

DOI:10.16356/j.1005-2615.2016.06.006

摩擦因数时变的节点外啮合齿轮系动力学分析

鲍和云 张亚运 朱如鹏 陆风霞

(南京航空航天大学机电学院,南京,210016)

摘要:以外啮合节点后啮合单级齿轮传动系统为研究对象,建立了系统六自由度非线性动力学模型,考虑了时变啮合刚度、时变齿面摩擦、载荷在啮合区动态分配以及齿侧间隙的影响。采用能量法计算了时变啮合刚度。基于弹流润滑(Elasto-hydrodynamic lubrication, EHL)理论计算了时变摩擦因数,与库伦摩擦模型进行了对比分析,得到了齿轮副非线性振动方程,同时采用数值方法求解了系统的动力学微分方程组,得到了系统的时域动态响应和相图,并分析了系统的动力学特性。

关键词:弹流润滑理论;时变摩擦因数;时变啮合刚度;非线性模型;间隙;节点外啮合

中图分类号: TH132.4 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-2615(2016)06-0815-07

Dynamic Analysis of External Gear System with Meshing Beyond Pitch Considering Time-Varying Friction Coefficient

Bao Heyun, Zhang Yayun, Zhu Rupeng, Lu Fengxia

(College of Mechanical and Electrical Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China)

Abstract: A six degrees non-linear dynamics model of a gear system with meshing beyond pitch point is established considering the time-varying meshing stiffness, time-varying friction, load distribution among teeth and backlash. Time-varying meshing stiffness is calculated by material mechanics method, and time-varying friction coefficient is calculated by elasto-hydrodynamic lubrication (EHL) theory and compared with that of the Coulomb friction model. Moreover, the system differential equation is obtained and solved by Runge-Kutta numerical integration method. At last, dynamic response and phase diagram are obtained, and dynamics characteristics of the system are analyzed.

Key words: elasto-hydrodynamic lubrication (EHL) theory; time-varying friction coefficient; time-varying meshing stiffness; nonlinear model; backlash; meshing beyond pitch

节点外啮合齿轮传动作为一种新的啮合方式,由于能够避免齿轮传动在啮合过程中经过节点时的摩擦力换向,故在近几年来,成为研究齿轮减振降噪领域的热议话题。文献[1]表明,齿轮的啮合

刚度和传递误差是引起激励的主要原因,但是齿面摩擦力会引起齿轮沿垂直于啮合线方向的振动并形成扭转力矩制约齿轮的扭转振动,因此,正确计算出齿面摩擦力显得尤为重要。

基金项目:国家自然科学基金(51305196,51375226)资助项目。

收稿日期:2016-04-15;**修订日期:**2016-06-22

通信作者:鲍和云,女,工学博士,副教授,硕士生导师,E-mail: siyanger@163.com。

引用格式:鲍和云,张亚运,朱如鹏,等.摩擦因数时变的节点外啮合齿轮系动力学分析[J].南京航空航天大学学报,2016,48(6):815-821. Bao Heyun, Zhang Yayun, Zhu Rupeng, Lu Fengxia. Dynamic analysis of external gear system with meshing beyond pitch considering time-varying friction coefficient[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2016, 48(6): 815-821.

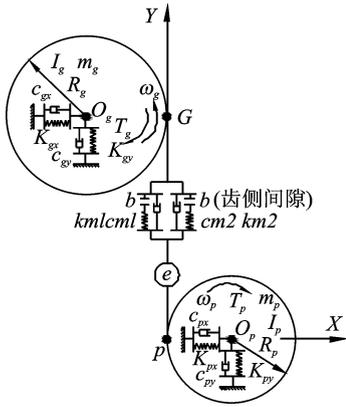


图 2 六自由度动力学模型
Fig. 2 A 6-DOF dynamic model

误差、波形误差、压力角误差、齿向误差和齿频误差等,在实际分析中,一般仅考虑齿轮的偏心误差和齿频误差。故在进行动力学分析时,将误差用简谐函数表示为

$$e(t) = A_e \cos(\omega t + \varphi_e) \quad (1)$$

式中: $e(t)$ 为误差; ω 为啮合频率; A_e 为误差的幅值; φ_e 为误差的初相位。

为了准确描述啮合位置和啮合状态,首先需要对各段啮合线长度进行求解,由图 1 知, $N_1 N_2$ 为理论啮合线长度, $B_2 B_1$ 为实际啮合线长度, $B_2 B$, AB_1 为双齿啮合线长度, BA 为单齿啮合线长度,记 P_b 为基圆齿距,则有

