布假设,通过统计推断来确定其安全寿命。由于构件级疲劳试验成本昂贵,很难获取大量的轮盘疲劳试验数据,较难验证所假设的疲劳寿命分布是否符合实际。国内因为在材料、工艺、加工水平等方面与国外不同,直接应用国外文献中的疲劳寿命分散系数也可能会带来无法预料的后果。

针对轮盘的疲劳寿命分散性问题,Ai等<sup>[2]</sup>考虑制造缺陷对疲劳寿命的影响,提出了一种考虑制造缺陷尺寸和位置的概率模型,分别对3种不同材料的疲劳寿命进行了评估,预测结果与试验吻合较好。Niu等<sup>[3]</sup>研究了几何、材料和载荷等多源不确定性对涡轮盘疲劳寿命和可靠性指标的影响。Hua等<sup>[4]</sup>基于名义应力法,考虑应力梯度影响,提出了一种结合威布尔分布的疲劳寿命预测方法,用3种材料验证了模型的准确性。张红顺等<sup>[5]</sup>建立了一套通用的概率疲劳寿命预测模型,合理量化表征了缺口效应与不确定性对疲劳强度的影响。高阳等<sup>[6]</sup>在低循环疲劳试验数据的基础上应用异方差回归分析方法获得了概率模型的参数,应用该模型对涡轮盘销钉孔的低循环疲劳寿命进行了 Monte-Carlo 数值模拟。樊江等<sup>[7]</sup>提出几何分散性的概率处理方法,结果表明,在某发动机 GH720Li 涡轮盘内径、外径和盘缘厚度3个结构参数中,涡轮盘外径对 LCF 寿命有较大影响。国内外大量研究表明,尺寸效应是影响结构疲劳分散性的重要原因<sup>[8-9]</sup>。在相同的循环应力水平下,高应力区面积较大的材料试样或构件通常具有更大的疲劳失效

概率<sup>[10-14]</sup>。在航空发动机轮盘中,疲劳危险部位通常位于应力水平较高、高应力区面积较大的盘心(中心孔)区域或螺栓孔、榫槽等应力集中较大的区域<sup>[15]</sup>。盘心区域高应力区面积通常较大,可能远大于材料标准疲劳试样测试段的表面积。对于疲劳裂纹主要萌生于轮盘盘心表面的情况,仅根据危险部位单点的循环应力应变数据和材料光滑试样的一 $3\sigma$ 疲劳寿命曲线来预测轮盘的疲劳安全寿命,无法考虑危险区域高应力区尺寸对轮盘疲劳失效概率和疲劳寿命分布的影响。

最弱链理论是一种基于概率方法的微观模型,在考虑了材料性能分散性的基础上,可以将尺寸效应的影响纳入分析中,具有明确的物理意义。Liu等<sup>[16]</sup>将贝叶斯推断引入最弱链理论模型中,提升了预测的准确性。Schweiger等<sup>[17]</sup>运用最弱链理论,基于小尺寸试件的疲劳试验数据,较好地预测了大尺寸试件的疲劳寿命。胡绪腾等<sup>[18]</sup>探索了将最弱链理论应用于金属材料缺口件的低循环疲劳寿命预测问题,取得了令人满意的预测效果。Li等<sup>[19]</sup>将最弱链模型与应变能概念相结合,引入有效应变能密度概念,并对 GH4169、TC4 和 TC11 合金3种材料在不同几何条件下的疲劳寿命进行预测,得到了较好的结果。当前国内外学者采用最弱链理论来研究和分析结构件的疲劳寿命时大多假设光滑试样的疲劳寿命服从威布尔分布<sup>[17-22]</sup>。而对材料或结构的疲劳寿命进行概率分析时除采用威布尔分布假设外,对数正态分布也是常采用的概率分布形式<sup>[23]</sup>。在应用最弱链理论时,采用不同的概率分布模型来描述光滑试样的疲劳寿命分布对最终结构件的疲劳寿命分布预测结果是否存在差异,预测的疲劳分散性是否接近真实情况,未看到相关研究公开发表。

针对材料和结构疲劳裂纹主要萌生于危险部位表面的情况(不考虑材料冶金或制造缺陷主导的疲劳失效情况,忽略表面状态对疲劳分散性的影响),本文以 TC11 钛合金作为研究对象,分别采用

对数正态分布和威布尔分布对 TC11 钛合金光滑试样的疲劳寿命分布进行分析和建模,在此基础上采用最弱链理论对 TC11 钛合金盘心模拟件的疲劳寿命进行分析和预测,对比了两种不同分布假设下模拟件疲劳寿命散度(+3 $\sigma$ 最大疲劳寿命与-3 $\sigma$ 最小疲劳寿命的比值)的预测结果和试验统计结果,评估了基于最弱链理论预测轮盘结构特征模拟件疲劳分散性的有效性。最后,对比分析了在两种分布假设下采用最弱链理论对轮盘疲劳寿命散度的预测结果。

## 1 基于最弱链理论的结构概率疲劳寿命分析方法

在任意给定的疲劳载荷条件下,光滑试样的疲劳寿命均具有一定的分散性,可假设为样本空间  $\Omega_{N_f}$  上的随机变量  $X_{N_f}, X_{N_f}$  的概率分布可假设服从对数正态分布或威布尔分布。若假设光滑疲劳试样在应力比为  $R$ 、疲劳峰值应力为  $\sigma_{\max}$  的疲劳载荷条件下,光滑试样的对数疲劳寿命  $\lg X_{N_f}$  服从均值为  $\mu$ 、标准差为  $\sigma$  的正态分布,其疲劳寿命为  $N_f$  时的失效概率可表示为

$$P_f(X_{N_f} \leq N_f) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{N_f} \exp\left(-\frac{(\lg t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt = \Phi\left(\frac{\lg N_f - \mu}{\sigma}\right) \quad (1)$$

式中:对数寿命均值  $\mu$  为应力比  $R$ 、疲劳峰值应力  $\sigma_{\max}$  时 50% 失效概率下的对数疲劳寿命<sup>[24]</sup>。对数寿命均值  $\mu$  与应力比  $R$  和疲劳峰值应力  $\sigma_{\max}$  相关,可采用合适的平均应力修正寿命关系式描述,本文采用如下 Walker 平均应力寿命方程

$$\sigma_w = \sigma_{\max} \left(\frac{1-R}{2}\right)^w = \sigma'_f (2 \times 10^6)^b \quad (2)$$

式中: $\sigma_w$  为 Walker 等效应力, $b$  为疲劳强度指数。实际应用时,可通过极大似然估计法基于光滑试样疲劳试验数据计算得到对数寿命均值的估计值。标准差  $\sigma$  反映了光滑试样对数疲劳寿命的分散性,可基于光滑试样疲劳试验数据计算得到其估计值。标准差  $\sigma$  是否与疲劳载荷条件相关,需要根据不同疲劳载荷下疲劳分散性的具体情况来定。

