

DOI:10.16356/j.1005-2615.2016.06.007

## 基于分布质量轴模型的尾传动轴系临界转速分析

倪 德 李科锋 刘建武

(中国航发湖南动力机械研究所, 株洲, 412002)

**摘要:**以直升机尾斜轴为研究对象, 推导了传动轴的分布质量传递矩阵, 模型中考虑了弯矩、横向位移、剪切变形、转动惯量、陀螺力矩和轴向力等因素的综合影响。建立了膜片联轴器 and 弹性支承的传递矩阵。给出了尾传动轴系临界转速的计算方法。以三支点水平轴系为分析对象, 将本文传递矩阵法计算的结果与有限元法计算的结果进行了对比分析, 以检验本文传递矩阵法的有效性。本文传递矩阵法相对于有限元法的最大计算误差为 4.1%, 表明本文传递矩阵法的计算精度较高, 同时本文传递矩阵法的计算速度更快, 便于设计人员进行尾传动轴系临界转速的影响因素分析。

**关键词:**尾传动轴; 临界转速; 分布质量轴模型

中图分类号: TH113.2; TH113.1

文献标志码: A

文章编号: 1005-2615(2016)06-0822-06

## Critical Speed Analysis of Helicopter Tail Drive Shaft Based on Distributed Mass Shaft Model

Ni De, Li Kefeng, Liu Jianwu

(AECC Hunan Aviation Powerplant Research Institute, Zhuzhou, 412002, China)

**Abstract:** The transfer matrix of the distributed mass shaft model for the helicopter oblique drive tail shaft is derived. The bending moment, lateral displacement, shear distortion, moment of inertia, gyroscopic moment and axial force are all considered in the model. The transfer matrix of the diaphragm coupling and elastic support are established. The calculation method of the critical speed of the tail drive shaft is presented. In order to test the validity and precision of the presented method, the results of horizontal shaft with three supports are compared with those of the finite element method. The maximum error of the presented method with respect to the finite element method is 4.1%, which indicates that the presented method is high in calculation accuracy and quick in calculation speed. Consequently the presented method is very suitable for the designers to analysis the influence factors of critical speeds of tail drive shaft system.

**Key words:** tail drive shaft; critical speed; distributed mass shaft model

直升机尾传动轴系用于将主减速器输出的功率和运动传递给中间减速器、尾减速器和尾桨, 是

直升机上最长的传动链, 其动力学性能的优劣将对直升机传动系统的整体性能产生重要影响。有害

收稿日期: 2016-04-13; 修订日期: 2016-05-15

通信作者: 倪德, 男, 博士, 工程师, E-mail: mide2008meng@sina.com。

引用格式: 倪德, 李科锋, 刘建武. 基于分布质量轴模型的尾传动轴系临界转速分析[J]. 南京航空航天大学学报, 2016, 48(6): 822-827. Ni De, Li Kefeng, Liu Jianwu. Critical speed analysis of helicopter tail drive shaft based on distributed mass shaft model[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2016, 48(6): 822-827.

振动特别是共振会加速零部件的损坏,严重时将导致灾难性事故发生。为确保直升机的安全,设计时应保证尾传动轴系的各阶临界转速与其所有工作转速之间留有足够的裕度(一般至少 10% 以上)。因此,尾传动轴系临界转速的计算与分析是其动力学设计的关键内容之一。

传递矩阵法非常适合分析具有链状结构的系统的振动特性。由于各基本单元的传递矩阵仅由其力学特性所决定,使得其具有矩阵阶次低、计算工作量小的特点<sup>[1]</sup>,且便于考虑各种复杂结构和因素的影响。因此,本文选用传递矩阵法分析尾传动轴系的临界转速。丛家勇等人采用传递矩阵法对尾传动轴系的横向振动固有特性进行了研究<sup>[2-4]</sup>,但是他们均将传动轴等效为多个集中质量与无质量弹簧的组合物。为提高计算精度,哪怕是等截面轴,仍需细分为多个轴段后再进行计算,所以其累积误差较大<sup>[5-7]</sup>。尾传动轴系中没有大圆盘结构,尾传动轴具有质量连续均匀分布的特点,更适合采用分布质量模型。采用分布质量模型进行临界转速计算时,仅需在轴截面尺寸或单元类型发生变化时进行分段,而无需对等截面轴进行分段<sup>[8]</sup>,简化了建立系统分析模型的过程,减小了计算工作量和累积误差。