$$\begin{cases} N_1 N_2 = (R_p + R_g) \times \tan \alpha_w \\ N_1 B_1 = R_p \times \tan \alpha_{a1} \\ N_2 B_2 = R_g \times \tan \alpha_{a2} \\ B_1 B_2 = N_1 B_1 + N_2 B_2 - N_1 N_2 \\ B_2 B = AB_1 = B_1 B_2 \times (\epsilon - 1) / \epsilon \\ BA = B_1 B_2 \times (2 - \epsilon) / \epsilon \\ P_b = m_1 \times \pi \times \cos \alpha_1 \end{cases} \quad (2)$$

式中: α_w 为实际啮合角; α_{a1} , α_{a2} 分别为主、被动齿轮顶圆压力角; α_1 为主动轮分度圆压力角; ϵ 为重合度; m_1 为主动轮模数。

建立主、被动齿轮 X 、 Y 向平移和旋转的动力学控制方程

$$\begin{cases} m_p \ddot{x}_1 + c_{px} \dot{x}_1 + K_{px} x_1 = -F_{p1}(t) - F_{p2}(t) \\ m_p \ddot{y}_1 + c_{py} \dot{y}_1 + K_{py} y_1 = -N_{p1}(t) - N_{p2}(t) \\ I_p \ddot{\theta}_p = T_p - N_{p1}(t) R_p - N_{p2}(t) R_p - F_{p1}(t) H_{p1} - F_{p2}(t) H_{p2} \\ m_g \ddot{x}_2 + c_{gx} \dot{x}_2 + K_{gx} x_2 = F_{g1}(t) + F_{g2}(t) \\ m_g \ddot{y}_2 + c_{gy} \dot{y}_2 + K_{gy} y_2 = N_{g1}(t) + N_{g2}(t) \\ I_g \ddot{\theta}_g = -T_g + N_{g1}(t) R_g + N_{g2}(t) R_g + F_{g1}(t) H_{g1} + F_{g2}(t) H_{g2} \end{cases} \quad (3)$$

式中摩擦力臂可以基于啮合线定义为

$$\begin{cases} H_{p1}(t) = L_{p1} [\text{mod}(R_p \omega_p t, P_b)] \\ H_{p2}(t) = L_{p2} [\text{mod}(R_p \omega_p t, P_b)] \\ H_{g1}(t) = (R_p + R_g) \tan \alpha_w - H_{p1}(t) \\ H_{g2}(t) = (R_p + R_g) \tan \alpha_w - H_{p2}(t) \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} L_{p1} = \begin{cases} N_1 B_2 + R_p \omega_p t & t < P_b / R_p \omega_p \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \\ L_{p2} = \begin{cases} N_1 B_2 + B_2 A + R_p \omega_p t & t < B_2 B / R_p \omega_p \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \end{cases} \quad (5)$$

2.3 时变啮合刚度的计算

齿轮啮合刚度的计算是齿轮系统强度和动力学研究的重要组成部分,其计算结果直接影响齿轮动态特性计算的准确性。故对单个轮齿刚度进行分析时,将单个轮齿简化为非均匀悬臂梁模型,采用能量法^[10]对单个轮齿的刚度进行计算,轮齿中心关于通过齿顶中心和齿轮圆心的直线对称,轮齿的有效接触部分沿对称轴线被分为一系列长方形微单元,计算微单元在法向载荷作用下的轮齿变形、基体变形,进而求出单个轮齿的刚度,然后将轮齿的齿廓和轮体离散为多个离散的微单元,求解齿轮上各个点的变形,沿着齿廓的啮合线进行积分,得到在载荷作用下齿轮的变形和刚度,如图 3 所示。