若假设光滑疲劳试样在应力比为  $R$ 、疲劳峰值应力为  $\sigma_{\max}$  的疲劳载荷条件下,光滑试样的疲劳寿命  $X_{N_f}$  服从如下双参数威布尔分布,其疲劳寿命为  $N_f$  时的失效概率可表示为

$$P_f(X_{N_f} \leq N_f) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{N_f}{\eta}\right)^\beta\right) \quad (3)$$

式中: $\eta$  为威布尔分布的尺度参数, $\beta$  为威布尔分布的形状参数。尺寸参数为应力比  $R$ 、疲劳峰值应力  $\sigma_{\max}$  时 63.2% 失效概率下的疲劳寿命,可称为特征疲劳寿命  $\eta$ <sup>[17]</sup>。与对数正态分布中的对数寿命均值  $\mu$  类似,特征疲劳寿命  $\eta$  与应力比  $R$  和疲劳峰值应力  $\sigma_{\max}$  相关,本文同样采用如下 Walker 平均应力寿命方程来描述

$$\sigma_w = \sigma_{\max} \left(\frac{1-R}{2}\right)^w = \sigma'_f (2\eta)^b \quad (4)$$

实际应用时可通过极大似然估计法基于光滑试样疲劳试验数据分析得到其估计值。威布尔分布形状参数  $\beta$  反映了光滑试样疲劳寿命的离散程度,可通过对光滑试样疲劳试验数据的统计分析得到其估计值。形状参数  $\beta$  是否与疲劳载荷条件相关,需要根据不同疲劳载荷下疲劳分散性的具体情况来定。

本文拓展最弱链理论的分析方法,将对数正态分布引入分析过程。结构件的疲劳寿命往往由构件危险部位的应力分布决定。假设构件危险部位的表面积  $A_{\text{comp}}$  可划分为  $l$  个表面单元,假设每个表面单元的应力分布均匀,任意第  $k$  个表面单元的面积为  $\Delta A_k$ ,承受应力比为  $R_k$ 、疲劳峰值应力为  $\sigma_{\max,k}$  的疲劳载荷作用,则任意表面单元在寿命  $N_f$  时的存活概率为

$$P_{r,k}(X_{N_f} > N_f) = \begin{cases} \left[1 - \Phi\left(\frac{\lg N_f - \mu_k}{\sigma_k}\right)\right]^{\frac{\Delta A_k}{A_0}} & \text{正态分布} \\ \left[\exp\left(-\left(\frac{N_f}{\eta_k}\right)^\beta\right)\right]^{\frac{\Delta A_k}{A_0}} & \text{威布尔分布} \end{cases} \quad (5)$$

式中: $\mu_k$  和  $\sigma_k$  分别为假设光滑试样疲劳寿命服从对数正态分布时第  $k$  个表面单元疲劳应力下的对数寿命均值和标准差, $\eta_k$  和  $\beta_k$  分别为假设光滑试样疲劳寿命服从威布尔分布时第  $k$  个表面单元疲劳应力下的特征疲劳寿命(尺寸参数)和形状参数。 $\mu_k$  和  $\eta_k$  分别由式(2)和式(4)根据第  $k$  个表面单元的疲劳应力条件(应力比  $R_k$ 、疲劳峰值应力  $\sigma_{\max,k}$ ) 计算得到。

根据最弱链理论,结构件在给定疲劳载荷作用下在寿命  $N_f$  时的存活概率为每个表面单元存活概率的乘积,可得到结构件在给定疲劳载荷作用下在寿命  $N_f$  时的失效概率为



$$P_{f, \text{component}}(X_{N_f} > N_f) = 1 - P_{r, \text{component}}(X_{N_f} > N_f) = 1 - \prod_{k=1}^l P_{r, k}(X_{N_f} > N_f) = \begin{cases} 1 - \prod_{k=1}^l \left[ 1 - \Phi\left(\frac{\lg N_f - \mu_k}{\sigma_k}\right) \right]^{\frac{\Delta A_k}{A_0}} & \text{对正数正态分布} \\ 1 - \prod_{k=1}^l \left[ \exp\left(-\left(\frac{N_f}{\eta_k}\right)^{\beta_k}\right) \right]^{\frac{\Delta A_k}{A_0}} & \text{威布尔分布} \end{cases} \quad (6)$$

根据式(6),可直接基于结构件在给定疲劳载荷下的有限元应力分析结果进行概率疲劳寿命预测,根据结构危险部位表面划分的有限单元,假设每个表面单元内的应力均匀分布。根据每个表面单元的有限元应力分析结果,首先基于式(2)和式(4)计算每个单元在相应疲劳应力下的对数均值寿命  $\mu_k$  或特征疲劳寿命  $\eta_k$ ,并根据材料疲劳分散特性随疲劳载荷的变化特点确定对数正态分布的标准差  $\sigma_k$  或威布尔分布形状参数  $\beta_k$ 。然后基于每个表面单元的面积由式(6)可计算得到构件危险部位在任意指定寿命  $N_f$  下的失效概率,从而得到构件危险部位的失效概率-寿命曲线,据此可进一步得到构件危险部位在任意指定失效概率下的疲劳寿命,实现对结构件在给定疲劳载荷下的概率疲劳寿命预测。综上所述,可总结得到基于最弱链理论的概率疲劳寿命分析过程,如图 1 所示。

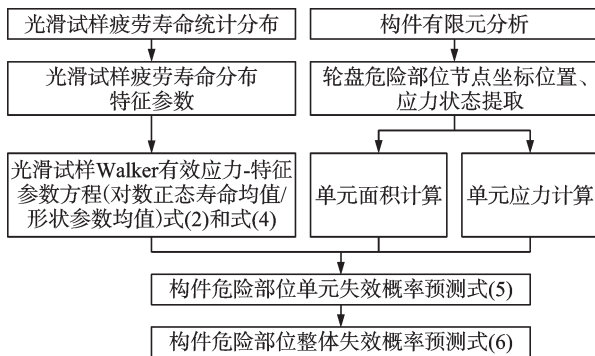


图 1 基于最弱链理论的概率疲劳寿命分析过程

Fig.1 Probabilistic fatigue life analysis process based on the weakest link theory

## 2 TC11 光滑试样的疲劳寿命分布与疲劳寿命模型

为验证上述基于最弱链理论的结构概率疲劳寿命预测方法,探究材料疲劳寿命分布模型选择对结构疲劳分散性预测的影响,本文以 TC11 钛合金压气机盘作为研究对象,首先针对 TC11 钛合金,

在某发动机压气机盘危险部位典型工作温度 400 °C 下开展了 3 种不同应力比 ( $R = -0.3, 0.05, 0.4$ ) 低循环疲劳试验,获得了标准光滑试样的疲劳寿命试验结果,如图 2 所示。图中同时给出了基于 Walker 平均应力修正寿命模型的平均拟合 S-N 曲线。