本文首先以更具代表性的直升机尾斜轴为研究对象,推导了可以考虑弯矩、横向位移、剪切变形、转动惯量、陀螺力矩和轴向力等因素综合影响的尾传动轴的分布质量传递矩阵;然后,分别推导了膜片联轴器和弹性支承的传递矩阵;紧接着,给出了尾传动轴系临界转速的计算方法;最后,通过实例验证了本文传递矩阵法的正确性和有效性。

## 1 尾传动轴系主要部件的传递矩阵

采用传递矩阵法分析临界转速的核心工作在于建立分析对象的传递矩阵。直升机尾传动轴系由传动轴、法兰盘、联轴器和支承等典型部件组成,故可将其等效为传动轴单元、集中质量单元、圆盘单元、联轴器单元和支承单元等构成的链状结构模型。

### 1.1 传动轴

大多数单旋翼直升机尾传动轴系包含水平轴和尾斜轴。尾斜轴的横向运动可用如图 1 所示的坐标系  $O_b x_b y_b z_b$  描述,水平轴的横向运动可用坐

标系  $O_1 x_1 y_1 z_1$  描述。其中,  $y_b$  与  $y_1$  重合,  $x_b$  与  $x_1$  及  $z_b$  与  $z_1$  之间的夹角  $\varphi$  为尾斜轴相对水平轴的倾角。当  $\varphi=0$  时尾斜轴转化为水平轴,即水平轴是尾斜轴的一种特例。

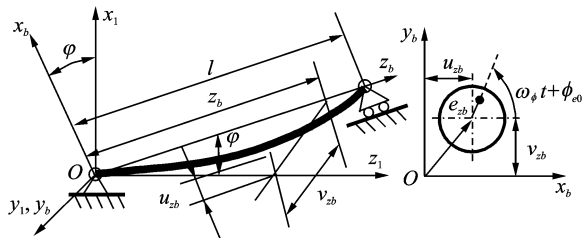


图 1 尾传动轴的参考坐标系

Fig. 1 Reference coordinated system of tail drive shaft

考虑弯矩、横向位移、剪切变形、转动惯量、陀螺力矩和轴向力等因素的综合影响时,传动轴的横向振动微分方程为<sup>[9]</sup>

$$\begin{cases} \rho A \frac{\partial^2 u_{zb}}{\partial t^2} - F_{a0} \frac{\partial^2 u_{zb}}{\partial z_b^2} + \kappa' GA \left( \frac{\partial \theta_{yb}}{\partial z_b} - \frac{\partial^2 u_{zb}}{\partial z_b^2} \right) = 0 \\ \rho I \frac{\partial^2 \theta_{yb}}{\partial t^2} - 2\rho I \omega_\phi \frac{\partial \theta_{zb}}{\partial t} - EI \frac{\partial^2 \theta_{yb}}{\partial z_b^2} + \kappa' GA \left( \theta_{yb} - \frac{\partial u_{zb}}{\partial z_b} \right) = 0 \\ \rho A \frac{\partial^2 v_{zb}}{\partial t^2} - F_{a0} \frac{\partial^2 v_{zb}}{\partial z_b^2} - \kappa' GA \left( \frac{\partial \theta_{zb}}{\partial z_b} + \frac{\partial^2 v_{zb}}{\partial z_b^2} \right) = 0 \\ \rho I \frac{\partial^2 \theta_{zb}}{\partial t^2} + 2\rho I \omega_\phi \frac{\partial \theta_{yb}}{\partial t} - EI \frac{\partial^2 \theta_{zb}}{\partial z_b^2} + \kappa' GA \left( \theta_{zb} + \frac{\partial v_{zb}}{\partial z_b} \right) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $\rho, A, \omega_\phi$  分别为传动轴的密度、截面积和转速;  $I$  为轴截面关于中性轴的惯性矩;  $E, G$  分别为材料的弹性模量和剪切弹性模量;  $u_{zb}, v_{zb}$  分别为距传动轴左端面  $z_b$  处的轴截面几何中心沿坐标轴  $x_b, y_b$  的位移;  $\theta_{yb}, \theta_{zb}$  分别为传动轴在平面  $x_b O z_b$  和  $y_b O z_b$  内的转角;  $t$  为时间;  $F_{a0}$  为轴向力;  $\kappa'$  为轴截面的剪切形状系数。对于空心轴,  $\kappa'$  的计算公式为<sup>[10]</sup>

$$\kappa' = \frac{6(1+\nu)^2(1+a^2)^2}{(7+12\nu+4\nu^2)(1+a^2)^2+4a^2(5+6\nu+2\nu^2)} \quad (2)$$