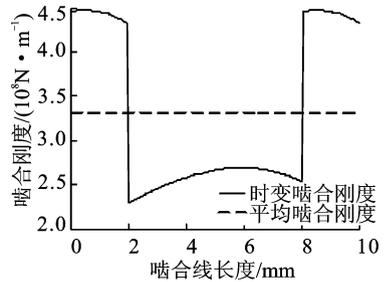


图 3 时变啮合刚度

Fig. 3 Time-varying meshing stiffness

2.4 摩擦因数的计算

摩擦因数大小与轮齿的几何形貌、齿面的表面粗糙度、轮齿的相对滑动速度、齿面间的接触应力及系统的润滑情况等因素相关,故欲准确地预测齿面间的摩擦因数较为困难。目前,研究齿面摩擦因数的模型主要包括:库伦摩擦模型、Buckingham 经验公式^[11]、Benedict & Kelly 和基于弹流润滑理论摩擦因数的计算模型。

本文主要针对库伦摩擦模型和基于弹流润滑理论摩擦因数模型进行讨论。

2.4.1 库伦摩擦模型

库伦摩擦模型计算公式为

$$\mu(t) = u_a \lambda(t) \quad (6)$$

式中: $\lambda(t)$ 为齿面摩擦力方向系数, 当主动轮齿面摩擦力与 X 轴负方向一致时, $\lambda(t)$ 为 1, 其方向在经过节点位置发生改变, 因节点外实际啮合线不过节点, 故 $\lambda(t)$ 为恒值 1; μ_0 为摩擦因数的幅值, 即平均摩擦因数。航空标准^[12]中, 根据实际试验结果综合而成的任意啮合点 K 处的摩擦因数经验公式为

$$\mu_K = 0.12 \left(\frac{W_t R_a}{\eta_m v \sum K \rho_{red, K}} \right)^{0.25} \quad (7)$$

将式(7)中任意点 K 处的参数换成节点 P 处的参数即可得到节点处的摩擦因数

$$\mu_P = 0.12 \left(\frac{W_t R_a}{\eta_m v \sum P \rho_{red, P}} \right)^{0.25} \quad (8)$$

式中: R_a 为渐开线齿形方向上齿面粗糙度的算术平均值; W_t 为单位齿宽切向载荷; η_m 为润滑油在主体温度时的动力黏度, $v_{\Sigma P}$ 为主、从动齿轮在节点 P 处切向速度之和, $\rho_{red, P}$ 为齿轮啮合副在节点 P 处的综合曲率半径。标准中即以 μ_P 代替平均摩擦因数, 即 μ_0 。

2.4.2 基于弹流润滑理论摩擦因数计算模型

由 Xu^[13] 提出的基于弹流润滑理论的摩擦因数计算模型表达式为

$$\mu(t) = e^{f(SR, P_h, v_0, S_{avg})} P_h^{b_2} |SR|^{b_3} V_e^{b_6} v_0^{b_7} R^{b_8} \quad (9)$$

式中 $f(SR, P_h, v_0, S_{avg})$ 可由式(9)求得

$$f(SR, P_h, v_0, S_{avg}) = b_1 + b_4 |SR| P_h \log_{10}(v_0) + b_5 e^{-|SR| P_h \log_{10}(v_0)} + b_9 e^{S_{avg}} \quad (10)$$

式中 b_1, b_2, \dots, b_9 的值依次在表 2 中给出。

表 2 EHL 摩擦因数计算模型中参数赋值

Tab. 2 Parameters of EHL friction coefficient model

参数	b_1	b_2	b_3
参数值	-8.916 4	1.033 0	1.036 0
参数	b_4	b_5	b_6
参数值	-0.354 0	2.812 0	-0.100 6
参数	b_7	b_8	b_9
参数值	0.752 7	-0.390 9	0.620 3

其中滑滚比为

$$SR = \frac{V_s}{V_e} = \frac{2V_s}{V_r} = \frac{2|V_1 - V_2|}{V_1 + V_2}$$

$$V_s = |V_1 - V_2|$$

$$V_e = (V_1 + V_2)/2$$

$$V_r = (V_1 + V_2) \quad (11)$$

式中: V_s, V_r 分别为两个接触齿面的相对滑动速度

和相对滚动速度; V_1, V_2 分别为主、从动轮啮合点的瞬时速度。

$$\begin{cases} V_1 = \omega_p \rho_p = \omega_p \times (s + N_1 B_2) \\ V_2 = \omega_g \rho_g = \omega_g \times (N_1 N_2 - s - N_1 B_2) \end{cases} \quad (12)$$