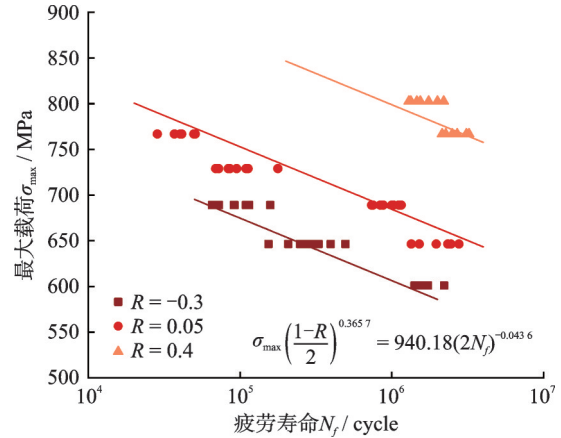


图 2 TC11 钛合金光滑试样 400 °C 下的疲劳试验结果

Fig.2 Fatigue test results of smooth TC11 titanium alloy specimens at 400 °C

为建立基于最弱链理论的疲劳寿命分析方法,需根据光滑试样疲劳试验数据,确定其疲劳寿命分布参数。首先基于图 2 所示的疲劳试验数据,分析获得了 TC11 钛合金光滑试样疲劳寿命假设服从对数正态分布时的分布参数,如表 1 所示。由表中数据可看到,在一定寿命范围内,TC11 光滑试样对数疲劳寿命的标准差差别较小,分布在 0.1 上下,为便于后续分析,本文假定不同载荷下对数疲劳寿命的标准差  $\sigma$  为常数,取为不同载荷下对数疲劳寿命标准差的平均值。图 3 给出了光滑试样累积失效概率分布曲线与试验数据的对比。由图可知,对数正态分布可较好地描述 TC11 钛合金光滑试样的疲劳寿命分布。为获得对数疲劳寿命均值

表 1 TC11 钛合金光滑试样疲劳寿命对数正态分布参数  
Table 1 Log-normal distribution parameters of fatigue life for smooth TC11 titanium alloy specimens

最大应力 / MPa	应力比 R	对数疲劳寿命均值 $\mu$	对数疲劳寿命标准差 $\sigma$
580	-0.3	6.215 4	0.072 5
620	-0.3	5.453 9	0.158 6
660	-0.3	4.956 3	0.125 8
620	0.05	6.300 9	0.124 3
660	0.05	5.975 9	0.075 1
700	0.05	4.984 1	0.131 6
740	0.05	4.607 1	0.091 6
740	0.4	6.419 6	0.071 6
780	0.4	6.211 1	0.087 7
对数疲劳寿命标准差均值 $\bar{\sigma}$			0.104 3

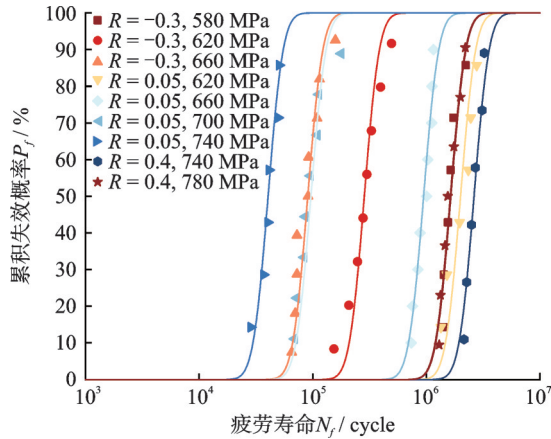


图3 TC11光滑试样对数正态分布统计结果

Fig.3 Log-normal distribution statistical results for smooth TC11 titanium alloy specimens

$\mu$ 与疲劳载荷条件的关系式,基于表1对数疲劳寿命均值数据(即50%失效概率的特征疲劳寿命),拟合建立TC11光滑试样对数寿命均值的Walker平均应力修正寿命模型为

$$\sigma_w = \sigma_{max} \left( \frac{1-R}{2} \right)^{0.3657} = 935.6(2 \times 10^6)^{-0.0433} \quad (7)$$

拟合结果如图4所示。定义失效概率为99.87%(+3 $\sigma$ )和0.13%(-3 $\sigma$ )的疲劳寿命之比为疲劳寿命散度系数。根据统计得到的TC11钛合金光滑试样疲劳寿命分布参数,可计算得到光滑试样在失效概率分别为99.87%和0.13%时的疲劳寿命,进而计算获得不同载荷下的疲劳寿命散度系数,如表2所示。表2中不同应力和应力比下的寿命散度系数由表1中相应分布参数计算得到,表2中最后一行给出的寿命散度系数由表1中不同载荷下对数寿命标准差均值 $\bar{\sigma}$ 计算得到。由表2可知,基于对数正态分布统计得到的TC11钛合金在

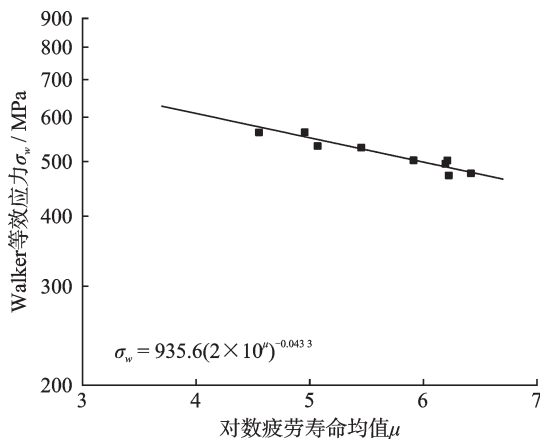


图4 TC11钛合金光滑试样Walker等效应力与对数疲劳寿命均值的拟合曲线

Fig.4 Fitting curve of Walker equivalent stress and logarithmic fatigue life mean for smooth TC11 titanium alloy specimens

表2 假设光滑试样疲劳寿命服从对数正态分布下的寿命散度

Table 2 Fatigue life dispersion under the assumption of log-normal distribution for smooth specimens

最大应力/MPa	应力比R	寿命散度系数
580	-0.3	2.73
620	-0.3	9.02
660	-0.3	5.73
620	0.05	5.60
660	0.05	2.83
700	0.05	6.21
740	0.05	3.56
740	0.4	2.70
780	0.4	3.38
基于对数正态分布标准差均值计算的散度系数		4.26

不同应力和应力比下的疲劳寿命散度系数具有分散性,个别应力条件下的寿命分散性较大。

表3给出了TC11钛合金光滑试样疲劳寿命假设服从威布尔分布的分布参数。由表3可知,在一定寿命范围内,光滑疲劳试样疲劳寿命威布尔分布的疲劳寿命形状参数 $\beta$ 差别不大,为便于后续分析,本文假定不同载荷下的形状参数 $\beta$ 为常数,取为不同载荷下形状参数 $\beta$ 的平均值。图5给出了光滑试样累积失效概率分布曲线与试验数据的对比,由图可知,威布尔分布也可较好地描述TC11钛合金光滑试样的疲劳寿命分布。基于表3中疲劳寿命尺度参数(即63.2%失效概率的特征疲劳寿命),拟合建立光滑试样威布尔特征疲劳寿命的Walker平均应力修正寿命模型为

$$\sigma_w = \sigma_{max} \left( \frac{1-R}{2} \right)^{0.3657} = 960.7(2\eta)^{-0.045} \quad (8)$$