式中:  $\nu$  为材料的泊松比;  $a$  为传动轴内外半径之比。

从式(1)中消去  $\theta_{zb}$  和  $\theta_{yb}$  后,得到关于  $u_{zb}$  和  $v_{zb}$  的耦合方程;同样,消去  $u_{zb}$  和  $v_{zb}$  后,可得到关于  $\theta_{zb}$  和  $\theta_{yb}$  的耦合方程;然后令  $\omega = u_{zb} + i v_{zb}$  和  $\vartheta = \theta_{zb} - i \theta_{yb}$  ( $i$  为虚数单位),得到传动轴的横向弯曲自由振

动控制方程为

$$\begin{cases} \rho A \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} - F_{a0} \frac{\partial^2 \omega}{\partial z_b^2} + EI \left(1 + \frac{F_{a0}}{\kappa'GA}\right) \frac{\partial^4 \omega}{\partial z_b^4} - \\ \rho I \left(1 + \frac{E}{\kappa'G} + \frac{F_{a0}}{\kappa'GA}\right) \frac{\partial^4 \omega}{\partial z_b^2 \partial t^2} + \\ \frac{\rho^2 I}{\kappa'G} \frac{\partial^4 \omega}{\partial t^4} + i2\rho I \omega_\phi \left(1 + \frac{F_{a0}}{\kappa'GA}\right) \frac{\partial^3 \omega}{\partial z_b^2 \partial t} - \\ i \frac{2\rho^2 I \omega_\phi}{\kappa'G} \frac{\partial^3 \omega}{\partial t^3} = 0 \\ \rho A \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} - F_{a0} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z_b^2} + EI \left(1 + \frac{F_{a0}}{\kappa'GA}\right) \frac{\partial^4 \vartheta}{\partial z_b^4} - \\ \rho I \left(1 + \frac{E}{\kappa'G} + \frac{F_{a0}}{\kappa'GA}\right) \frac{\partial^4 \vartheta}{\partial z_b^2 \partial t^2} + \\ \frac{\rho^2 I}{\kappa'G} \frac{\partial^4 \vartheta}{\partial t^4} + i2\rho I \omega_\phi \left(1 + \frac{F_{a0}}{\kappa'GA}\right) \frac{\partial^3 \vartheta}{\partial z_b^2 \partial t} - \\ i \frac{2\rho^2 I \omega_\phi}{\kappa'G} \frac{\partial^3 \vartheta}{\partial t^3} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\beta_1 z_b & \sin\beta_1 z_b & \cosh\beta_2 z_b & \sinh\beta_2 z_b \\ b_0 \sin\beta_1 z_b & -b_0 \cos\beta_1 z_b & a_0 \sinh\beta_2 z_b & a_0 \cosh\beta_2 z_b \\ EIb_0 \beta_1 \cos\beta_1 z_b & EIb_0 \beta_1 \sin\beta_1 z_b & E I a_0 \beta_2 \cosh\beta_2 z_b & E I a_0 \beta_2 \sinh\beta_2 z_b \\ \kappa'GAB_0 \sin\beta_1 z_b & -\kappa'GAB_0 \cos\beta_1 z_b & \kappa'GAA_0 \sinh\beta_2 z_b & \kappa'GAA_0 \cosh\beta_2 z_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_4 \end{bmatrix}$$