式中: ρ_p, ρ_g 分别为主动轮、从动轮的曲率半径, s 为啮合点距实际啮合起点的距离。

最大赫兹接触应力

$$P_h = \sqrt{\frac{WE'}{2\pi R}} \quad (13)$$

式中 W' 为轮齿的单位法向载荷。综合弹性模量为

$$E' = \frac{2}{\frac{(1-\mu_1^2)}{E_1} + \frac{(1-\mu_2^2)}{E_2}} \quad (14)$$

式中: E_1, E_2 分别为主动轮、从动轮的弹性模量; μ_1, μ_2 分别为主动轮、从动轮的泊松比。接触点综合曲率半径 R 为

$$R = \frac{(R_p \tan \alpha_1 + s) \times (R_g \tan \alpha_2 - s)}{R_p \tan \alpha_1 + R_g \tan \alpha_2} \quad (15)$$

时变载荷分配情况如图 4 所示, 其中 $F_n = T_p/R_p$ 。

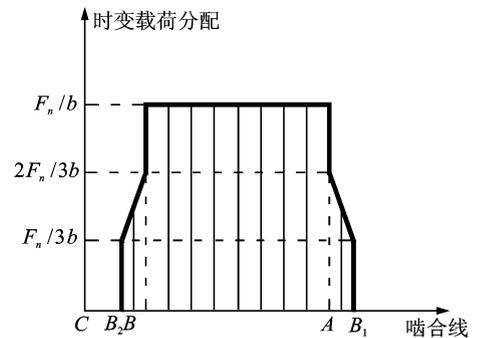


图 4 时变载荷分配图

Fig. 4 Rate of load share among gear teeth

齿轮接触点处的卷积速度 $V_c = V_r/2$, 粗糙度均方根值 $S_{avg} = 0.6 \mu\text{m}$ 。选用美孚 DTE 24-抗磨润滑油, 相关参数如表 3 所示。

表 3 润滑油相关参数

Tab. 3 Parameters of lubricating oil

密度/($\text{g} \cdot \text{mm}^{-3}$)	倾点/ $^{\circ}\text{C}$	闪点/ $^{\circ}\text{C}$
0.871	-27	220
润滑油动力黏度 v_0/cPs		润滑油运动黏度 v/cSt
27.4		31.5

2.5 齿侧间隙

$$\begin{cases} \hat{y}_1(t) = y_1(t) + R_p \theta_p(t) \\ \hat{y}_2(t) = y_2(t) + R_g \theta_g(t) \end{cases} \quad (16)$$

定义主被动齿轮中 P, G 两点间的动态相对位移差, 即动传动误差为

$$\begin{aligned} \delta(t) &= y_1(t) - y_2(t) - e(t) = \\ y_1(t) - y_2(t) + R_p\theta_p(t) - R_g\theta_g(t) - e(t) \end{aligned} \quad (17)$$

由于润滑的需要以及制造、加工和安装等的误差和使用过程中的磨损,在啮合轮齿间存在齿侧间隙。由于齿侧间隙的存在,轮齿间的接触状态会发生变化,导致轮齿间的接触、脱离和重复冲击,对轮齿负载荷和齿轮系统的动态特性造成不良影响。设齿侧间隙函数为

$$f(\delta) = \begin{cases} \delta(t) - b & \delta(t) > b \\ 0 & -b \leq \delta(t) \leq b \\ \delta(t) + b & \delta(t) < -b \end{cases} \quad (18)$$

式中 b 为齿侧间隙。

则齿面啮合力 N_p 、 N_g 和摩擦力 F_p 、 F_g 可以表示为

$$\begin{cases} N_{pi}(t) = K_{mi}(t)f(\delta(t)) + c_{mi}(t)\dot{\delta}(t) \\ N_{gi}(t) = N_{pi}(t) & i = 1, 2 \\ F_{pi}(t) = \mu(t)N_{pi}(t) \\ F_{gi}(t) = F_{pi}(t) & i = 1, 2 \end{cases} \quad (19)$$

式中: $\mu(t)$ 为时变摩擦因数,与滑滚比、粗糙度、润滑条件和单位法向载荷等因素有关。由于该齿轮系统是节点后啮合齿轮,不存在摩擦力改变方向,故没有齿面摩擦力方向系数。