表3 TC11钛合金光滑疲劳试样疲劳寿命威布尔分布参数

Table 3 Weibull distribution parameters of fatigue life for smooth TC11 titanium alloy specimens

最大应力/MPa	应力比R	疲劳寿命尺度参数 $\eta$	疲劳寿命形状参数 $\beta$
580	-0.3	1 783 630	5.878 0
620	-0.3	336 384	3.226 2
660	-0.3	104 500	3.421 9
620	0.05	2 265 265	4.756 6
660	0.05	1 023 186	7.576 6
700	0.05	112 363	3.120 1
740	0.05	44 291	6.536 3
740	0.4	2 833 916	7.389 4
780	0.4	1 790 256	5.533 6
疲劳寿命形状参数均值 $\bar{\beta}$			5.271 0

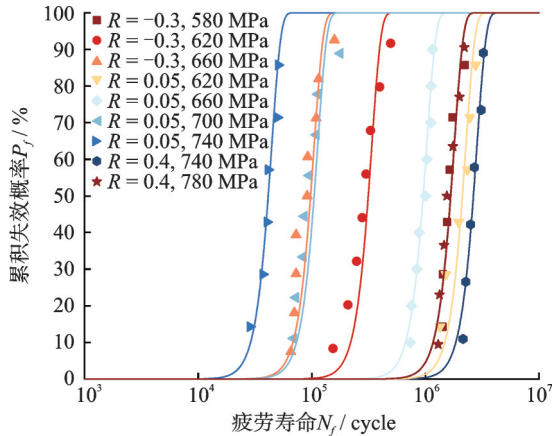


图 5 TC11 光滑试样威布尔分布统计结果

Fig.5 Weibull distribution statistical results for smooth TC11 titanium alloy specimens

拟合结果如图 6 所示。

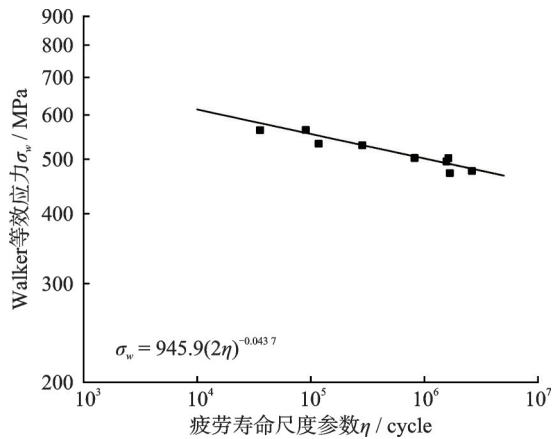


图 6 TC11 钛合金光滑试样 Walker 等效应力与威布尔特征疲劳寿命的拟合曲线

Fig.6 Fitting curve of Walker equivalent stress and Weibull characteristic fatigue life for smooth TC11 titanium alloy specimens

根据统计得到的 TC11 钛合金光滑试样疲劳寿命威布尔分布参数,计算光滑试样在失效概率分别为 0.13% 和 99.87% 时的疲劳寿命,进一步获得其寿命散度系数,如表 4 所示。表 4 中不同应力和应力比下的寿命散度系数由表 3 中相应分布参数计算得到,表 4 中最后一行给出的寿命散度系数由表 3 中不同载荷下疲劳寿命形状参数均值  $\bar{\beta}$  计算得到。由表 4 可知,基于威布尔分布统计得到的 TC11 光滑试样在不同应力和应力比下的疲劳寿命散度系数分散性也较大。对比表 2 和表 4 中数据可看出,基于威布尔分布统计得到的 TC11 光滑试样疲劳寿命散度系数大于基于对数正态分布统计得到的寿命散度系数。

表 4 假设光滑试样疲劳寿命服从威布尔分布的寿命散度

Table 4 Fatigue life dispersion under the assumption of Weibull distribution for smooth specimens

最大应力/MPa	应力比 R	寿命散度系数
580	-0.3	4.27
620	-0.3	14.11
660	-0.3	12.13
620	0.05	6.02
660	0.05	3.09
700	0.05	15.44
740	0.05	3.69
740	0.4	3.18
780	0.4	4.68
基于形状参数均值计算的散度系数		5.05

### 3 TC11 轮盘盘心模拟件疲劳试验与疲劳分散性分析

为验证基于最弱链理论的概率疲劳寿命预测方法,探究材料疲劳寿命分布模型选择对结构疲劳分散性预测的影响,本文进一步开展了 TC11 钛合金盘盘心模拟件疲劳试验,对模拟件疲劳寿命及分散性进行了预测分析。

#### 3.1 TC11 轮盘盘心模拟件疲劳试验与统计分析

选取某型航空发动机离心叶轮盘盘心模拟件作为验证对象,模拟件试验温度为 400 °C,试验载荷比为 0.05。模拟件几何特征及实物图分别如图 7、8 所示。图 9 给出了模拟件与离心叶轮盘危险部位三向应力状态对比,该设计方案可使模拟件危险部位在单轴拉伸载荷下保证一定深度范围内的三向应力梯度与离心叶轮盘危险部位的三向应力梯度一致,可在一定程度上反映实际离心叶轮盘的失效特征。

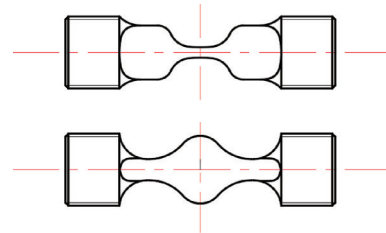


图 7 模拟件几何特征

Fig.7 Geometric features of the simulated specimens

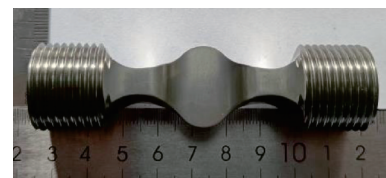


图 8 模拟件实物图

Fig.8 Photograph of simulated specimen



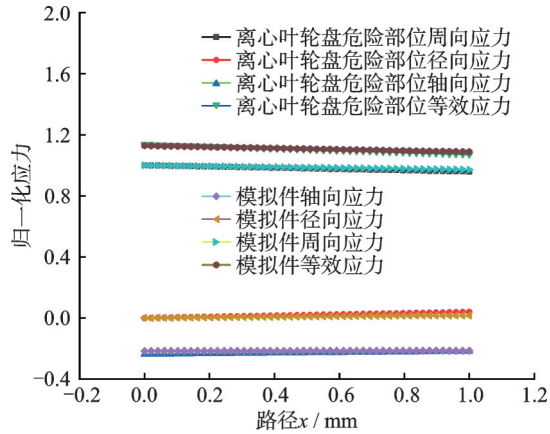


图9 模拟件与离心叶轮盘危险部位三向应力状态对比  
Fig.9 Comparison of three-dimensional stress states between simulated specimen and critical region of centrifugal impeller disk