式中

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_0 \beta_2}{B} & 0 & -\frac{1}{EIB} & 0 \\ 0 & \frac{A_0}{D} & 0 & -\frac{a_0}{\kappa'GAD} \\ -\frac{b_0 \beta_1}{B} & 0 & \frac{1}{EIB} & 0 \\ 0 & \frac{B_0}{D} & 0 & -\frac{b_0}{\kappa'GAD} \end{bmatrix}$$

$$A_0 = a_0 - \beta_2, B_0 = b_0 + \beta_1, B = a_0 \beta_2 - b_0 \beta_1,$$

$$D = a_0 \beta_1 + b_0 \beta_2, a_0 = \frac{\rho \omega^2}{\kappa'G\beta_2} + \beta_2 + \frac{F_{a0}}{\kappa'GA} \beta_2,$$

$$b_0 = \frac{\rho \omega^2}{\kappa'G\beta_1} - \beta_1 - \frac{F_{a0}}{\kappa'GA} \beta_1, \beta_1 = \sqrt{\frac{F + \sqrt{F^2 - 4H}}{2}},$$

$$\beta_2 = \sqrt{\frac{-F + \sqrt{F^2 - 4H}}{2}}$$

设任意一段轴的长度和传递矩阵分别为  $l_j$  和  $\mathbf{T}_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ), 则只需将式(5)中  $\mathbf{T}$  的  $z_b$  替换成  $l_j$  即可。

## 1.2 联轴器

尾传动轴之间通过膜片联轴器相连, 联轴器通过螺栓固定在两端的连接法兰上。可将连接法兰等效为圆盘单元(其传递矩阵见 1.3 节), 将联轴器等效为两端具有集中质量(考虑其转动惯量影响时则需等效为圆盘单元)、中间为角向刚度和径向刚度的力学单元。根据弹性联轴器左右两端状态向

利用分离变量法<sup>[11]</sup>求得式(3)中位移  $\omega$  和转角  $\vartheta$  的解后, 代入弯矩  $M_{zb} = M_{yb} - iM_{xb}$  和剪力  $Q_{zb} = Q_{xb} + iQ_{yb}$  中, 根据传动轴起始端( $z_b=0$ )的状态向量, 即可推导出传动轴左右两端状态向量之间的关系为

$$\begin{bmatrix} \omega(z_b) \\ \vartheta(z_b) \\ M_{zb}(z_b) \\ Q_{zb}(z_b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(0) \\ \vartheta(0) \\ M_{zb}(0) \\ Q_{zb}(0) \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \omega(0) \\ \vartheta(0) \\ M_{zb}(0) \\ Q_{zb}(0) \end{bmatrix} \quad (4)$$

式(4)中的方阵  $\mathbf{T}$  为传动轴任意截面位置  $z_b$  相对于其初始截面位置的传递矩阵, 其表达式为

$$\begin{bmatrix} \cosh\beta_2 z_b & \sinh\beta_2 z_b \\ a_0 \sinh\beta_2 z_b & a_0 \cosh\beta_2 z_b \\ E I a_0 \beta_2 \cosh\beta_2 z_b & E I a_0 \beta_2 \sinh\beta_2 z_b \\ \kappa'GAA_0 \sinh\beta_2 z_b & \kappa'GAA_0 \cosh\beta_2 z_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_4 \end{bmatrix} \quad (5)$$

量之间的传递关系, 推导出膜片联轴器的传递矩阵为

$$\mathbf{T}_j = \begin{bmatrix} \frac{m_j \omega^2}{2k_{c,j}} + 1 & 0 & 0 & \frac{1}{k_{c,j}} \\ 0 & 1 & \frac{1}{k_{a,j}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_j \omega^2 + \frac{(m_j \omega^2)^2}{4k_{c,j}} & 0 & 0 & \frac{m_j \omega^2}{2k_{c,j}} + 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中:  $m$  为膜片、螺栓和垫片等部件的等效质量;  $k_{a,j}$  和  $k_{c,j}$  分别为第  $j$  个联轴器的角向刚度和径向刚度,  $\omega$  为进动角速度。令式(6)中的角向刚度  $k_{a,j}$  和径向刚度  $k_{c,j}$  为 0, 则得到集中质量单元的传递矩阵。

## 1.3 支承

若轴承与轴承座刚度的量级与传动轴相当, 则需将其视为弹性支承(本文将刚性支承当作刚度无限大的弹性支承处理)。若轴承座为刚性, 则支承刚度仅由轴承提供。直升机服役时, 尾传动轴系除对轴承产生径向载荷外还会作用一个弯矩, 使得轴承的内外圈之间除了产生径向位移外还产生相对转角。所以, 轴承除了提供径向刚度  $k_r$  外还提供角向刚度  $k_b$  (弯曲刚度)。鉴于通用性的考虑, 将支承系统简化为支撑在弹性和阻尼元件上的圆盘