对式(3)进行消除刚体位移,考虑齿侧间隙后,动力学方程为

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\frac{c_{pv}}{m_p}\dot{x}_1 - \frac{f(t)(c_{m1} + c_{m2})}{m_p}\dot{\delta} - \frac{K_{pv}}{m_p}x_1 - \frac{f(t)(K_{m1} + K_{m2})f(\delta(t))}{m_p} \\ \ddot{y}_1 = -\frac{c_{py}}{m_p}\dot{y}_1 - \frac{(c_{m1} + c_{m2})}{m_p}\dot{\delta} - \frac{K_{py}}{m_p}y_1 - \frac{(K_{m1} + K_{m2})f(\delta(t))}{m_p} \\ \ddot{x}_2 = -\frac{c_{gv}}{m_g}\dot{x}_2 + \frac{f(t)(c_{m1} + c_{m2})}{m_g}\dot{\delta} - \frac{K_{gv}}{m_g}x_2 + \frac{f(t)(K_{m1} + K_{m2})f(\delta(t))}{m_g} \\ \ddot{y}_2 = -\frac{c_{gy}}{m_g}\dot{y}_2 + \frac{(c_{m1} + c_{m2})}{m_g}\dot{\delta} - \frac{K_{gy}}{m_g}y_2 + \frac{(K_{m1} + K_{m2})f(\delta(t))}{m_g} \\ \ddot{\delta} = \ddot{y}_1 - \ddot{y}_2 - e(t) + \frac{T_p}{m_{ep}R_p} + \frac{T_g}{m_{eg}R_g} - \frac{1}{m_{ep}}((c_{m1} + c_{m2})\dot{\delta} + (K_{m1} + K_{m2})f(\delta(t))) - \\ \frac{1}{m_{eg}}((c_{m1} + c_{m2})\dot{\delta} + (K_{m1} + K_{m2})f(\delta(t))) - \\ \frac{1}{m_{ep}R_p}(f(t)(c_{m1}\dot{\delta} + K_{m1}f(\delta(t)))H_{p1} + f(t)(c_{m2}\dot{\delta} + K_{m2}f(\delta(t)))H_{p2}) - \\ \frac{1}{m_{eg}R_g}(f(t)(c_{m1}\dot{\delta} + K_{m1}f(\delta(t)))H_{g1} + f(t)(c_{m2}\dot{\delta} + K_{m2}f(\delta(t)))H_{g2}) \end{cases} \quad (20)$$

3 结果分析及讨论

运用 Matlab 求解库伦摩擦因数计算模型和基于弹流润滑理论的时变摩擦因数,结果如图 5 所示,根据式(8)知,平均摩擦因数综合曲率半径和切

向速度之和均取节点处的值,节点外啮合齿轮具有不通过节点的特性,故此公式对节点外啮合齿轮不适用,文献[8]表明采用弹流滑理论计算的摩擦因数与实验值更为接近,节点处滑滚比 $SR=0$,摩擦因数为 0,靠近节点处的滑滚比较小,摩擦因数较小,图 5 能够表明库伦摩擦模型计算出的摩擦因数与真实值比偏大,图中 B 点、 A 点的突变是由于单双齿交替,单位齿宽上的载荷突变引起的。

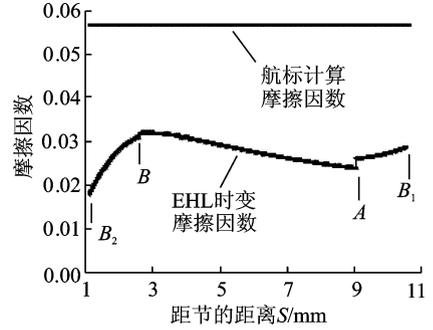


图 5 库伦摩擦因数模型与 EHL 时变摩擦因数对比
Fig. 5 Comparison of friction coefficient between Coulomb friction and EHL

由于式(20)中各系数的数量级差异较大,故对其进行量纲一化后,采用 4~5 阶变步长 Runge-Kutta 法进行求解。引入量纲一时间 $\tau = \omega_n t$,位移标尺 b_c, b_g 取 10^{-5} m, $\omega_n = (k_m/m_{eq})^{1/2}$,其中: k_m 为平均啮合刚度, m_{eq} 为主动轮和从动轮作用在啮合线上的等效质量。分采用 EHL 时变摩擦因数和库伦摩擦因数计算模型两种情况。采用 EHL 时变摩擦因数计算的主、被动齿轮振动位移如图 6 所示,采用航标平均摩擦因数计算的的主、被动齿轮振动位移如图 7 所示。