模拟件疲劳试验结果如图 10 所示。由图 11 可以看到,模拟件断裂于所设计的危险部位和截面。模拟件疲劳断口微观形貌特征分别如图 12、13 所

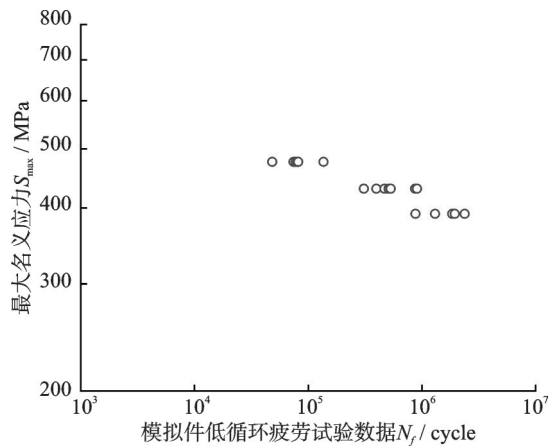


图 10 模拟件疲劳试验结果  
Fig.10 Fatigue test results of simulated specimen

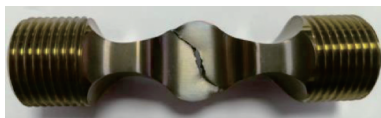


图 11 模拟件宏观断口位置  
Fig.11 Fracture location of simulated specimen

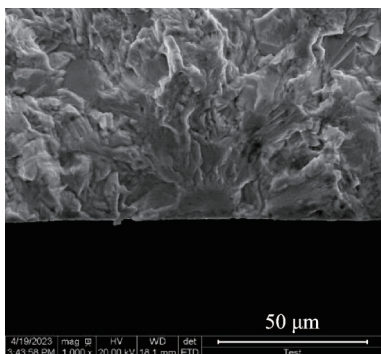


图 12 模拟件疲劳裂纹萌生源  
Fig.12 Fatigue crack initiation sources in simulated specimen

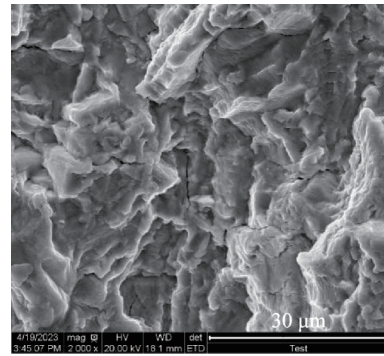


图 13 模拟件裂纹扩展区  
Fig.13 Crack propagation zone in simulated specimen

示,模拟件断口表现为单裂纹源表面萌生,疲劳源区比较平整光滑。

根据模拟件疲劳试验结果,采用极大似然法估计了不同载荷下模拟件疲劳寿命的对数正态分布参数与威布尔分布参数,分别如表 5 和表 6 所示。

表 5 TC11 钛合金模拟件疲劳寿命对数正态分布参数  
Table 5 Log-normal distribution parameters of fatigue life for TC11 titanium alloy simulated specimens

名义应力 / MPa	对数疲劳寿命均值 $\mu$	对数疲劳寿命标准差 $\sigma$
476	4.901 9	0.131 1
430	5.724 7	0.158 1
391	6.197 7	0.170 7

表 6 TC11 钛合金模拟件疲劳寿命威布尔分布参数  
Table 6 Weibull distribution parameters of fatigue life for TC11 titanium alloy simulated specimens

名义应力 / MPa	威布尔分布尺度参数 $\eta$	威布尔分布形状参数 $\beta$
476	92 077	3.448 8
430	631 852	3.009 0
391	1 856 659	3.714 2

### 3.2 TC11 盘心模拟件疲劳寿命分布预测

采用第 2 节建立的基于最弱链理论的概率疲劳分析方法对 TC11 盘心模拟件的疲劳寿命进行预测。模拟件有限元模型如图 14 所示。模拟件疲劳试验载荷比为 0.05,在试验载荷条件下模拟件危险部位只在初始拉伸至峰值载荷时局部进入塑性,在后续循环加卸载过程中均为弹性变形。采用率无关 Chaboche 运动硬化模型对 TC11 拉伸曲线进行本构建模,采用该本构模型对模拟件进行有限元应力分析,峰值载荷下的应力分布如图 15 所示。

基于模拟件有限元离散化分网结果,将模拟件危险部位表面划分为若干表面单元,假设每个表面单元内的应力均匀,应力数值取为模拟件危险部位表面单元各节点应力的均值。在有限元软件中提

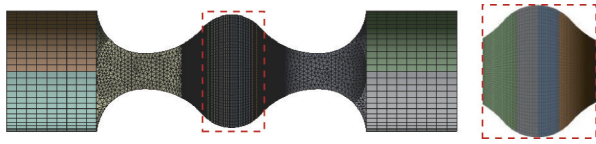


图 14 模拟件有限元模型

Fig.14 Finite element model of simulated specimen

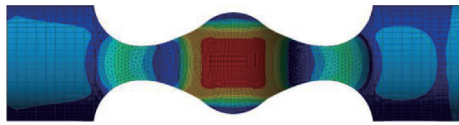


图 15 模拟件应力分布

Fig.15 Stress distribution in simulated specimen

取模拟件危险部位表面的节点应力、坐标位置与节点对应的单元编号,计算各单元在危险部位表面的平均应力与单元面积,应用式(6)计算模拟件在不同失效概率下的疲劳寿命预测结果。

图 16 给出了模拟件分别基于对数正态分布最弱链模型和基于威布尔分布最弱链模型预测的 50% 失效概率下的疲劳寿命,并与试验结果进行了对比。图中同时给出了基于局部应力法和平均拟合 S-N 曲线预测的模拟件疲劳寿命。

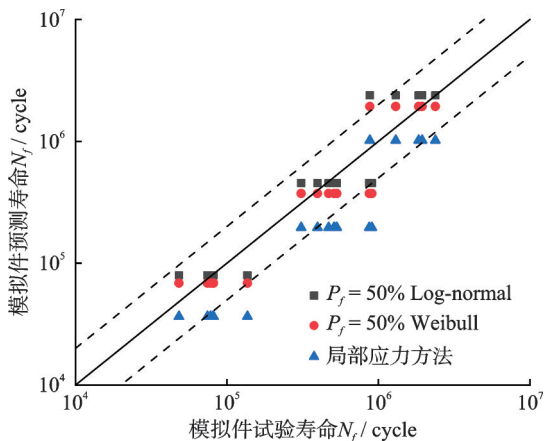


图 16 模拟件预测中值寿命与试验结果的对比

Fig.16 Comparison of predicted median fatigue life and experimental results for simulated specimen

从图 16 中可看出,基于对数正态分布最弱链模型与基于威布尔分布最弱链模型对模拟件中值疲劳寿命( $P_f = 50\%$ )的预测结果接近,基于对数正态分布的预测结果稍大于基于威布尔分布的预测结果。与局部应力法预测结果相比,基于两种分布最弱链模型预测的模拟件中值疲劳寿命与试验结果更为吻合,大部分试验结果分布在预测中值寿命的 2 倍分散带内,局部应力方法的预测结果相对偏于保守。上述结果表明基于最弱链理论的预测方法综合考虑了模拟件危险区域不用应力水平作用面积对疲劳失效概率的影响,可以有效克服局部