单元,其受力关系如图 2 所示。经推导,支承单元的传递矩阵为

$$T_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_{b,j} + (I_{p,j}\omega_\varphi - I_{d,j}\omega)\omega & 1 & 0 \\ m_{d,j}\omega^2 - ic_{r,j}\omega - k_{r,j} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

式中: $m_{d,j}$ ,  $I_{p,j}$  和  $I_{d,j}$  分别为第  $j$  个支承的等效圆盘的集中质量(包括轴承、轴承座和转轴的参振质量)、极转动惯量和直径转动惯量; $c_{r,j}$  为第  $j$  个支承的等效阻尼。令式(7)中支承的刚度和阻尼为 0,则得到圆盘的传递矩阵。

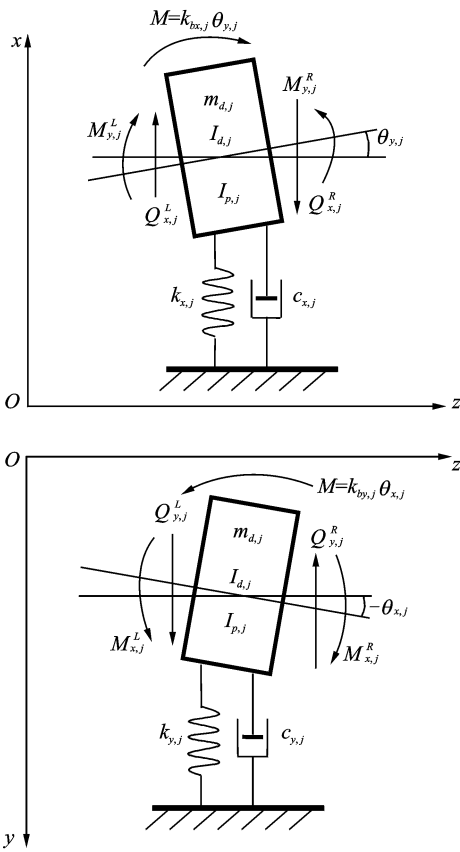


图 2 具有圆盘的弹性支承系统的力学模型

Fig. 2 Mechanical model of elastic supporting system carrying disc

## 2 临界转速计算方法

由上节推导的传递矩阵建立尾传动轴系首末端状态向量之间的传递关系,根据系统两端支承的边界条件推导出其频率方程,在给定的频率范围内,对满足所有边界条件的进动频率进行搜索,所得结果即为待求的临界转速。基于传递矩阵法的尾传动轴系临界转速计算流程如图 3 所示<sup>[12]</sup>,其中,常见