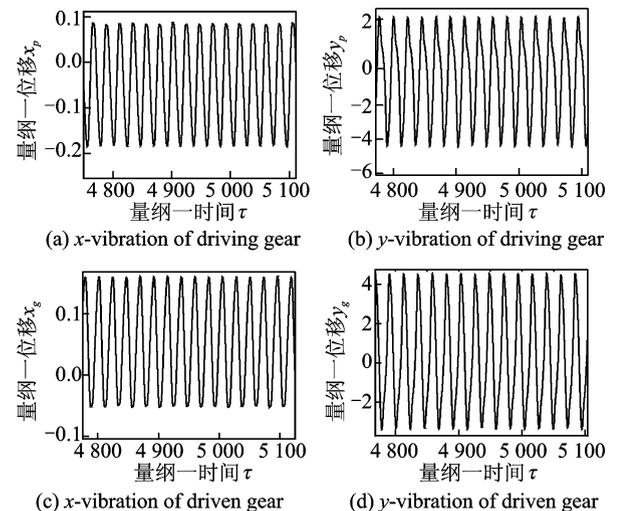


图 6 采用 EHL 时变摩擦因数的主、被动齿轮振动时域谱
Fig. 6 Dynamic response with EHL model

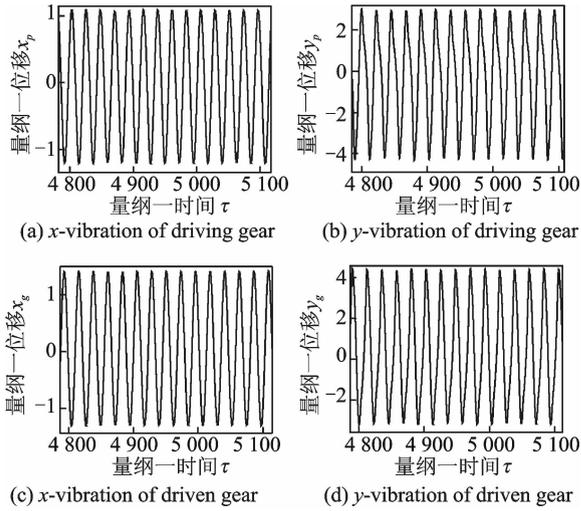


图7 采用库伦摩擦模型的主、被动齿轮振动时域谱
Fig. 7 Dynamic response with Coulomb friction model

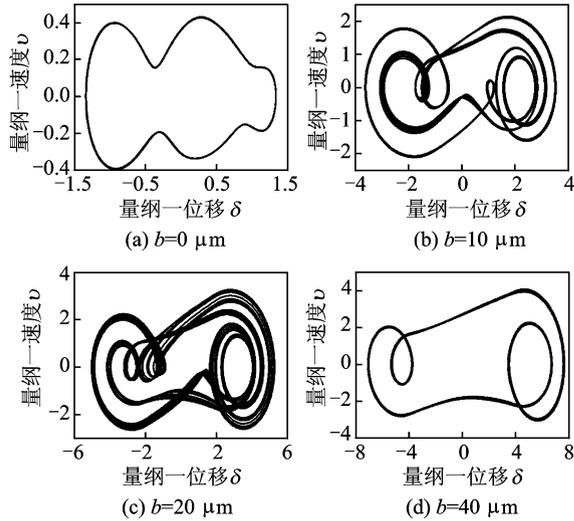


图8 不同齿侧间隙条件下沿啮合线方向相图
Fig. 8 Phase diagram of direction of mesh gears in different backlash

通过图6和图7对比知,摩擦因数对齿轮啮合沿摩擦力方向的动态特性影响较大,从振幅上看,采用库伦摩擦因数模型计算出的主、从动轮沿摩擦力方向的振动位移远大于运用EHL时变摩擦因数计算出的结果。文献[13]表明采用弹流润滑理论计算的摩擦因数与实验值更为接近。所以,在节点外齿轮啮合动力学分析中,应优先采用弹流润滑理论计算的摩擦因数。从图8中还可以看出,齿侧间隙为零时,系统做单周期运动,随着齿侧间隙的增大,系统进入混沌运动状态,但当齿侧间隙达到 $40\ \mu\text{m}$ 时,系统再次进入拟周期运动,因此齿侧间隙是影响齿轮系统非线性的一个重要因素。故正确计算出摩擦因数、齿侧间隙,然后对其进行动力