应力法预测过于保守的问题。

当试验样本量较小的时候,可采用中位秩方法计算每种载荷条件下模拟件的疲劳失效概率,任意第  $i$  个子样的失效概率可表示为

$$P_f = \frac{i - 0.3}{n + 0.4} \quad (9)$$

分别基于对数正态分布最弱链模型和威布尔分布最弱链模型预测了模拟件累积失效概率分布,并与基于试验数据计算的模拟件累积失效概率进行了对比,分别如图 17、18 所示。从图中可看出,总体上基于对数正态分布最弱链模型预测的累积失效概率分布与试验统计结果相对更为接近,表明基于对数正态分布最弱链模型可更好地预测模拟件疲劳寿命的累积失效概率分布。基于威布尔

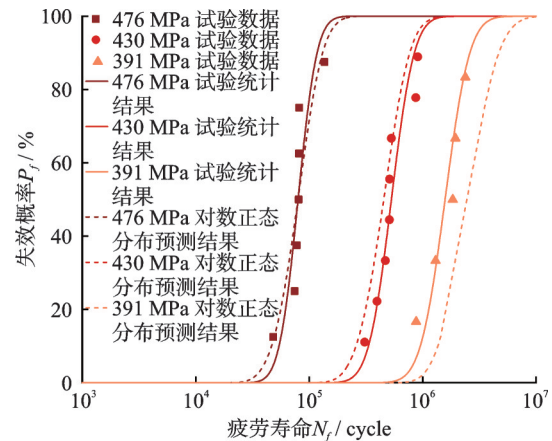


图 17 基于对数正态分布的最弱链模型预测的模拟件累积失效概率与统计结果的对比

Fig.17 Comparison of cumulative failure probability predicted by the log-normal distribution-based weakest-link model and statistical results for simulated specimen

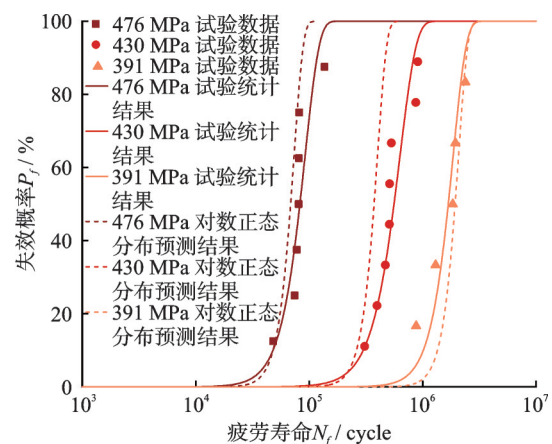


图 18 基于威布尔分布的最弱链模型预测的模拟件累积失效概率与统计结果的对比

Fig.18 Comparison of cumulative failure probability predicted by the Weibull distribution-based weakest-link model and statistical results for simulated specimen



分布最弱链模型对模拟件疲劳寿命累积失效概率分布的预测能力稍差,累积失效概率分布曲线的斜率大于试验统计结果,表明基于威布尔分布计算的失效概率累积速度明显快于试验统计结果。

### 3.3 TC11 盘心模拟件疲劳寿命试验散度与预测散度对比

表 7 给出了假设模拟件疲劳寿命服从对数正态分布时根据试验统计分布计算的失效概率分别为 0.13%、50% 和 99.87% 时的疲劳寿命推断值,由失效概率为 0.13% 的疲劳寿命值除以失效概率为 99.87% 时的疲劳寿命值得到不同载荷条件下模拟件疲劳寿命散度介于 6.16~10.67,平均寿命散度为 8.59。表 8 给出了基于对数正态分布最弱链模型预测的模拟件在失效概率分别为 0.13%、50% 和 99.87% 时的疲劳寿命,3 种载荷条件下的模拟件疲劳寿命散度预测值介于 10.12~10.68,平均寿命散度为 10.49,略大于基于模拟件试验结果假设服从对数正态分布统计推断的平均寿命散度 8.59,表明基于对数正态分布的最弱链模型可以较合理地预测模拟件的疲劳寿命散度,且寿命散度的预测值偏于保守(偏大)。

表 7 基于对数正态分布的模拟件试验统计结果(失效概率:0.13%、50%、99.87%)

Table 7 Experimental statistical results of simulated specimen based on log-normal distribution with failure probabilities of 0.13%, 50% and 99.87%

名义应力/ MPa	$P_f/\%$			散度
	0.13	50	99.87	
476	32 137	79 787	198 084	6.16
430	177 306	530 566	1 587 676	8.95
391	482 525	1 576 449	5 150 489	10.67

表 8 基于对数正态分布最弱链模型的模拟件疲劳寿命预测结果(失效概率:0.13%、50%、99.87%)

Table 8 Fatigue life prediction results for the simulated specimen based on the log-normal distribution Weakest-link model with failure probabilities of 0.13%, 50% and 99.87%

名义应力/ MPa	$P_f/\%$			散度
	0.13	50	99.87	
476	24 062	79 671	243 426	10.12
430	131 615	454 186	1 405 776	10.68
391	691 482	2 386 623	7 371 773	10.66

表 9 给出了假设模拟件疲劳寿命服从威布尔分布时根据试验统计分布计算的失效概率分别为 0.13%、50% 和 99.87% 时的疲劳寿命推断值,由此

计算的模拟件疲劳寿命散度介于 9.96~17.08,平均寿命散度为 12.98。与表 7 结果相比可以看出,假设服从威布尔分布时统计推断的模拟件疲劳寿命散度大于假设服从对数正态分布时的统计推断值。表 10 给出了基于威布尔分布最弱链模型预测的模拟件在失效概率分别为 0.13%、50% 和 99.87% 时的疲劳寿命,3 种载荷条件下的模拟件疲劳寿命散度预测值均为 5.05,比基于模拟件试验结果假设服从威布尔分布统计推断的平均寿命散度小得多。可见,采用基于威布尔分布最弱链模型对模拟件疲劳寿命分散性的预测效果较差。

表 9 基于威布尔分布的模拟件试验统计结果(失效概率:0.13%、50%、99.87%)

Table 9 Experimental statistical results of simulated specimen based on Weibull distribution with failure probabilities of 0.13%, 50% and 99.87%

名义应力/ MPa	$P_f/\%$			散度
	0.13	50	99.87	
476	13 409	82 793	159 459	11.89
430	69 431	559 390	1 185 696	17.08
391	310 310	1 682 199	3 091 571	9.96

表 10 基于威布尔分布假设最弱链模型的模拟件疲劳寿命预测结果(失效概率:0.13%、50%、99.87%)

Table 10 Fatigue life prediction results for the simulated specimen based on the Weibull distribution-assumed weakest-link model with failure probabilities of 0.13%, 50% and 99.87%