支承条件下的始端矩阵  $V_0$  和末端矩阵  $V_N$  见表 1。

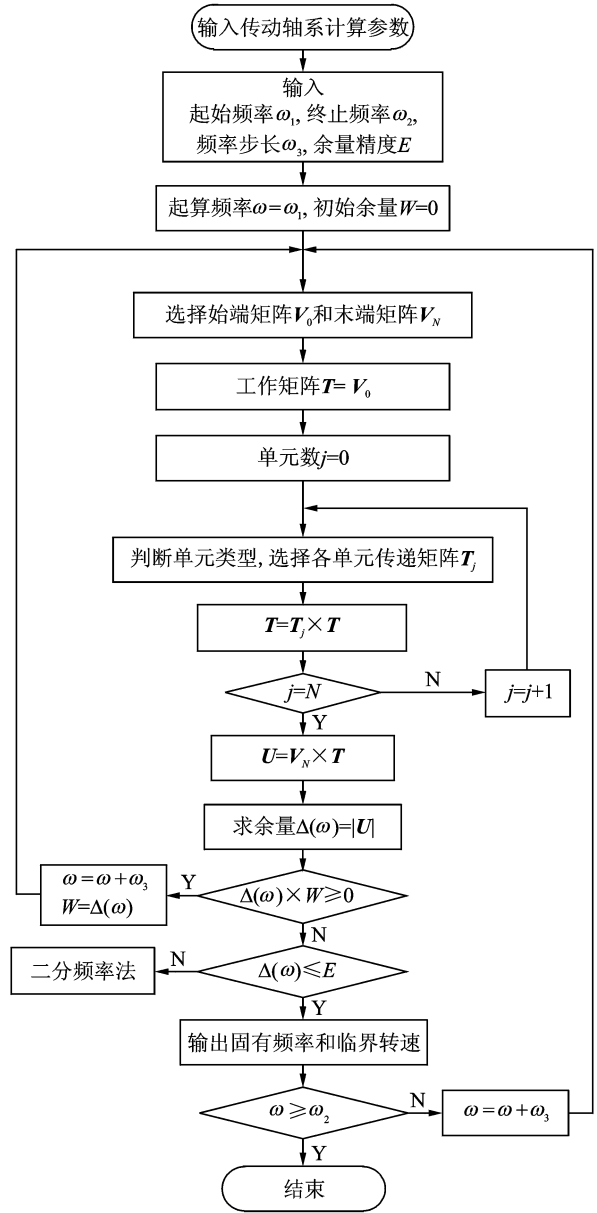


图 3 传动轴系临界转速的传递矩阵法计算流程

Fig. 3 Calculation flow chart of transfer matrix method for critical speed of drive shaft system

表 1 常见支承条件下的始端矩阵  $V_0$  和末端矩阵  $V_N$

Tab. 1 Initial matrix  $V_0$  and terminal matrix  $V_N$  under common supporting condition

支承条件	自由端	刚性铰支端	固定端
始端矩阵 $V_0$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
末端矩阵 $V_N$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

当待求解的临界转速数值过大或者传递矩阵的数目过多时,受计算机字长限制,传统传递矩阵法的累积误差较大,计算精度将大幅度降低,甚至存在漏根现象。采用改进的 Riccati 传递矩阵法可以提高计算的数值稳定性和精度,其频率方程的具体推导过程可参见文献[13]。由于本文不存在此种情况,故不再赘述。

传动轴的涡动有正向进动与反向进动之分,其临界转速亦如此。令各部件传递矩阵中的  $\omega_\phi = \omega$ , 所得结果即为正向同步进动时的临界转速;若令  $\omega_\phi = -\omega$ , 则为反向同步进动临界转速。由于正进动更常见,且对应于传动轴偏心激励下可能激发的临界转速<sup>[14]</sup>, 本文取  $\omega_\phi = \omega$ 。