学求解是深入研究齿轮动态特性的关键一步。

4 结 论

(1) 本文以外啮合节点后啮合单级齿轮传动系统为研究对象,建立了考虑齿面摩擦、时变啮合刚度和齿侧间隙影响的六自由度非线性节点外啮合直齿轮动力学模型,运用能量法求出了齿轮时变啮合刚度。

(2) 将弹流润滑理论中计算摩擦因数的方法运用到计算节点外啮合时变摩擦因数中,与库伦摩擦因数计算模型进行比较,能够得出采用EHL理论计算的时变摩擦因数更加符合实际工况。

(3) 通过对比时变摩擦因数下和库伦摩擦因数计算模型下节点外啮合齿轮的振动位移,得出摩擦因数的选取对齿轮沿摩擦力方向的振动影响较为明显,齿侧间隙使齿轮啮合的动态特性表现出的非线性特征较为明显。

参考文献:

- [1] 李润方, 王建军. 齿轮系统动力学[M]. 北京: 科学出版社, 1996.
 - [2] Velex P, Sainsot P. An analytical study of tooth of tooth friction excitations in spur and helical gears [J]. Mechanism and Machine Theory, 2002, 37(7): 641-648.
 - [3] Vaishya M, Houser R. Modeling and analysis of sliding friction in gear dynamics [C]// Proceedings of the 2000 ASME Design Engineering Technical Conferences. Baltimore, USA; DETC 2000/PTG-14430, 2000: 601-610.
 - [4] Vaishya M, Houser R. Sliding friction induced nonlinearity and parametric effects in gear dynamics [J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, 248(4): 671-694.
 - [5] He S, Gunda R, Singh R. Inclusion of sliding friction in contact dynamics model for helical gears [J]. Journal of mechanical Design, 2007, 129(1): 48-57.
 - [6] He S, Cho S, Singh R. Prediction of dynamic friction forces in spur gears using alternate sliding friction formulations [J]. Journal of Sound and Vibration, 2008, 309(3/5): 843-851.
 - [7] 李发家, 朱如鹏, 鲍和云, 等. 行星齿轮系动力学特性分析及试验研究 [J]. 南京航空航天大学学报, 2012, 44(4): 511-519.
- Li Fajia, Zhu Rupeng, Bao Heyun, et al. A improved nonlinear model for a spur gear pair system [J].

- Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2012, 44(4): 511-519.
- [8] 张靖, 陈兵奎, 康传章, 等. 计及齿面摩擦的直齿轮动力学分析[J]. 振动与冲击, 2012, 31(21): 126-132.
Zhang Jing, Chen Bingkui, Kang Chuanzhang, et al. Dynamic analysis for spur gears considering friction effect [J]. Journal of Vibration and Shock, 2012, 31(21): 126-132.
- [9] 孙永正, 朱如鹏, 鲍和云. 节点外啮合齿轮胶合承载能力中平均摩擦因数计算方法的研究[J]. 航空动力学报, 2013, 28(9): 2155-2160.
Sun Yongzheng, Zhu Rupeng, Bao Heyun. Calculation of mean friction coefficient in scuffing strength for gear drive with meshing beyond pitch point [J]. Journal of Aerospace Power, 2013, 28(9): 2514-2160.
- [10] 朱孝录, 鄂中凯. 齿轮承载能力分析[M]. 北京: 教育出版社, 1992.
- [11] Buckingham E. Analytical mechanics of gear[M]. New York: Dover, 1949.
- [12] 航空工业部标准编制组. 航空渐开线圆柱齿轮胶合承载能力计算介绍[J]. 航空标准化, 1985(1): 29-40.
Ministry of Aviation Industry Drafting Group of Standard. Calculation of the bearing capacity of the aircraft involute cylindrical gears [J]. Aeronautic Standardization, 1985(1): 29-40.
- [13] Xu Hai. Development of a generalized mechanical efficiency prediction[D]. The Ohio State: The Ohio State University, 2005.