名义应力/ MPa	$P_f/\%$			散度
	0.13	50	99.87	
476	20 862	68 651	105 412	5.05
430	113 474	373 409	573 363	5.05
391	586 922	1 931 379	2 965 603	5.05

另外,与表 4 给出的光滑试样疲劳寿命散度结果对比可以发现,基于威布尔分布假设统计推断的 TC11 光滑试样疲劳寿命散度均值也为 5.05。说明假设光滑试样疲劳寿命服从威布尔分布时,根据最弱链模型预测的模拟件疲劳寿命散度与光滑试样疲劳寿命散度保持不变,而这与 TC11 模拟件和光滑试样的疲劳试验结果不符,TC11 模拟件疲劳试验结果的寿命散度大于光滑试样疲劳试验的寿命散度。而采用对数正态分布假设时,基于最弱链模型预测的模拟件疲劳寿命散度与模拟件试验寿命散度较为一致(表 7 和表 8 结果),均明显大于基于对数正态分布统计推断的光滑试样疲劳寿命散度(见表 2)。

## 4 TC11 轮盘盘心部位疲劳分散性预测及分析

第 3 节采用基于最弱链理论的概率疲劳寿命预测方法对 TC11 钛合金盘心模拟件的疲劳寿命及分散性进行了预测,并与试验结果进行了对比验证,结果表明采用基于对数正态分布的最弱链理论方法能够基于 TC11 光滑试样疲劳数据及寿命分布较准确地预测 TC11 盘心模拟件的疲劳寿命及其分散性(寿命散度)。采用上述方法对 TC11 钛合金盘心部位的疲劳分散性进行预测和分析。TC11 钛合金轮盘模型如图 19 所示,盘心中心孔处工作温度 400 °C,转速为 2 200 rad/s,载荷比为 0.05。最大转速下轮盘的有限元应力计算结果如图 19 所示。



图 19 轮盘几何特征和有限元分析

Fig.19 Geometric features and finite element analysis of the impeller disk

分别基于对数正态分布与基于威布尔分布的最弱链模型对轮盘盘心部位的疲劳寿命及其寿命散度进行预测。图 20 给出了在两种概率分布假设下,轮盘疲劳寿命累积失效概率分布曲线的预测结果。从图可看出,在较高失效概率区域,基于对数正态分布和基于威布尔分布的最弱链模型对于轮盘盘心部位疲劳寿命及相应累积失效概率的预测结果较为接近。在较低失效概率区域,基于对数正

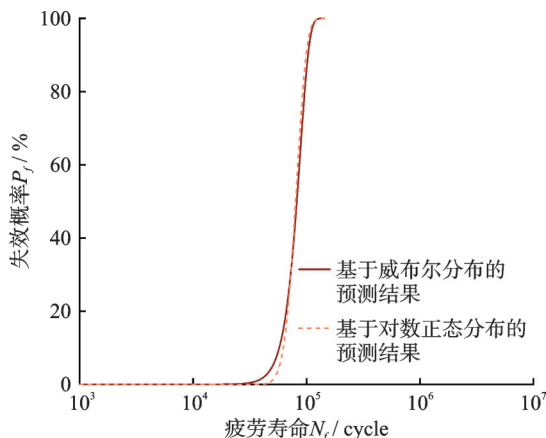


图 20 不同概率分布假设下最弱链模型对轮盘疲劳寿命累积失效概率预测结果

Fig.20 Prediction of cumulative failure probability for impeller disk fatigue life using the weakest-link model under different probability distribution assumptions

态分布最弱链模型预测的累积失效概率曲线较为陡峭。

表 11 给出了基于两种概率分布分布最弱链模型预测的轮盘在失效概率分别为 0.13%、50% 和 99.87% 时的疲劳寿命。由表 11 可知,基于对数正态分布最弱链模型预测的轮盘盘心部位的最小疲劳寿命(失效概率为 0.13%)比基于威布尔分布最弱链模型的预测结果大,而基于两种分布预测的中值疲劳寿命(失效概率为 50%)和最大疲劳寿命(失效概率为 99.87%)较为接近,即图 18 所反映的结果。从疲劳寿命散度来看,基于对数正态分布最弱链模型预测的轮盘盘心部位疲劳寿命散度为 3.0,而基于威布尔分布最弱链模型预测的寿命散度仍为 5.05,与基于威布尔分布假设的标准件和模拟件寿命散度分析结果相同,说明基于威布尔分布的最弱链模型来预测构件的疲劳分散性与光滑试样的疲劳分散性相同,不能反映尺寸效应对疲劳分散性的影响。而基于对数正态分布的最弱链模型对构件疲劳分散性的预测与构件危险部位的应力分布和几何尺寸(表面积大小)有关。由有限元计算结果可得到,构件的危险部位高应力区表面积大于光滑试样的测试段高应力面积,光滑试样的高应力区面积又大于模拟件高应力区面积。因此,当构件危险部位表面积比光滑试样测试段表面积小时,预测的寿命散度大于光滑试样的疲劳寿命散度(表 8 模拟件试验所反映的结果),构件危险部位高应力区表面积大时,所预测的寿命散度要小于光滑试样的疲劳寿命散度(即表 11 所反映的结果),这与工程认识较为相符。

表 11 基于对数正态分布和威布尔分布最弱链模型的轮盘疲劳寿命及寿命散度预测结果(失效概率:0.13%、50%、99.87%)

Table 11 Fatigue life and life dispersion prediction results for impeller disk based on log-normal and Weibull distribution weakest-link models with failure probabilities of 0.13%, 50% and 99.87%

分布类型	$P_f / \%$			散度
	0.13	50	99.87	
对数正态分布	42 384	80 154	126 929	3.00
Weibull 分布	24 973	82 177	126 182	5.05

## 5 结 论

本文基于最弱链理论推导并建立了光滑试样疲劳寿命分别服从对数正态分布和威布尔分布时的结构件概率疲劳寿命预测方法,通过开展 TC11 钛合金光滑试样和盘心模拟件疲劳试验对该方法

进行了应用和评估验证,最后采用该方法对 TC11 钛合金盘心部位的疲劳寿命及分散性进行了预测和分析,得到如下主要结论:

(1)TC11 盘心模拟件在 50% 失效概率下的疲劳寿命预测结果分布在试验结果的 2 倍分散带内,优于局部应力方法的预测结果,表明基于最弱链理论的预测方法综合考虑了模拟件危险区域不同应力水平作用面积对疲劳失效概率的影响,可有效克服局部应力法预测过于保守的问题。基于威布尔分布最弱链模型预测的模拟件疲劳寿命散度小于试验数据统计结果,而基于对数正态分布最弱链模型预测的模拟件疲劳寿命散度与试验数据统计结果较为接近,说明基于对数正态分布的最弱链方法能更好地分析和预测尺寸效应对结构疲劳寿命的影响。

(2)对于 TC11 轮盘盘心部位的疲劳寿命预测,失效概率较高时(大于 20%),基于两种概率分布最弱链模型的寿命预测结果较为接近;失效概率较小时(小于 20%),基于对数正态分布最弱链模型预测的疲劳寿命偏大,尤其是对盘心部位最小疲劳寿命(失效概率 0.13%)的预测结果明显大于基于威布尔分布最弱链模型的预测结果。