### 3 计算与分析

传动轴采用超临界设计可以减少支承数量,对

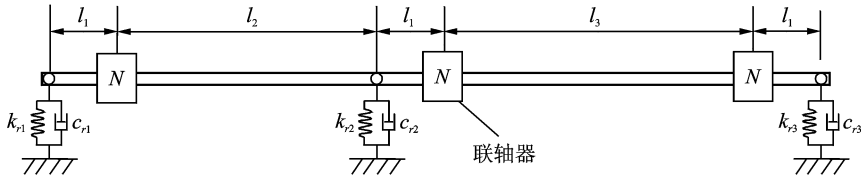


图4 水平传动轴的简化计算模型

Fig. 4 Simplified calculation model of horizontal drive shaft system

表2 水平传动轴系的计算参数

Tab. 2 Calculation parameters of horizontal drive shaft system

参数名称	值	参数名称	值	参数名称	值
支承1径向刚度 $k_{r1}/$ ( $N \cdot m^{-1}$ )	$1 \times 10^8$	支承阻尼 $c_{r1}, c_{r2}, c_{r3}/$ ( $N \cdot s \cdot m^{-1}$ )	0	法兰盘材料密度 $\rho/$ ( $kg \cdot m^{-3}$ )	4 440
支承2径向刚度 $k_{r2}/$ ( $N \cdot m^{-1}$ )	$4 \times 10^6$	传动轴内径 $d_s/$ mm	110.8	法兰盘弹性模量 $E/$ GPa	109
支承3径向刚度 $k_{r3}/$ ( $N \cdot m^{-1}$ )	$1 \times 10^8$	传动轴外径 $D_s/$ mm	114.4	法兰盘剪切模量 $G/$ GPa	44
支承1角向刚度 $k_{b1}/$ ( $N \cdot m \cdot rad^{-1}$ )	$1 \times 10^5$	传动轴材料密度 $\rho/$ ( $kg \cdot m^{-3}$ )	2 800	法兰盘泊松比 $\nu$	0.34
支承2角向刚度 $k_{b2}/$ ( $N \cdot m \cdot rad^{-1}$ )	0	传动轴弹性模量 $E/$ GPa	68	联轴器等效质量 $m/$ kg	0.49
支承3角向刚度 $k_{b3}/$ ( $N \cdot m \cdot rad^{-1}$ )	$1 \times 10^5$	传动轴剪切模量 $G/$ GPa	26	联轴器极转动惯量 $I_p/$ ( $kg \cdot m^2$ )	0.002
联轴器角向刚度 $k_a/$ ( $N \cdot m \cdot rad^{-1}$ )	$1.12 \times 10^3$	传动轴泊松比 $\nu$	0.31	联轴器直径转动惯量 $I_d/$ ( $kg \cdot m^2$ )	0.001
联轴器径向刚度 $k_c/$ ( $N \cdot m^{-1}$ )	$1 \times 10^9$	传动轴轴长 $l_1/$ mm	58		

表3 水平传动轴系临界转速的计算结果

Tab. 3 Calculation results of critical speed of horizontal drive shaft system

方案	$l_2/$ mm	$l_3/$ mm	第一阶/( $r \cdot min^{-1}$ )			第二阶/( $r \cdot min^{-1}$ )			第三阶/( $r \cdot min^{-1}$ )		
			本文方法	有限元法	误差/%	本文方法	有限元法	误差/%	本文方法	有限元法	误差/%
1	2 700	3 630	1 500	1 510	0.66	2 631	2 744	4.1	5 809	5 766	-0.75
2	2 900	3 430	1 682	1 694	0.71	2 282	2 377	4.0	6 491	6 387	-1.63
3	2 800	3 530	1 590	1 598	0.50	2 450	2 551	4.0	6 137	6 069	-1.12

减重十分有利。某直升机水平传动轴系超临界方案由两段轴、3个膜片联轴器和3个支承组成(额定工作转速为4 115 r/min),其简化分析模型如图4所示。

水平轴系的主要计算参数如表2所示。由于水平轴系采用滚动轴承,阻尼很小,故本文忽略其影响。为优化水平轴系的设计参数(轴长  $l_2$  和  $l_3$ ),对其进行多方案设计,3种方案的轴长  $l_2$  和  $l_3$  取值见表3。

分别采用本文传递矩阵法和有限元法(SAMCEF分析软件)对该水平传动轴系的临界转速进行计算分析,计算结果的对比情况如表3所示。表中的误差定义如下

误差=

$$\left| \frac{\text{本文传递矩阵法计算结果} - \text{有限元法计算结果}}{\text{本文传递矩阵法计算结果}} \right| \times 100\% \quad (8)$$

由于有限元法充分考虑了联轴器、法兰盘和支承等细节的影响,所以本文传递矩阵法的计算结果与之相比存在一定误差。由表2可知,第二阶临界转速的计算误差最大,最大值为4.1%。然而,有限元法的计算精度取决于有限元网格模型的好坏,需要专业的分析人员才能胜任,且计算工作量大,对计算机性能要求高,时间成本高。本文传递矩阵法的计算结果虽然有误差,但只要合理简化分析模型,完全能满足设计人员在方案设计阶段的计算精度要求。本文传递矩阵法易于掌握,计算速度快,设计人员可以快速分析各影响因素对传动轴系临界转速的影响规律,从而获得最优的设计方案,加快研制进度。

尾斜轴的重力会对其产生轴向力分量,中间减速器和尾减速器均采用螺旋锥齿轮传动,也会对传动轴产生轴向力,对传动轴的临界转速有一定的影响。本文推导的传动轴传递矩阵可以考虑轴向力的影响,能分析外力对尾传动轴系临界转速的影响。

## 4 结 论

本文研究了基于分布质量轴模型的尾传动轴系临界转速分析方法,主要工作及成果如下:

(1)对尾传动轴系的结构特点进行了分析,将其等效为传动轴单元、集中质量单元、圆盘单元、联轴器单元和支承单元等构成的链状结构模型。

(2)建立了尾斜轴的分布质量传递矩阵模型,模型中考虑了弯矩、横向位移、剪切变形、转动惯量、陀螺力矩和轴向力等因素对传动轴横向运动的综合影响。

(3)建立了膜片联轴器单元和弹性支承单元的传递矩阵模型,同时将集中质量单元看成膜片联轴器单元的一种特例,将圆盘单元看成弹性支承单元的一种特例。

(4)在上述传递矩阵模型的基础上,编制了尾传动轴系临界转速的计算程序,并以三支点传动轴系为实例对象,对比了本文传递矩阵法与有限元法分析结果的计算精度。本文传递矩阵法相对于有限元法的最大计算误差为4.1%,其计算精度较高,计算速度快,易于程序化,结合灵敏度分析,可以快速获得尾传动轴系临界转速对各影响因素的敏感度。

## 参考文献:

[1] Ma Lei, Rui Xiaoting, Abbas Laith, et al. Free vibration analysis and physical parameter identification of non-uniform beam carrying[J]. Transactions of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2012,29(4):345-353.

[2] 丛家勇. 直升机尾传动系统的动力学分析[D]. 南京:南京航空航天大学,2008.

Cong Jiayong. Dynamic analysis for helicopter tail ro-

tor transmission system[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2008.

- [3] 艾平贵. 直升机尾传动系统的横向振动和扭转振动分析[D]. 南京:南京航空航天大学,2009.
- Ai Pinggui. Analysis of lateral vibration and torsional vibration of helicopter tail drive system[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2009.
- [4] 朱自冰. 直升机尾传动系统动力学关键问题研究[D]. 南京:南京航空航天大学,2012.
- Zhu Zibing. Research on key problems of dynamics of helicopter tail-drive transmission system[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2012.
- [5] Wu J S, Chen C T. A continuous-mass TMM for free vibration analysis of a non-uniform beam with various boundary conditions and carrying multiple concentrated elements[J]. Journal of Sound and Vibration, 2008,311(3/4/5):1420-1430.
- [6] Wu J S, Chen C T. A lumped-mass TMM for free vibration analysis of a multiple-step beam carrying eccentric tip masses with rotary inertias[J]. Journal of Sound and Vibration, 2007,301(3/4/5):878-897.
- [7] Aleyaasin M, Ebrahimi M, Whalley R. Vibration analysis of distributed-lumped rotor systems [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2000,189(2):545-558.
- [8] 张小龙,何洪庆. 涡轮泵转子的临界转速研究(IV)分布质量轴的传递矩阵法[J]. 推进技术,2000,21(2):52-55.
- Zhang Xiaolong, He Hongqing. Critical rotational speed of turbo pump rotor(IV) transfer matrix method for the distributed mass shaft[J]. Journal of Propulsion Technology, 2000,21(2):52-55.
- [9] 倪德,朱如鹏,陆凤霞,等. 考虑空间机动飞行的直升机尾传动轴建模与临界转速分析[J]. 航空动力学报,2015,30(6):1520-1528.
- Ni De, Zhu Rupeng, Lu Fengxia, et al. Modeling and analysis of critical speed for tail drive shaft of the helicopter considering space maneuvering flight[J]. Journal of Aerospace Power, 2015,30(6):1520-1528.
- [10] Hutchinson J R. Shear coefficients for timoshenko beam theory [J]. Journal of Applied Mechanics, 2001,68(1):87-92.
- [11] Rao S S. Mechanical vibrations[M]. Fourth Edition. New Jersey: Pearson Education Inc, 2004:249-253.
- [12] 屈维德,唐恒龄. 机械振动手册[M]. 北京:机械工业出版社,2000.
- [13] 周瑞,李宁,鲍利群,等. 基于分布质量轴模型的回旋振动计算方法[J]. 船舶力学,2013,17(8):931-936.
- Zhou Rui, Li Ning, Bao Liqun, et al. Calculation method of whirling vibration based on the distributed mass shaft model[J]. Journal of Ship Mechanics, 2013,17(8):931-936.
- [14] Lalanne M, Ferraris G. Rotordynamics prediction in engineering[M]. 2nd Edition. New York: John Wiley & Sons Ltd, 1998.