(3)基于对数正态分布最弱链模型预测的 TC11 轮盘盘心部位的疲劳寿命散度为 3.0,明显小于 TC11 光滑试样和模拟件的疲劳寿命散度,而基于威布尔分布最弱链模型预测的 TC11 轮盘盘心部位的疲劳寿命散度与 TC11 盘心模拟件疲劳寿命散度的预测值相同,并且等于假设服从威布尔分布时 TC11 光滑试样疲劳寿命散度的统计均值,均等于 5.05。说明基于对数正态分布的最弱链方法能够相对更好地分析和预测尺寸效应对结构疲劳分散性的影响。

#### 参考文献:

- [1] 张红顺.考虑疲劳分散性的缺口试样概率寿命预测与可靠性分析方法研究[D].西安:长安大学,2023.  
ZHANG Hongshun. Study on probabilistic life prediction and reliability analysis method of notched specimens considering fatigue scatter[D]. Xi'an: Chang'an University,2023.
- [2] AI Y, ZHU S P, LIAO D, et al. Probabilistic modeling of fatigue life distribution and size effect of components with random defects[J]. International Journal of Fatigue, 2019, 126: 165-173.
- [3] NIU X P, WANG R Z, LIAO D, et al. Probabilistic modeling of uncertainties in fatigue reliability analysis of turbine bladed disks[J]. International Journal of Fatigue, 2021, 142: 105912.
- [4] HUA F, LIU J, PAN X, et al. Research on multiaxial fatigue life of notched specimens based on Weibull distribution and Bayes estimation[J]. International Journal of Fatigue, 2023. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2022.107271.
- [5] 张红顺,李潇,杨殿斌.缺口结构寿命分散性与疲劳可靠性设计方法[J].南方农机,2023,54(6): 148-150.  
ZHANG Hongshun, LI Xiao, YANG Dianbin. Design method for life dispersion and fatigue reliability of notched structures[J]. Agricultural Machinery and Equipment, 2023,54(6): 148-150.
- [6] 高阳,白广忱,张瑛莉.涡轮盘低循环疲劳寿命的概率分析[J].航空动力学报,2009,24(4): 804-809.  
GAO Yang, BAI Guangchen, ZHANG Yingli. Probability analysis for the low cycle fatigue life of a turbine disk[J]. Journal of Aerospace Power, 2009, 24(4): 804-809.
- [7] 樊江,廖祐明,李达,等.考虑几何分散性的涡轮盘寿命概率分析[J].航空动力学报,2017,32(1):66-74.  
FAN Jiang, LIAO Huming, LI Da, et al. Probabilistic analysis of turbine disk fatigue life considering geometric uncertainties[J]. Journal of Aerospace Power, 2017,32(1): 66-74.
- [8] ZHU S P, FOLETTI S, BERETTA S. Evaluation of size effect on strain-controlled fatigue behavior of a quench and tempered rotor steel: Experimental and numerical study[J]. Materials Science and Engineering: A, 2018, 735: 423-435.
- [9] MUNIZ-CALVENTE M, DE JESUS A M P, CORREIA J A F O, et al. A methodology for probabilistic prediction of fatigue crack initiation taking into account the scale effect[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2017, 185: 101-113.
- [10] 黄宁.大型结构件的疲劳寿命预测方法研究[D].长沙:中南大学,2013.  
HUANG Ning. Research on fatigue life prediction methods for large-scale components[D]. Changsha: Central South University,2013.
- [11] 艾阳.考虑尺寸效应的缺口件疲劳寿命预测及可靠性分析[D].成都:电子科技大学,2024.  
AI Yang. Fatigue life prediction and reliability analysis of notched components under size effect[D].Chengdu: University of Electronic Science and Technology of China,2024.
- [12] SONG Z, HOEPPNER D W. Size effect on the fatigue behaviour of IMI 829 titanium alloy under Dwell conditions[J]. International Journal of Fatigue, 1989, 11(2): 85-90.
- [13] FURUYA Y. Notable size effects on very high cycle fatigue properties of high-strength steel[J]. Materials Science & Engineering A, 2011, 528(15): 5234-5240.



- [14] BERETTA S, REGAZZI D. Probabilistic fatigue assessment for railway axles and derivation of a simple format for damage calculations[J]. *International Journal of Fatigue*, 2016, 86: 13-23.
- [15] 吕志强. 航空发动机轮盘低周疲劳寿命预测方法研究[D]. 成都:电子科技大学,2016.  
LV Zhiqiang. Research on low cycle fatigue life prediction methodology of aero-engine disc[D]. Chengdu: University of Electronic Science and Technology of China,2016.
- [16] LIU Xi, WANG Rongqiao, HU Dianyin, et al. A calibrated weakest-link model for probabilistic assessment of LCF life considering notch size effects[J]. *International Journal of Fatigue*, 2020, 137: 105631.
- [17] SCHWEIGER G, HECKEL K. Size effect in randomly loaded specimens[J]. *International Journal of Fatigue*, 1986, 8(4): 231-234.
- [18] 胡绪腾,辛朋朋,宋迎东. 基于最弱链模型的缺口件概率疲劳寿命预测方法[J]. *机械科学与技术*, 2013, 32(2): 165-169.  
HU Xuteng, XIN Pengpeng, SONG Yingdong. Probabilistic fatigue life prediction method for notched specimens based on the weakest-link theory[J]. *Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering*,2013,32(2): 165-169.
- [19] LI Xuekang, ZHU Shunpeng, LIAO Ding, et al. Probabilistic fatigue modelling of metallic materials under notch and size effect using the weakest link theory [J]. *International Journal of Fatigue*, 2022, 159: 106788.
- [20] OKEYOYIN O A, OWOLABI G M. Application of weakest link probabilistic framework for fatigue notch factor to turbine engine materials[J]. *World Journal of Mechanics*, 2013, 3(5): 237-244.
- [21] 辛朋朋. 基于最弱环理论的缺口疲劳寿命预测方法研究[D]. 南京:南京航空航天大学,2012.  
XIN Pengpeng. Research on notch fatigue life prediction method based on the weakest-link theory[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics,2012.
- [22] ZHU S P, WU Y L, YI X, et al. Probabilistic fatigue assessment of notched components under size effect using generalized weakest-link model[J]. *International Journal of Fatigue*, 2022, 162: 107005.
- [23] 杨新华,陈传尧. 疲劳与断裂[M]. 武汉:华中科技大学出版社,2018.  
YANG Xinhua, CHEN Chuanyao. *Fatigue and fracture*[M]. Wuhan: Huazhong University of Science & Technology Press,2018.
- [24] 盛骤,谢式千,潘承毅. 概率论与数理统计[M]. 4版. 北京:高等教育出版社,2008.  
SHENG Zhou, XIE Shiqian, PAN Chengyi. *Probability theory and mathematical statistics*[M]. Fourth ed. Beijing: Higher Education Press,2008.

(编辑:夏道家)